

虚数乘法を持つ K3 曲面の整数論的性質とその応用について (On the arithmetic of K3 surfaces with complex multiplication and its applications)

By

伊藤 和広*
KAZUHIRO ITO

Abstract

This survey article is an outline of author's talk at the RIMS Workshop Algebraic Number Theory and Related Topics (2017). We study arithmetic properties of K3 surfaces with complex multiplication (CM) generalizing the results of Shimada for K3 surfaces with Picard number 20. Then, following Taelman's strategy and using Matsumoto's good reduction criterion for K3 surfaces with CM, we construct K3 surfaces over finite fields with given L -function, up to finite extensions of the base fields. We also prove the Tate conjecture for self-products of K3 surfaces over finite fields by CM lifts and the Hodge conjecture for self-products of K3 surfaces with CM proved by Mukai and Buskin.

§ 1. はじめに

体 k 上の非特異な射影曲面 X が K3 曲面とは、 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ かつ X の標準束 $K_X := \Omega_X^2$ が自明な直線束になるときにいう。楕円曲線を群構造に着目して高次元化したものがアーベル多様体であるが、標準束が自明という条件などに着目して高次元化したものが Calabi-Yau 多様体であり、2 次元 Calabi-Yau 多様体が K3 曲面と考えられる。K3 曲面は代数曲面の中でも特に興味深い対象として研究されてきた。今では K3 曲面はよく知られた対象として認知されているが、まだわかっていないことも多い。

K3 曲面の特徴の 1 つとして、アーベル多様体との関係が深いことが挙げられる。例えば、虚数乘法を持つアーベル多様体の K3 曲面類似として、虚数乘法を持つ K3 曲面と呼

Received April 2, 2018. Revised November 13, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14J28; Secondary 14G10, 14G15, 14K22.

Key Words: K3 surface, Hasse-Weil zeta function, Complex multiplication, Good reduction, Tate conjecture.

*京都大学理学研究科数学教室 606-8502 京都市左京区北白川追分町

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

e-mail: kito@math.kyoto-u.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

ばれるクラスが定義され、似たような性質を持つことが知られている．本稿では、虚数乗法を持つ K3 曲面の整数論的性質とその応用について説明する．以降、簡単のため虚数乗法を **CM** ということにする．

各節の内容は以下の通りである．

第 2 節では CM を持つ K3 曲面の定義、例、性質を説明する．

第 3 節では CM を持つ K3 曲面の良い還元の性質を調べる．良い還元は正標数の K3 曲面となっているが、正標数の K3 曲面には超特異 (supersingular) K3 曲面と呼ばれる大事なクラスがある．最初に与えられた CM を持つ K3 曲面から定まる CM 体の情報によって、良い還元が超特異 K3 曲面かそうでないかを判定できることを説明する．証明の際、大事な道具となるのが、Rizov によって証明された CM を持つ K3 曲面に対する虚数乗法論である．また良い還元が超特異 K3 曲面となる場合に、その Artin 不変量と呼ばれる不変量の計算について説明する．Artin 不変量は Artin によって導入された不変量で、超特異 K3 曲面を調べる上で大切な不変量である．計算には Bhatt-Morrow-Scholze によって証明された整係数でのエタールコホモロジーとクリスタリンコホモロジーの比較同型を用いる．

第 4 節では、有限体上の単純なアーベル多様体を Weil 数と呼ばれる代数的整数で分類する Honda-Tate 理論の、K3 曲面に対しての弱い類似について説明する．この類似は Taelman によって考えられたものである．まず、Taelman は有限体上の K3 曲面の L -関数の性質を調べた．それを元にして、ある種の多項式を定式化し、それらが有限体上の K3 曲面の L -関数として (有限次拡大の違いを許して) 実現されることを予想した．そして Taelman は予想を、非アルキメデス局所体上の K3 曲面に対しての半安定還元の存在を仮定して証明した．この節では、標数が 7 以上の時には半安定還元の存在を仮定せずに、Taelman による予想が証明できることを説明したい．アーベル多様体の Honda-Tate 理論と同じように、欲しい有限体上の K3 曲面は CM を持つ K3 曲面の良い還元として作る．

第 5 節では、CM を持つ K3 曲面のもう 1 つの応用として、有限体上の K3 曲面 X の自己積 $X \times X$ についての Tate 予想を説明する．これは伊藤哲史氏と越川皓永氏との共同研究である．証明を大雑把に一言で述べると、有限体上の K3 曲面 X を CM を持つ K3 曲面に持ち上げ、向井や Buskin によって証明された CM を持つ K3 曲面の自己積についての Hodge 予想に帰着させて証明する．CM を持つ K3 曲面に持ち上げる部分では、Kisin による、Hodge 型志村多様体の整正準モデルにおいて、正標数の点はある CM な点 (special point) の良い還元と同種になっているという結果の証明のアイディアを用いる．ここでのポイントは、有限体上の K3 曲面から来るような志村多様体の正標数の点は、同種よりも強く、CM な点の良い還元と同型となっていることを示すところである．

§ 2. 虚数乗法 (CM) を持つ K3 曲面

この節では、虚数乗法 (CM) を持つ K3 曲面の定義、例、性質について説明する．

まず、K3 曲面の定義と代表的な例を挙げる．K3 曲面の詳細については、[8] など参

考にされたい。

定義 2.1. 体 k 上の非特異な射影曲面 X が **K3 曲面** とは, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ かつ X の標準束 K_X が自明になるときにいう。

注意 2.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上では射影的でない曲面に対しても K3 曲面は定義され, またそれらを考えることは理論的にも大事となる. しかし本稿では $\mathbb{C}$ 上で K3 曲面を考えるときも常に射影的であると仮定することにする。

例 2.3 (Kummer 曲面). k を標数 2 でない体とし, A を k 上のアーベル曲面とする. 自己同型 $\iota: A \rightarrow A, x \mapsto -x$ で A を割ったもの A/ι の最小特異点解消 $\text{Km}(A)$ は K3 曲面になっており, これを **Kummer 曲面** という。

K3 曲面とアーベル多様体が密接に関わっている理由の 1 つとして, 上の例 2.3 の Kummer 曲面の存在が挙げられる. また, 例 2.3 ではアーベル曲面から K3 曲面を構成したが, 逆に K3 曲面 X/k に対して (k を有限次拡大に取りかえた後) **Kuga-Satake アーベル多様体** と呼ばれる k 上のアーベル多様体 $A^{\text{KS}}(X)$ が構成できる. 詳細は [21], [14] を参照されたい. $A^{\text{KS}}(X)$ は次元がとても高く, 具体的な幾何は複雑であるが, X のコホモロジーの情報が $A^{\text{KS}}(X)$ のコホモロジーの情報から得られる. $A^{\text{KS}}(X)$ については第 5 節にてもう少しだけ詳しく説明する。

