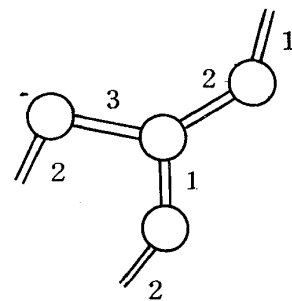


$$\begin{vmatrix}
 1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & -p_z \\
 -p_1 & 1 & & & -p_z \\
 -p_1 & -p_2 & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 -p_1 & -p_2 & & & 1
 \end{vmatrix} = 0$$

枝分れ高分子の相変化

阪大工 庄 司 一 郎

模型的に考えて、抗原には f 個の違った「穴」があいていると考え、これに f 種類の抗体の各々が結合できると考える。抗体は棒状で両端が抗原の「穴」にはさまれることができる。これらが相結合して右図のように「分子」を作ると考える。この「分子」が「巨大分子」になりうるためには抗原、抗体の数の割合がどのようにあればよいかなどを考える。これらは「木」のような形をしていると考えるので、いわゆる「ペーテ格子」上に配布されていると考えられる。抗原の数 N 、各抗体の数 N_k ($k=1, 2, \dots, f$)、それに分子数 M を一定とする条件のもとにエントロピー極大の原理より最確分布



第1図 木 ($n=3$, $\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$, $i_1=1, i_2=2, i_3=0$)

$$\mathcal{M}_n \{ \ell_1, \ell_2, \ell_f \}_{i_1, i_2, i_f} = c n^{f-2} \prod_{k=1}^f \frac{(n - \ell_k - 1)!}{\ell_k! i_k! (n - 2\ell_k - j_k)!} x_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots x_f^{n_f} y^n$$

がきまる。ここで上式は抗原の数が n ， k 種の抗体を n_k 個ふくみその中 ℓ_k 個は抗原を結びつける役目をし， i_k 個は抗原に一方だけがついている ($k=1, 2, \dots, f$) ような「分子」の数をあらわしている。もちろん $\sum_k \ell_k = n-1$ である。

さて p_k をもって， k 種の「穴」の中，ひつついたものの割合とし $r_k = N/2N_k$ とするとあきらかに

$$p_k \leq 1/r_k \quad (1)$$

$$\text{また } p = \sum_k p_k / f, \quad r = f N / 2 \sum_k N_k = f / \sum_k \frac{1}{r_k} \quad \text{として,}$$

$$p \leq 1/r \quad (1')$$

また $p = (\sum N_k + N - M) / f N$ ともかけて，〔穴が一つふさがるとに分子数は一つへる〕

$M \geq 1$ という条件は

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{2r} \geq p \quad (2)$$

となる。さらに若干の計算ののち $\langle n^2 \rangle$ ， $\langle n_k^2 \rangle$ ， $\dots$ が発散する点として

$$\sum_k \frac{p_k^2}{\frac{1}{r_k} + p_k^2} = 1 \quad (3)$$

という式を得る。左辺は 1 より大きくは成り得ない。

とくに各種の抗体が等量のときは，

$$f p^2 / \left(\frac{1}{r} + p^2 \right) = 1$$

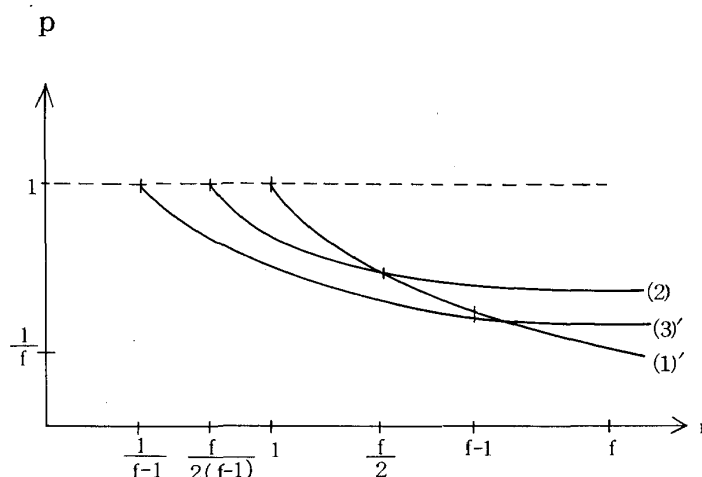
より，これより

$$p = \frac{1}{\sqrt{f-1}} \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (3')$$

p と r との関係を示す。(1)', (2), (3)' を図示して, (3)' に到達できるのは

$$\frac{1}{f-1} < r < f-1$$

に限る。これはベーテ格子の critical percolation が「サイト問題」についても, $1/(f-1)$ であることと対応している。また最近宮島らが論じた異方性ベーテ格子の critical percolation の問題の解



第2図 p と r の関係式

$$\sum \frac{\tilde{p}_i}{1 + \tilde{p}_i} = 1 \quad (4)$$

に対応して, この場合は (3) で $p_k \leq 1/r_k$ とおくと,

$$\sum_k \frac{1}{r_k + 1} \leq 1$$

で $\tilde{p}_i = 1/r_i = 2 N_i/N$ とおけば一致する。

また $r_i < 1$ の領域では $p_i \leq 1$ とおいて (3) は

$$\sum_k \frac{1}{1/r_k + 1} \leq 1$$

でこの領域では $\tilde{p}_i = r_i$ とおくとやはり等号の極限では (4) に一致する。

ここに書いたものは, Biken Journal (阪大微研報告) 5 (1962) 259 に発表したもので〔共著者 天野, 徳永, 佐藤〕ベーテ格子研究会のために再集したものである。