

表 實

- 39) J. H. H. Perk and C. L. Schultz, preprint.
- 40) R. J. Baxter, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E. G. D. Cohen ed. (North-Holland, 1980) p. 109.
- 41) F. Y. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312.
- 42) L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, Phys. Rev. **B4** (1971) 3989.
- 43) R. B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 106.
- 44) J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. **64** (1943) 178.
- 45) R. J. Baxter, J. Phys. **A13** (1980) L61.
- 46) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1982) 35.
- 47) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1981) 37.
- 48) 例えば, J. D. Weeks, in *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems*, T. Riste ed. (Plenum, 1980) p. 293.
- 49) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **79** (1981) 489.
- 50) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, preprint.
- 51) M. T. Jaekel and J. M. Maillard, J. Phys. **A15** (1982) 1309.
- 52) K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.

アインシュタイン方程式のベックルント変換

筑波大物理 表 實

相対論的な重力場の方程式 (Einstein 方程式) は次式で与えられる

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}.$$

ここで $R^{\mu\nu}$, R は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) の 2 階微分までを含む曲率テンソル。 $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルであり, 又 $\kappa (= \frac{8\pi}{c^4} G = 2.07 \times 10^{-48} \text{ s/g cm})$ はアインシュタイン定数と呼ばれる。この式を孤立した物体がその外部に作る重力場に適用したときに得られる解 (外部解) を厳密に求める方法の一つについて報告する。

外部解を求めるためには, いろいろな対称性 (例; 球対称解 = Schwarzschild の解) が要請されてきたが, ここではいままで使われた要請をその特別な場合として含むところの定常か

つ軸対称性を要求する。このとき計量は

$$ds^2 = f^{-1} \{ e^{2r} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \} - f (cdt - \omega d\varphi)^2,$$

となる。ここで f, ω, r は ρ と z の関数である。アインシュタイン方程式から f, ω の連立非線型方程式と r についての線型方程式が得られる。従って厳密解を求める問題は f, ω の連立方程式を解くことに帰着し、その方程式は次の非線型方程式 (Ernst 方程式) にまとめられる。

$$\partial_1 \partial_2 E = -\frac{1}{4\rho} (\partial_1 E + \partial_2 E) + \frac{2}{E+E} * \partial_1 E \partial_2 E,$$

但し $x_1 = \rho - iz, x_2 = \rho + iz$ 。ここで E は Ernst potential と呼ばれる複素関数であり次式で定義される

$$E = f + i\psi,$$

$$\text{但し } \partial_1 \omega = \frac{i\rho}{f^2} \partial_1 \psi, \quad \partial_2 \omega = -\frac{i\rho}{f^2} \partial_2 \psi.$$

アインシュタイン方程式は、その方程式を不変に保ついろいろな変換を持っていることが知られている。そのうち次の2つの変換が重要である。

1. Ehlers 変換

$$f' = \frac{\beta \psi}{(1-r\psi)^2 + r^2 f^2}, \quad \psi' = \frac{\beta \psi - \beta r (f^2 + \psi^2)}{(1-r\psi)^2 + r^2 f^2} + i\alpha,$$

但し α, β, r は任意の実定数。この変換は E を使って

$$E' = \frac{\beta E}{1+i r E} + i\alpha,$$

と書ける。

2. Killing ベクトルの回転による変換

$$f' = af \left\{ (1+b\omega)^2 - b^2 \frac{\rho^2}{f^2} \right\}, \quad \omega' = \frac{1}{a} \frac{\omega(1+b\omega) - b \frac{\rho^2}{f^2}}{(1+b\omega)^2 - b^2 \frac{\rho^2}{f^2}} + c,$$

但し a, b, c は実定数。

表 實

後者の変換は E の変換としては表わせないことに注意する必要がある。しかしながら、これらの変換は Ernst 方程式のベックルント変換という観点から、統一的に議論されること、更にこれらを特別なケースとして含む一般化された変換が存在することが示される。

Ernst 方程式のベックルント変換は次の式で与えられるものと仮定する。

$$\partial_1 E' = a_1 \partial_1 E + a_2,$$

$$\partial_2 E' = b_1 \partial_2 E + b_2.$$

ここで $a_i, b_i (i=1, 2)$ は $E, E^*, E', E'^*, x_1, x_2$ の関数であり、その具体的な形は次の2つの要請から決められる。

1. E' は積分可能条件をみたす ($\partial_1 \partial_2 E' = \partial_2 \partial_1 E'$)。
2. E' は Ernst 方程式の解である。

この要請のとき、 E は Ernst 方程式の解であることは仮定されている。この要請から、4種類のベックルント変換が存在することがわかる。

i) B.T.I

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f} \partial_1 E, \quad \partial_2 E' = \frac{f'}{f} \partial_2 E.$$

積分して $E' = cE + d$ 、但し c, d は積分実定数。

ii) B.T.II

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f} \frac{2 + \theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_1}}{2} \partial_1 E, \quad \partial_2 E' = \frac{f'}{f} \frac{2 + \theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_1}}{2} \partial_2 E,$$