CM を持つアーベル多様体の K3 曲面類似として, CM を持つ K3 曲面を定義したい. そのためにいくつか記号を準備する. 以下 $X_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面とする. Picard 群 $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}})$ から特異コホモロジー $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(1))$ への自然な単射がある. $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}})$ の $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(1))$ の中での直交補空間

$$T(X_{\mathbb{C}}) := \text{Pic}(X_{\mathbb{C}})^{\perp} \subset H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(1))$$

を超越格子という. $T(X_{\mathbb{C}})$ は $\mathbb{Z}$ -Hodge 構造を持つ. さらに $\text{End}_{\text{Hdg}}(T(X_{\mathbb{C}}))$ を $T(X_{\mathbb{C}})$ の $\mathbb{Z}$ -Hodge 構造を保つ $\mathbb{Z}$ 線形自己射からなる $\mathbb{Z}$ -代数とする。

定義 2.4. $X_{\mathbb{C}}$ が **CM を持つ K3 曲面** とは, 以下の 2 つの条件が成り立つときにいう:

- $E := \text{End}_{\text{Hdg}}(T(X_{\mathbb{C}})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が CM 体である.
- $\dim_E T(X_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 1$.

E を強調したい時には, $X_{\mathbb{C}}$ は E を CM に持つ K3 曲面である, などともいうことにする。

$\mathbb{S} := \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ とおく. $\mathbb{S} \rightarrow \text{GL}(H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(1)))$ を $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$ の $\mathbb{Q}$ -Hodge 構造から定まる射とする. $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$ の Mumford-Tate 群とは, $\text{GL}(H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1)))$ の $\mathbb{Q}$ 上の部分代数群で, $\mathbb{S}$ の像を含むもののうち最小なものとして定義される. これを $\text{MT}(X_{\mathbb{C}})$ と書き, $X_{\mathbb{C}}$ の Mumford-Tate 群ともいうことにする. CM を持つアーベル多様体の場合と同じように, Mumford-Tate 群 $\text{MT}(X_{\mathbb{C}})$ が可換であることと $X_{\mathbb{C}}$ が CM を持つことが同値となることが [32, Remark 1.5.3, Theorem 2.3.1] から従う。

CM を持つアーベル多様体とその他の類似として、もし $X_{\mathbb{C}}$ が CM を持つならば、 E を含む代数体 K と K 上の K3 曲面 X_K が存在して、 $X_K \otimes_K \mathbb{C} \cong X_{\mathbb{C}}$ となることが知られている [27]. 第 3 節で、代数体上の K3 曲面 X_K の良い還元の性質を調べる.

CM を持つ K3 曲面の簡単な例をいくつか挙げる.

例 2.5. $X_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面で Picard 数 (i.e. $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(X_{\mathbb{C}})$) が 20 となるものとする. このとき $X_{\mathbb{C}}$ は虚 2 次体を CM に持つ K3 曲面となることが知られている.

例 2.6. $A_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上のアーベル曲面とし、例 2.3 のように $X_{\mathbb{C}} := \text{Km}(A_{\mathbb{C}})$ を $A_{\mathbb{C}}$ から作られる Kummer 曲面とする. このとき $A_{\mathbb{C}}$ が CM を持つアーベル曲面であることと、 $X_{\mathbb{C}}$ が CM を持つ K3 曲面であることが同値となる [10, Lemma 9.3].

例 2.7. $X_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面とし、自己同型 $f \in \text{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ で、

- 超越格子に誘導する自己同型 $f^* \in \text{Aut}(T(X_{\mathbb{C}}))$ の位数が $N < \infty$, かつ
- $\phi(N) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} T(X_{\mathbb{C}})$

を満たすものが存在するとする. ここで ϕ は Euler の関数である. このとき $X_{\mathbb{C}}$ は円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ を CM に持つ K3 曲面となる.

最後に例ではないが、以下の結果を述べておく.

定理 2.8 ([31, Theorem 4]). E を $[E : \mathbb{Q}] \leq 20$ を満たす任意の CM 体とする. このとき $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 $X_{\mathbb{C}}$ で E を CM に持つものが存在する.

このような定理があることから、 E を CM に持つ K3 曲面 $X_{\mathbb{C}}$ の性質が CM 体 E からどれくらいわかるのを調べるのは重要だと考えられる. 次の節では、CM を持つ K3 曲面の良い還元の性質を、CM 体の情報で記述できるということを説明する.

§ 3. CM を持つ K3 曲面の良い還元

この節では $X_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面とし、常に CM 体 E を CM に持つと仮定する. また前節で述べたように、 E を含む代数体 K と K 上の K3 曲面 X_K があって、 $X_K \otimes_K \mathbb{C} \cong X_{\mathbb{C}}$ となる. このようなモデル X_K を 1 つ固定する. この節では X_K の良い還元を調べたい.

v を K の有限素点、 K_v を K の v における完備化、 $\mathcal{O}_{K_v}$ をその付値環、 $k(v)$ をその剰余体とする. $k(v)$ の標数は p とする. ある $\text{Spec } \mathcal{O}_{K_v}$ 上固有かつ滑らかな代数的空間

$$\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{K_v}$$

で $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_{K_v}} K_v \cong X_K \otimes_K K_v$ となるものが存在すると仮定する. そして、その (幾何学的) 特殊ファイバー

$$\mathcal{X}_{\bar{v}} := \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_{K_v}} \overline{k(v)}$$

の性質を調べたい．ここで $\overline{k(v)}$ は $k(v)$ の代数閉包である．(他の体とその代数閉包に対しても同じ記号を使うことにする．) $\mathcal{X}_{\overline{v}}$ は標数 p の K3 曲面となる．以降，簡単のため $\mathcal{X}$ を単に $\mathcal{O}_{K_v}$ 上の K3 曲面などとも呼ぶことにする．

注意 3.1. CM を持つ K3 曲面 $X_{\mathbb{C}}$ に対して，このような $\mathcal{O}_{K_v}$ 上の K3 曲面 $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{K_v}$ は， K をその有限次拡大で取りかえた後に，常に存在することが予想されている．曲面に対する（強い意味で）半安定還元が存在を仮定すれば， $\mathcal{X}$ の存在を証明できることが知られている [22, Theorem 6.3], [19, Theorem 3.2]. 半安定還元を仮定しない場合，松本により比較的弱い条件下で示されている [22, Theorem 6.3]. 詳しくは定理 4.4 を参考にされたい．

この節の主結果を説明する前に，正標数の K3 曲面についての重要な概念である，高さ，超特異 K3 曲面と，その Artin 不変量について説明する． k を標数 p の完全体とし， Y を k 上の K3 曲面とする．

Art_k を，局所アルティン k 代数で剰余体が k であるものからなる圏とする．(Abelian groups) をアーベル群からなる圏とし， $R \in \text{Art}_k$ に対して $\ker(H_{\text{ét}}^2(Y \otimes_k R, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Y, \mathbb{G}_m)) \in (\text{Abelian groups})$ を対応させることで，関手

$$\Phi_Y^2: \text{Art}_k \rightarrow (\text{Abelian groups})$$

を得る．関手 Φ_Y^2 は滑らかな 1 次元形式群 $\widehat{\text{Br}}(Y)$ で表現される [2]. $\widehat{\text{Br}}(Y)$ を Y の **形式 Brauer 群** と呼ぶ． Y の **高さ** を形式群 $\widehat{\text{Br}}(Y)$ の高さとして定義し， $h(Y)$ とかく． $1 \leq h(Y) \leq 10$ または $h(Y) = \infty$ となることが知られている． $h(Y) = \infty$ のとき K3 曲面 Y は **超特異 K3 曲面 (supersingular K3 surface)** という．これは Artin によって定義された．

K3 曲面 Y が $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(Y \otimes_k \overline{k}) = 22$ となるときにも超特異 K3 曲面という．これは塩田によって定義された．2つの定義が一致することは非自明で，K3 曲面に対する Tate 予想の帰結である．K3 曲面に対する Tate 予想の証明にはたくさんの人が貢献をしている．ここで全てを紹介することは控えて，[21], [14]¹のみを参考文献として挙げておきたい．

以下 k を代数閉体と仮定する． Y が超特異 K3 曲面となるとき， $\text{Pic}(Y)$ の交叉行列の行列式 $\text{disc Pic}(Y)$ は

$$\text{disc Pic}(Y) = -p^{2a} \quad (a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq 10)$$

という形にかけることが [28, Proposition 1 in Section 8, Theorem in Section 8] から従う．整数 $a(Y) := a$ を超特異 K3 曲面 Y の **Artin 不変量** と呼ぶ．Artin 不変量は超特異 K3 曲面を調べる上で大事な不変量となっている．例えば，Artin 不変量が 1 となる超特異 K3 曲面は同型を除いて一意であり，標数が 2 でないときは Kummer 曲面となっていることが知られている [26, Remark 2.4].

¹[14] で与えられた標数 2 の K3 曲面の Tate 予想の証明にはギャップがある．そのギャップを埋めるには（少なくとも現時点でわかっている方法では）[5] で与えられた整係数での比較同型を用いる必要がある．詳細は [11, Remark 6.9] を参照されたい．

主結果を述べる． $F \subset E$ を CM 体 E の最大総実部分体とする．今 $E \subset K$ という関係にあった． $\mathfrak{q}$ を v の下にある F の有限素点とする．

定理 3.2 ([10, Theorem 1.1]).

1. $\mathfrak{q}$ が E/F において 2 つの素点に分解するとする．このとき $h(\mathcal{X}_{\bar{v}}) = [E_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p]$ となる．とくに $\mathcal{X}_{\bar{v}}$ は超特異 K3 曲面でない．
2. $\mathfrak{q}$ が E/F において分解しないとする．このとき $h(\mathcal{X}_{\bar{v}}) = \infty$ ，つまり $\mathcal{X}_{\bar{v}}$ は超特異 K3 曲面となる．

定理 3.3 ([10, Theorem 1.2]). $\mathfrak{q}$ が E/F において分解しない，つまり $\mathcal{X}_{\bar{v}}$ が超特異 K3 曲面とする．さらに次を仮定する：

- $\text{disc Pic}(X_{\mathbb{C}})$ が p で割れない．
- $\mathcal{O}_E$ を E の整数環として， $\text{End}_{\text{Hdg}}(T(X_{\mathbb{C}})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ となる．

このとき

$$a(\mathcal{X}_{\bar{v}}) = [k(\mathfrak{q}) : \mathbb{F}_p]$$

となる．

注意 3.4. 定理 3.2 は CM を持つ楕円曲線についての古典的な結果（例えば [17, Chapter 13, Theorem 12] を見よ）の K3 曲面類似である．

注意 3.5. 定理 3.2 と定理 3.3 は $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(X_{\mathbb{C}}) = 20$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 $X_{\mathbb{C}}$ （従って虚 2 次体を CM に持つ）についての島田の結果 [29, Proposition 5.5], [30, Theorem 1] の一般化である．また例 2.7 のような K3 曲面についての Jang の結果 [12, Theorem 2.3], [13, Corollary 3.3] の一般化でもある．

定理 3.2 の証明について簡単に説明する．まず $\mathcal{X}_{\bar{v}}$ の高さを求めるためには，エタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}, \mathbb{Q}_{\ell}(1))$ ($\ell \neq p$) へのフロベニウス作用素 $\text{Frob}_{k(v)}$ の固有値を調べれば良いことが知られている [18, Proposition 6.17]．よって $\text{Frob}_{k(v)}$ がどう作用しているかを計算すればよいが，これは Rizov による K3 曲面についての虚数乗法論を用いて計算する．詳しい主張は [27, Corollary 3.9.2] を参考にされたい．

この節の残りで，定理 3.3 の証明の概略を述べたい．

定理 3.3 の証明の概略． $\text{disc Pic}(\mathcal{X}_{\bar{v}}) = -p^{2a}$ としたときの a を計算したい． $W := W(\overline{k(v)})$ を $\overline{k(v)}$ を係数にもつ Witt vector のなす環とし， $\text{Pic}(\mathcal{X}_{\bar{v}}) \otimes_{\mathbb{Z}} W$ からクリスタリンコホモロジー $H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)$ への Chern 類写像

$$\text{ch}_{\text{cris}} : \text{Pic}(\mathcal{X}_{\bar{v}}) \otimes_{\mathbb{Z}} W \rightarrow H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)$$

を考える．すると a は Chern 類写像の余核 $\text{Coker}(\text{ch}_{\text{cris}})$ の W 加群としての長さに一致している．

また φ を $H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)$ のフロベニウス自己準同型とすると, [26, Corollary 1.6] により $\text{Pic}(\mathcal{X}_{\bar{v}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)^{\varphi=p}$ となっている. よって $\text{Coker}(\text{ch}_{\text{cris}})$ を計算するためには φ が $H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)$ にどう作用しているかを具体的に書き表せればよい. ここで Artin 不変量を計算するためには, L を W の商体として, 有理係数のクリスタリンコホモロジー $H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/L)$ を計算するのでは不十分で, 整係数で計算する必要があることに注意する.

そのために, まず $X_{\bar{K}_v} := X_K \otimes_K \bar{K}_v$ のエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{K}_v}, \mathbb{Z}_p)$ への絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ の作用を計算する. ここで再び Rizov による K3 曲面についての虚数乗法論を用いる. すると $H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{K}_v}, \mathbb{Z}_p)$ への絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ の作用が Lubin-Tate 指標を使って書き下せる.

次のステップとして, エタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{K}_v}, \mathbb{Z}_p)$ から作られる Breuil-Kisin 加群 $\mathfrak{M}(H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{K}_v}, \mathbb{Z}_p))$ を計算する. (Breuil-Kisin 加群については [15, Section (1.2)] などを見よ.) ここでは Andreatta-Goren-Howard-Madapusi Pera による Lubin-Tate 指標から作られる Breuil-Kisin 加群の具体的な表示 [1, Proposition 2.2.1] を用いて計算する.

最後に Bhatt-Morrow-Scholze によって証明された整係数でのエタールコホモロジーとクリスタリンコホモロジーの比較同型を用いて, Breuil-Kisin 加群 $\mathfrak{M}(H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{K}_v}, \mathbb{Z}_p))$ からクリスタリンコホモロジー $H_{\text{cris}}^2(\mathcal{X}_{\bar{v}}/W)$ を計算する. 詳しい主張は [5] を参考にされたい. $\square$

§ 4. 与えられた L -関数を持つ有限体上の K3 曲面の構成

この節では, CM を持つ K3 曲面の応用として, アーベル多様体論における Honda-Tate 理論の K3 曲面に対しての弱い類似について説明する.

$\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^a$ の有限体とし, X を $\mathbb{F}_q$ 上の K3 曲面とする. 素数 $\ell \neq p$ に対して

$$L(X/\mathbb{F}_q, T) := \det(1 - T\text{Frob}_{\mathbb{F}_q}; H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}(1))) \in 1 + T\mathbb{Q}[T]$$

を X の Hasse-Weil Zeta 関数という. K3 曲面 X に対して $H_{\text{ét}}^2(X_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}(1))$ は 22 次元となっている. $L(X/\mathbb{F}_q, T)$ を,

$$L(X/\mathbb{F}_q, T) = \prod_{i=1}^{22} (1 - \gamma_i T) \quad (\gamma_i \in \bar{\mathbb{Q}})$$

のように書いたとき, $L(X/\mathbb{F}_q, T)$ の超越部分 $L_{\text{trc}}(X/\mathbb{F}_q, T)$ を,

$$L_{\text{trc}}(X/\mathbb{F}_q, T) := \prod_i (1 - \gamma_i T) \in 1 + T\mathbb{Q}[T]$$

で定義する. ここで i は γ_i が 1 のべき乗根とならない i をはしるものとする. 簡単のため

$$L_{\text{trc}}(X/\mathbb{F}_q, T) = \prod_{i=1}^{2m} (1 - \gamma_i T)$$

とおく. X は射影的であるため $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}) \geq 1$ となる. よって $0 \leq m \leq 10$ となっている. $m = 0$ のとき, $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ は超特異 K3 曲面となる.

この節では, 超特異 K3 曲面は扱わないものとする. つまり $1 \leq m \leq 10$ のときのみを考える. このとき $L_{\text{trc}}(X/\mathbb{F}_q, T)$ は次の条件を満たす [31, Theorem 1].

条件 4.1. 多項式 $L(T) = \prod_{i=1}^{2m} (1 - \gamma_i T) \in 1 + T\mathbb{Q}[T]$ ($1 \leq m \leq 10$) に対して以下の条件を考える.

- すべての γ_i の複素絶対値は 1.
- γ_i は 1 の n 乗根でない.
- $\ell \neq p$ に対し, $L(T) \in \mathbb{Z}_{\ell}[T]$.
- $1 \leq h \leq m$ なる整数 h があって, γ_i たちを並び替えると,

$$\begin{cases} \nu_q(\gamma_i) = -1/h & (1 \leq i \leq h) \\ \nu_q(\gamma_i) = 0 & (h+1 \leq i \leq 2m-h) \\ \nu_q(\gamma_i) = 1/h & (2m-h+1 \leq i \leq 2m) \end{cases}$$

と書ける.

- ある整数 $e \geq 1$ と $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式 $Q(T) \in \mathbb{Q}[T]$ があって $L(T) = Q(T)^e$ と書ける.
- $Q(T) = \prod_j (1 - \beta_j T)$ ($\beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$) とおいたとき,

$$Q_{<0}(T) = \prod_{\nu_q(\beta_j) < 0} (1 - \beta_j T) \in \mathbb{Q}_p[T]$$

は $\mathbb{Q}_p$ 上で既約となる.

条件 4.1 に出てくる整数 h は K3 曲面 $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ の高さと一致していることに注意しておく. Taelman は以下の予想をした.

予想 4.2. 条件 4.1 を満たす $L(T) = \prod_{i=1}^{2m} (1 - \gamma_i T) \in 1 + T\mathbb{Q}[T]$ ($1 \leq m \leq 10$) に対し, ある正の整数 n と $\mathbb{F}_{q^n}$ 上の K3 曲面 X があって,

$$L_{\text{trc}}(X/\mathbb{F}_{q^n}, T) = \prod_{i=1}^{2m} (1 - \gamma_i^n T)$$

となる.

さらに Taelman は (強い意味で) 半安定還元が存在を仮定すれば, 予想が正しいことを示した [31, Theorem 3]. この節の主結果は以下の定理である.

定理 4.3 ([9, Theorem 1.3]). $p \geq 7$ ならば予想 4.2 は成り立つ.

定理 4.3 の証明は, 基本的には, Taelman のアイデアに従う. Taelman のアイデアの概略は以下の通りである.

まず, 条件 4.1 を満たす $L(T) = \prod_{1 \leq i \leq 2m} (1 - \gamma_i T) \in 1 + T\mathbb{Q}[T]$ ($1 \leq m \leq 10$) をとる. 条件 4.1 により $\mathbb{Q}(\gamma_1)$ の p の上の素点 v_0 で $v_0(\gamma_1) < 0$ となるものがただ 1 つ存在する. 次に $\mathbb{Q}(\gamma_1)$ を含む CM 体 E で, $[E : \mathbb{Q}] = 2m$ かつ v_0 の上にただ 1 つ素点を持つものをとる. 定理 2.8 により, E を CM にもつ $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ をとる. K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ はある代数体 $K \supset E$ 上定義される. K の p 上の適当な素点で Z_K が良い還元を (K を有限次拡大で取りかえた後に) 持てば, その還元が欲しかった有限体上の K3 曲面となることを Rizov による K3 曲面に対する虚数乗法論を用いて示す.

もし局所体上の K3 曲面に対して, (強い意味で) 半安定還元の存在を仮定するなら, 最後のステップにおいて Z_K が, K を有限次拡大で取りかえた後に, 良い還元を v で持つことがわかる (注意 3.1 を見よ). しかし現状では, 局所体上の K3 曲面に対して半安定還元の存在は完全には示されていない.

定理 4.3 の証明のポイントは, 上の Taelman のアイデアの概略において, 良い還元をもつような E を CM に持つ K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ を見つけてくることである. 今のところ, 以下のような CM を持つ K3 曲面 が良い還元を持つことが知られている.

定理 4.4 ([22, Theorem 6.3]). L を完備離散付値体とし, 剰余体は完全体で標数 $p \geq 5$ とする. Z を L 上定義された CM を持つ K3 曲面とする. 次の 2 つのどれかを満たすとする:

- Z はセクション付きの楕円曲面である, または
- Z は $(\mathcal{L})^2 + 4 < p$ を満たす豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を持つ.

ただし, $(\mathcal{L})^2$ は $\mathcal{L}$ の自己交点数とする. このとき, ある有限次拡大 L'/L と, L' の付値環 $\mathcal{O}_{L'}$ 上固有かつ滑らかな代数的空間 $\mathcal{Z}$ があって, $\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_{L'}} L' \simeq Z \otimes_L L'$ となる.

従って, 定理 4.3 を示すためには, 以下の命題を示せば十分である.

命題 4.5. E を $[E : \mathbb{Q}] = 2m$ ($1 \leq m \leq 10$) を満たす CM 体とする. このとき E を CM にもつ $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ で以下の条件を満たすものが存在する:

- $1 \leq m \leq 9$ ならば, $Z_{\mathbb{C}}$ はセクション付きの楕円曲面である.
- $m = 10$ ならば, $Z_{\mathbb{C}}$ は $(\mathcal{L})^2 = 2$ を満たす豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を持つ.

証明の説明の前に記号を導入する. まず N が $\mathbb{Z}$ 上の格子とは, N が有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であり, 対称双線形形式

$$(\cdot, \cdot): N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$$

で誘導される写像 $N \rightarrow N^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ が単射になるものが与えられているときにいう。階数 2 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$ 上に $(e, e) = (f, f) = 0$, $(e, f) = 1$ で定められた対称双線形形式を入れたものを U とおく。

命題 4.5 の証明の概略。まず $Z_{\mathbb{C}}$ がセクション付きの楕円曲面となることと、格子の埋め込み $U \hookrightarrow \text{Pic}(Z_{\mathbb{C}})$ があることが同値であることに注意する。また、定義により、 $[E : \mathbb{Q}] = 2m$ を満たす CM 体 E を CM にもつ K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ の Picard 数は $22 - 2m$ となる。

一般に $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 $Z_{\mathbb{C}}$ の Picard 数が 12 以上なら、常に格子の埋め込み $U \hookrightarrow \text{Pic}(Z_{\mathbb{C}})$ があり、従って $Z_{\mathbb{C}}$ はセクション付きの楕円曲面となることが知られている。よって $m \leq 5$ のとき、命題は定理 2.8 から従う。

$6 \leq m \leq 9$ のときは、具体的に $\mathbb{Z}$ 上の格子を作り、 $\mathbb{C}$ 上の K3 曲面の周期写像の全射性により、 E を CM に持つ K3 曲面で欲しい性質を持ったものを作る。このとき大事な道具になるのが、Nikulin による格子の埋め込み定理 [24, Theorem 1.14.4], [8, Chapter 14, Corollary 3.1] と、Bayer-Fluckiger による $\mathbb{Q}$ 上の二次形式が CM 体からくるものになるかどうかの判定法 [3] である。詳細は [9, Proposition 4.4] を参考にされたい。Nikulin の定理を適用するために $6 \leq m$ が必要であることを注意しておく。

$m = 10$ のときも同じように、 $(\mathcal{L})^2 = 2$ となる豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を持つための十分条件を格子の言葉で記述して、具体的に $\mathbb{Z}$ 上の格子を作ることにより証明する。□

§ 5. 有限体上の K3 曲面の自己積についての Tate 予想

この節では、有限体上の K3 曲面の自己積についての Tate 予想の証明について説明したい。この節の結果は伊藤哲史氏と越川皓永氏との共同研究である。

$\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^a$ の有限体とし、 X を $\mathbb{F}_q$ 上の K3 曲面とする。この節の主結果は以下の通りである。

定理 5.1 ([11, Theorem 1.4]). 自己積 $X^2 := X \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} X$ についての Tate 予想が成り立つ。つまり、任意の 0 以上の整数 i に対して サイクル写像

$$\text{CH}^i(X^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{\ell} \rightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(X_{\mathbb{F}_q}^2, \mathbb{Q}_{\ell}(i))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)} \quad (\ell \neq p)$$

は全射となる。ここで $\text{CH}^i(X^2)$ は X^2 の余次元 i のサイクルのなす Chow 群である。

注意 5.2. 第 3 節で述べたように K3 曲面 X 自身についての Tate 予想はすでに任意標数で証明されている。また $H_{\text{ét}}^1(X_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^3(X_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}) = 0$ となっているので、定理 5.1 の $i \neq 2$ の場合は K3 曲面 X 自身についての Tate 予想から直ちに従う。

また X が超特異 K3 曲面となっているときは、定理 5.1 は $i = 2$ の場合も K3 曲面 X 自身についての Tate 予想から直ちに従う。

冒頭でも述べたが、定理 5.1 の証明は CM を持つ K3 曲面（標数 0）に持ち上げ、向井や Buskin によって証明された CM を持つ K3 曲面の自己積についての Hodge 予想に帰着させて証明する。もう少し正確に述べると以下の定理に帰着させて証明する。

定理 5.3 ([23, Theorem 2], [6, Theorem 1.1 and Corollary 1.3]). $Z_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の CM を持つ K3 曲面とする. 任意の $\mathbb{Q}$ -Hodge 構造を保つ自己射 $H^2(Z_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(Z_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ に対応する $H^4(Z_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{C}} Z_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(2))$ の元は, 余次元 2 のサイクルの $\mathbb{Q}$ 線形和でかける.

以下でどのように上の定理 5.3 に帰着させるかを説明する. まず定理 5.1 を示すためには $\mathbb{F}_q$ をその有限次拡大で取りかえて示せば十分であることに注意する. また, 簡単のため X は豊富な直線束 $\mathcal{L}$ で自己交点数 $(\mathcal{L})^2$ が p で割れないものを持つと仮定し, さらに p は 5 以上であるとする.

いくつか記号を準備する. 任意の素数 $\ell \neq p$ に対し,

$$V_{\ell} := (\mathrm{ch}_{\ell}(\mathcal{L}))^{\perp} \subset H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}(1))$$

とおき, V_{ℓ} から定まる Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_{\ell} := \mathrm{Cl}(V_{\ell})$ を考える. Clifford 代数の性質により, $V_{\ell} \hookrightarrow \mathrm{Cl}_{\ell}$ という自然な埋め込みがあった. そして V_{ℓ} の元に対し, その元を左からかけるという写像を対応させることで,

$$i_{\ell} : V_{\ell} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_{\ell}}(\mathrm{Cl}_{\ell}), \quad v \mapsto (h \mapsto vh)$$

という写像を得る. Clifford 代数 Cl_{ℓ} には自然に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数構造 $\mathrm{Cl}_{\ell} = \mathrm{Cl}_{\ell}^{+} \oplus \mathrm{Cl}_{\ell}^{-}$ が入っていた. Cl_{ℓ}^{+} は Cl_{ℓ} の部分環となっている. また,

$$\mathrm{GSpin}(V_{\ell}) := \{g \in (\mathrm{Cl}_{\ell}^{+})^{\times} \mid gV_{\ell}g^{-1} = V_{\ell}\}$$

として定義される $\mathbb{Q}_{\ell}$ 上の代数群を考える.

次に $W(\mathbb{F}_q)$ を $\mathbb{F}_q$ を係数に持つ Witt vector のなす環とし, K_0 を $W(\mathbb{F}_q)$ の商体とする.

$$V_{K_0} := (\mathrm{ch}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{L}))^{\perp}(1) \subset H_{\mathrm{cris}}^2(X/K_0)(1).$$

とおき, V_{K_0} から定まる Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_{K_0} := \mathrm{Cl}(V_{K_0})$ を考える. 上と同様に,

$$i_{K_0} : V_{K_0} \hookrightarrow \mathrm{End}_{K_0}(\mathrm{Cl}_{K_0}), \quad v \mapsto (h \mapsto vh)$$

という写像を得る. また, K_0 上の代数群 $\mathrm{GSpin}(V_{K_0})$ を同様に定義する.

第 2 節で簡単に紹介したように, $\mathbb{F}_q$ を拡大して, Kuga-Satake アーベル多様体と呼ばれる $\mathbb{F}_q$ 上のアーベル多様体 $A := A^{\mathrm{KS}}(X)$ が構成できる. A は以下の性質を持っている [21, Theorem 5.17].

1. $\mathbb{Q}_{\ell}$ ベクトル空間としての同型 $\phi_{\ell} : \mathrm{Cl}_{\ell} \cong H_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell})^{\vee}$ があって,

$$i_{\ell} : V_{\ell} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_{\ell}}(H_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell})^{\vee})$$

が $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の作用と可換となる.

2. K_0 ベクトル空間としての同型 $\phi_{K_0}: \text{Cl}_{K_0} \cong H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^\vee$ があって,

$$i_{K_0}: V_{K_0} \hookrightarrow \text{End}_{K_0}(H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^\vee),$$

がフロベニウス準同型と可換となる.

注意 5.4. 正確には $H_{\text{et}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee$ は Clifford 代数から定まる Hodge テンソルと呼ばれる有限個のテンソルを持っており, ϕ_ℓ はそれらの Hodge テンソルが Cl_ℓ の対応するテンソルたちにうつるようになっている. ϕ_{K_0} に対しても同様である. 詳しくは [20, Section 4] を参照されたい.

ϕ_ℓ を用いて $\text{GSpin}(V_\ell) \subset \text{GL}(H_{\text{et}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee)$ とみなす. このときフロベニウス準同型 $\text{Frob}_{\mathbb{F}_q}: H_{\text{et}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee \rightarrow H_{\text{et}}^1(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee$ は $\text{GSpin}(V_\ell)$ に含まれる. また

$$\pi: \text{GSpin}(V_\ell) \rightarrow \text{SO}(V_\ell), \quad g \mapsto (v \mapsto gvg^{-1})$$

という自然な射があるが, $\pi(\text{Frob}_{\mathbb{F}_q})$ が X のフロベニウス準同型になっている. $I_\ell \subset \text{GSpin}(V_\ell)$ を $\text{Frob}_{\mathbb{F}_q}$ の中心化群とする.

上と同じように, ϕ_{K_0} を用いて $\text{GSpin}(V_{K_0}) \subset \text{GL}(H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^\vee)$ とみなす. $I_p \subset \text{Res}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \text{GSpin}(V_{K_0})$ をフロベニウス準同型 $\varphi: H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^\vee \rightarrow H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^\vee$ の中心化群とする.

次に Kisin [16, Section (2.1)] によって導入された $\mathbb{Q}$ 上の代数群 I を定義する. この代数群 I は X^2 の Tate 予想を CM を持つ K3 曲面の自己積の Hodge 予想に帰着させる際の重要な道具となる. I を $(\text{End}_{\mathbb{F}_q}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\times$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数群で I_ℓ ($\ell \neq p$) と I_p に含まれるもののうち最大のものとして定義する. このときアーベル多様体の射についての Tate 予想の群版として以下が成り立つ.

定理 5.5 ([16, Corollary 2.1.7, Corollary 2.3.2]).

1. 任意の素数 $\ell \neq p$ に対して, 自然な射

$$I \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow I_\ell$$

は同型となる.

2. $\mathbb{F}_q$ を有限次拡大で取りかえた後, I の極大トーラスの次元は $\text{GSpin}(V_\ell)$ の極大トーラスの次元と同じとなる.

以下 $\mathbb{F}_q$ を有限次拡大でとりかえて, 定理 5.5 の 2 つ目の主張が成り立つとする.

さて定理 5.1 を証明するには $i = 2$ の場合, つまり

$$\text{CH}^2(X^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow H_{\text{et}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}^2, \mathbb{Q}_\ell(2))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$$

が全射であることを示せばよかった. そのためには

$$\text{End}_{\text{Frob}_{\mathbb{F}_q}}(V_\ell) := \{ f \in \text{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell) \mid f \circ \text{Frob}_{\mathbb{F}_q} = \text{Frob}_{\mathbb{F}_q} \circ f \}$$

の任意の元がサイクルの $\mathbb{Q}_\ell$ 線形和でかけることを示せば良いことがわかる. ここで, Chern 類 $\text{ch}_\ell(\mathcal{L})$ に自明に作用させることで, $\text{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell)$ を $\text{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(H_{\text{ét}}^2(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(1)))$ の部分空間とみなし, さらに $H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}^2, \mathbb{Q}_\ell(2))$ の部分空間とみなしている. 今

$$\pi(I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)) \subset \text{SO}(V_\ell) \cap \text{End}_{\text{Frob}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}(V_\ell)$$

となっているが, 定理 5.5 により, $\mathbb{F}_q$ を有限次拡大で取りかえた後に有限個の極大 $\mathbb{Q}$ トーラス $T_1, \dots, T_r \subset I$ があって, $\text{End}_{\text{Frob}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}(V_\ell)$ が $T_i(\mathbb{Q})$ の像たちで $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間として生成されることがわかる. よって $T_i(\mathbb{Q})$ たちの像がサイクルの $\mathbb{Q}_\ell$ 線形和でかけることを示せば良い.

注意 5.2 により, X は超特異 K3 曲面でないとしてよい. つまり第 3 節で定義された形式 Brauer 群 $\widehat{\text{Br}} := \widehat{\text{Br}}(X)$ の高さが有限 $h < \infty$ としてよい. このとき以下の命題 5.6 によって, 定理 5.1 は定理 5.3 に帰着される.

命題 5.6. I の極大 $\mathbb{Q}$ トーラス $T \subset I$ を固定する. X の高さ h が有限と仮定する. このとき, $\mathbb{F}_q$ を有限次拡大で取りかえた後に, 有限次完全分岐拡大 K/K_0 と $\mathcal{O}_K$ 上射影的な K3 曲面 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ 上の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ と同型 $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{F}_q \cong X$ があって次の性質を満たす.

- 同型 $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{F}_q \cong X$ は $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{F}_q$ を $\mathcal{L}$ と同型な直線束にうつす.
- 任意の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C}$ は CM を持つ K3 曲面となる.
- $V_B := (\text{ch}(\mathcal{L}))^\perp \subset H^2(\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1))$ とおく. このとき $\mathbb{Q}$ 上の代数群の射 $T \rightarrow \text{SO}(V_B)$ で, $\mathbb{Q}_\ell$ に底変換したときに自然な射 $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \text{SO}(V_\ell)$ と同一視できるものがある. さらに $T(\mathbb{Q})$ の元の $\text{SO}(V_B)$ における像は V_B の $\mathbb{Q}$ -Hodge 構造を保つ.

命題 5.6 の証明の概略. X の高さ h が有限なので, F アイソクリスタル V_{K_0} は $-1/h, 0, 1/h$ を slope に持っている [18, Proposition 6.17]. よって

$$V_{K_0} \cong V_{-1/h} \oplus V_0 \oplus V_{1/h}$$

という F アイソクリスタルの分解がある. ここで V_α ($\alpha \in \{-1/h, 0, 1/h\}$) は slope が α の K_0 上の F アイソクリスタルである. $\widehat{\text{Br}}$ から定まるクリスタル $\mathbb{D}(\widehat{\text{Br}})$ [4, Définition 3.3.6] に対して, F アイソクリスタルの同型 $V_{1/h} \cong \mathbb{D}(\widehat{\text{Br}})_{\mathbb{Q}}$ の同型がある [31, Proposition 7]. $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の V_{K_0} への作用はフロベニウス準同型と可換であったので, $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ は $V_{1/h}$ に作用する. よって $\mathbb{Q}_p$ 上の代数群の射 $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \rightarrow (\text{End}_{\mathbb{F}_q}(\widehat{\text{Br}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^\times$ がある.

補題 5.7. $\mathcal{O}_K$ 上の形式群 $\mathcal{G}$ で $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の作用込みで $\widehat{\text{Br}}$ の持ち上げになっているものが存在する.

補題 5.7 の証明. $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の像を含む $(\text{End}_{\mathbb{F}_q}(\widehat{\text{Br}}_{\mathbb{F}_q}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^\times$ の極大 $\mathbb{Q}_p$ トーラス T'_p をとる. 今 $\text{End}_{\mathbb{F}_q}(\widehat{\text{Br}}_{\mathbb{F}_q}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ を中心とする $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元の斜体であ

る [7, Corollary 20.2.14] ので, ある極大可換 $\mathbb{Q}_p$ 代数 $K' \subset \text{End}_{\widehat{\mathbb{F}_q}}(\widehat{\text{Br}_{\mathbb{F}_q}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ で, $K'^{\times} = T'_p$ となるものがある. また $\text{End}_{\widehat{\mathbb{F}_q}}(\widehat{\text{Br}_{\mathbb{F}_q}})$ は $\text{End}_{\mathbb{F}_q}(\widehat{\text{Br}_{\mathbb{F}_q}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の極大整環なので [7, Corollary 20.2.14], $\mathcal{O}_{K'} \subset \text{End}_{\widehat{\mathbb{F}_q}}(\widehat{\text{Br}_{\mathbb{F}_q}})$ となる. 構成より $\mathcal{O}_{K'}$ は $\widehat{\text{Br}_{\mathbb{F}_q}}$ の $\mathbb{F}_q$ 上のフロベニウスと可換なので $\mathcal{O}_{K'} \subset \text{End}_{\mathbb{F}_q}(\widehat{\text{Br}})$ となる. 離散付値環 $\mathcal{O}_{K'}$ に対して, 形式 $\mathcal{O}_{K'}$ 加群の中で最も普遍的なもの $\mathcal{G}^{\text{univ}}$ が存在し, それは無限変数多項式環 $\mathcal{O}_{K'}[(S_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ 上の形式群である [7, (21.4.8)]. これより, 有限次完全分岐拡大 K/K_0 を K' を含むように取れば, $\mathcal{O}_K$ 上の形式 $\mathcal{O}_{K'}$ 加群 $\mathcal{G}$ で, 形式 $\mathcal{O}_{K'}$ 加群として $\widehat{\text{Br}}$ の持ち上げになっているものが存在することがわかる. $\square$

補題 5.7 により, $\mathcal{O}_K$ 上の形式群 $\mathcal{G}$ で, $T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の作用込みで $\widehat{\text{Br}}$ の持ち上げになっているものをとる. 今 $p \geq 5$ を仮定しているので [25, Proposition 5.5] により $\mathcal{O}_K$ 上の K3 曲面 $\mathcal{X}$ で $\mathcal{X}$ が $V_{K_0} \otimes_{K_0} K$ に定める Hodge フィルトレーションと $\mathcal{G}$ が $V_{K_0} \otimes_{K_0} K$ に定めるフィルトレーションが一致しているものがある. X から Kuga-Satake アーベル多様体 $A = A^{\text{KS}}(X)$ をつくったように $\mathcal{X}$ から $\mathcal{O}_K$ 上の Kuga-Satake アーベルスキーム $\mathcal{A}$ がつくられる. $\mathcal{A}$ が $H_{\text{cris}}^1(A/K_0) \otimes_{K_0} K$ に定まる Hodge フィルトレーションを考えると,

$$i_{K_0} \otimes_{K_0} K: V_{K_0} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow \text{End}_K(H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^{\vee} \otimes_{K_0} K)$$

はフィルトレーションを保つ. $V_{K_0} \otimes_{K_0} K$ の Hodge フィルトレーションの Fil^1 の部分は 1 次元となっているが, その基底 e を 1 つとって, 準同型 $(i_{K_0} \otimes_{K_0} K)(e)$ を考える. i_{K_0} の構成より, 準同型 $(i_{K_0} \otimes_{K_0} K)(e)$ の像を考えると, 次元が $\dim A$ となることがわかる. よって $(i_{K_0} \otimes_{K_0} K)(e)$ の像は $H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^{\vee} \otimes_{K_0} K$ の Hodge フィルトレーションの Fil^0 の部分と一致している. これより T の $H_{\text{cris}}^1(A/K_0)^{\vee} \otimes_{K_0} K$ への作用は Hodge フィルトレーションを保つことがわかる. よって $T \subset (\text{End}_{\mathbb{F}_q}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\times}$ は $T \subset (\text{End}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\times}$ に持ち上がることをわかる. このことから $\mathcal{X}$ が定理 5.6 の条件を満たすことが確かめられる. 詳細は [16, Theorem 2.2.3] の証明を参照されたい. $\square$

注意 5.8. X は豊富な直線束 $\mathcal{L}$ で自己交点数 $(\mathcal{L})^2$ が p で割れないものを持つと仮定していた. X がこのような $\mathcal{L}$ を持たない場合は, 代わりにもっと次元が大きいアーベル多様体 A を考えることで上の証明が機能するようにできる. (この手法は Madapusi Pera の K3 曲面に対する Tate 予想の証明にて導入されたものである.) また, 上に与えた命題 5.6 の証明で p が 5 以上であるという仮定は [25, Proposition 5.5] に必要であるが, $p = 2, 3$ のときは先にアーベル多様体 A を持ち上げることで証明する. 詳細は [11] を参照にされたい.

注意 5.9. 定理 5.6 では Kisin による, Hodge 型志村多様体の整正準モデルにおいて, 正標数の点はある CM な点 (special point) の良い還元と同種になっている [16, Theorem 2.2.3] という結果の証明のアイディアを用いている. Kisin による, K3 曲面とは関係ない一般的な設定での証明では, まず極大トーラス T で保たれるように $H_{\text{cris}}^1(A/K_0) \otimes_{K_0} K$ のフィルトレーションを適当に定めてから, それに Hodge フィルトレーションが一致す

るように $\mathcal{O}_K$ 上の Kuga-Satake アーベルスキーム $\mathcal{A}$ を Hodge テンソル込みで構成している. Kuga-Satake アーベルスキーム $\mathcal{A}$ を構成する際に A を同種で取りかえる必要がある.

上の定理 5.6 の証明では, 補題 5.7 のように, 一旦形式 Brauer 群 $\widehat{\mathrm{Br}}$ に移り, 高さが有限の形式群の自己準同型環の性質 [7, Corollary 20.2.14] と普遍形式 $\mathcal{O}_{K'}$ 加群の具体的な記述 [7, (21.4.8)] を使い, まず形式群 $\widehat{\mathrm{Br}}$ を T の作用込みで持ち上げ, 次にその持ち上げが定めるフィルトレーションを考えることで, 同種で取りかえる部分を乗り越えている.

謝辞

2017 年度 RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」にて講演の機会を与えてくださった角皆 宏先生, 山崎 隆雄先生, 水澤 靖先生に感謝を申し上げます.

参考文献

- [1] Andreatta, F., Goren, E. Z., Howard, B., Madapusi Pera, K., *Faltings heights of abelian varieties with complex multiplication*, Ann. of Math. (2) 187 (2018), no. 2, 391–531.
- [2] Artin, M., Mazur, B., *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 1, 87–131.
- [3] Bayer-Fluckiger, E., *Embeddings of maximal tori in orthogonal groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 64 (2014), no. 1, 113–125.
- [4] Berthelot, P., Breen, L., Messing, W., *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, Lecture Notes in Mathematics, 930.
- [5] Bhatt, B., Morrow, M., Scholze, P., *Integral p -adic Hodge theory*, preprint, 2016, arXiv: 1602.03148.
- [6] Buskin, N., *Every rational Hodge isometry between two K3 surfaces is algebraic*, J. Reine Angew. Math. (2017) (published online), <https://doi.org/10.1515/crelle-2017-0027>.
- [7] Hazewinkel, M., *Formal groups and applications*, Corrected reprint of the 1978 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2012.
- [8] Huybrechts, D., *Lectures on K3 Surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 158 (2016).
- [9] Ito, K., *Unconditional construction of K3 surfaces over finite fields with given L -function in large characteristic*, Manuscripta Math. (2018) (published online), <https://doi.org/10.1007/s00229-018-1066-4>.
- [10] Ito, K., *On the supersingular reduction of K3 surfaces with complex multiplication*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2018) (published online), <https://doi.org/10.1093/imrn/rny210>.
- [11] Ito, K., Ito, T., Koshikawa, T., *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture*, preprint, 2018. arXiv 1809.09604.
- [12] Jang, J., *Some remarks on non-symplectic automorphisms of K3 surfaces over a field of odd characteristic*, East Asian Math. J. 30 (2014), no. 3, 321–326.
- [13] Jang, J., *The representations of the automorphism groups and the Frobenius invariants of K3 surfaces*, Michigan Math. J. 65 (2016), no. 1, 147–163.

- [14] Kim, W., Madapusi Pera, K., *2-adic integral canonical models*, Forum Math. Sigma 4 (2016), e28, 34 pp.
- [15] Kisin, M., *Integral models for Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 967–1012.
- [16] Kisin, M., *Mod p points on Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), no. 3, 819–914.
- [17] Lang, S., *Elliptic functions*, With an appendix by J. Tate. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 112. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [18] Liedtke, C., *Lectures on supersingular K3 surfaces and the crystalline Torelli theorem*, K3 surfaces and their moduli, 171–235, Progr. Math., 315, Birkhäuser/Springer, 2016.
- [19] Liedtke, C., Matsumoto, Y., *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. 154 (2018), no. 1, 1–35.
- [20] Madapusi Pera, K., *Integral canonical models for spin Shimura varieties*, Compos. Math. 152 (2016), no. 4, 769–824.
- [21] Madapusi Pera, K., *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, Invent. Math. 201 (2015), no. 2, 625–668.
- [22] Matsumoto, Y., *Good reduction criterion for K3 surfaces*, Math. Z. 279 (2015), no. 1-2, 241–266.
- [23] Mukai, S., *Vector bundles on a K3 surface*, Proceedings of the ICM, Beijing 2002, vol. 2, 495–502.
- [24] Nikulin, V., *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Math USSR-Izv. 14 (1979), no. 1, 103–167 (1980).
- [25] Nygaard, N., Ogus, A., *Tate’s conjecture for K3 surfaces of finite height*, Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 461–507.
- [26] Ogus, A., *Supersingular K3 crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. II, pp. 3–86, Astérisque, 64, Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [27] Rizov, J., *Kuga-Satake abelian varieties of K3 surfaces in mixed characteristic*, J. Reine Angew. Math. 648 (2010), 13–67.
- [28] Rudakov, A., Shafarevich, I., *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristic*, (Russian) Current problems in mathematics, Vol. 18, pp. 115–207, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981.
- [29] Shimada, I., *On normal K3 surfaces*, Michigan Math. J. 55 (2007), no. 2, 395–416.
- [30] Shimada, I., *Transcendental lattices and supersingular reduction lattice of a singular K3 surface*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 2, 909–949.
- [31] Taelman, L., *K3 surfaces over finite fields with given L -function*, Algebra Number Theory 10 (2016), no. 5, 1133–1146.
- [32] Zarhin, Yu., *Hodge groups of K3 surfaces*, J. Reine Angew. Math. 341 (1983), 193–220.