但し $\theta_1 = ff'$ 。次の式で定義される補助関数 (pseudo potential) ϕ_1

$$\partial_1 \phi_1 = \frac{\phi_1 - 1}{2f} (\phi_1 \partial_1 E + \partial_1 E^*), \quad \partial_2 \phi_1 = \frac{\phi_1 - 1}{2f} (\phi_1 \partial_2 E + \partial_2 E^*),$$

をつかって、上の変換は

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f} \phi_1 \partial_1 E, \quad \partial_2 E' = \frac{f'}{f} \phi_1 \partial_2 E$$

とかける。これは積分できて

$$\phi_1 = \frac{1 - i\gamma E^*}{1 + i\gamma E}, \quad E' = \frac{\beta E}{1 + i\gamma E} + i\alpha.$$

この結果、B.T.II は Ehlers の変換を行うことがわかる。

iii) B.T. III

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f} \frac{2\theta_2 + 1 + \sqrt{4\theta_2 + 1}}{2\theta_2} \partial_1 E - \frac{f'}{4\rho} \frac{1 + \sqrt{4\theta_2 + 1}}{\theta_2},$$

$$\partial_2 E' = \frac{f'}{f} \frac{2\theta_2 + 1 - \sqrt{4\theta_2 + 1}}{2\theta_2} \partial_2 E - \frac{f'}{4\rho} \frac{1 - \sqrt{4\theta_2 + 1}}{\theta_2},$$

但し $\theta_2 = \frac{1}{\rho^2} f f'$. 補助関数 ϕ_2

$$\partial_1 \phi_2 = -\frac{\phi_2 - 1}{2f} (\phi_2 \partial_1 E + \partial_1 E^*) + \frac{1}{4\rho} (\phi_2 - 1)(\phi_2 + 1),$$

$$\partial_2 \phi_2 = -\frac{\phi_2 - 1}{2f} (\partial_2 E + \phi_2 \partial_2 E^*) + \frac{1}{4\rho} (\phi_2 - 1)(\phi_2 + 1),$$

を使って

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f} \phi_2 \partial_1 E + \frac{f'}{2\rho} (1 - \phi_2), \quad \partial_2 E' = \frac{f'}{f} \frac{1}{\phi_2} \partial_2 E + \frac{f'}{2\rho} \frac{\phi_2 - 1}{\phi_2},$$

と表わせる。この変換は E の関数としては積分できないが, f, ω の関数として

$$\phi_2 = \frac{1 + b(\omega + \frac{\rho}{f})}{1 + b(\omega - \frac{\rho}{f})}$$

$$f' = af \left\{ (1 + b\omega)^2 - b^2 \frac{\rho^2}{f^2} \right\}, \quad \omega' = \frac{1}{a} \frac{\omega(1 + b\omega) - b \frac{\rho^2}{f^2}}{(1 + b\omega)^2 - b^2 \frac{\rho^2}{f^2}} + c$$

となる。すなわち B.T. III は Killing ベクトルの回転によって起る変換を行う。

iv) B.T. IV

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{2f\theta_3} \left\{ (1 - \zeta^2)(\theta_3^2 + 1) + 2\zeta^2\theta_3 + (1 - \zeta^2)(\theta_3 - 1) \sqrt{\theta_3^2 + 2 \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \theta_3 + 1} \right\} \partial_1 E$$

$$+ \frac{f'(1 - \zeta^2)}{4\rho\theta_3} \left\{ \theta_3 - 1 + \sqrt{\theta_3^2 + 2 \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \theta_3 + 1} \right\},$$

$$\partial_2 E' = \frac{f'}{2f\theta_3\zeta^2} \left\{ (1 - \zeta^2)(\theta_3^2 + 1) + 2\theta_3 + (1 - \zeta^2)(\theta_3 + 1) \sqrt{\theta_3^2 + 2 \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \theta_3 + 1} \right\} \partial_2 E$$

$$- \frac{f'(1 - \zeta^2)}{4\rho\theta_3\zeta^2} \left\{ \theta_3 + 1 + \sqrt{\theta_3^2 + 2 \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \theta_3 + 1} \right\},$$

表 實

但し $\theta_3 = \frac{i}{\rho} f f'$, $\zeta^2 = \frac{i \ell - x_2}{i \ell + x_1}$ 。任意定数 ℓ は Ernst 方程式が持つ z 軸の原点のとり方の任意性に対応する。この変換に対しては 2 種類の補助関数 ϕ_3 と $\tilde{\phi}_3$ を導入することが可能で、各々次の方程式で定義される。

$$\begin{cases} \partial_1 \phi_3 = -\frac{1}{2f} \{ \phi_3 (1 + \zeta \phi_3) \partial_1 E + (\zeta + \phi_3) \partial_1 E^* \}, \\ \partial_2 \phi_3 = \frac{1}{2f\zeta} \{ \phi_3 (\zeta + \phi_3) \partial_2 E - (1 + \zeta \phi_3) \partial_2 E^* \}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 \tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2f} \{ \tilde{\phi}_3 (1 + \zeta \tilde{\phi}_3) \partial_1 E - (\tilde{\phi}_3 + \zeta) \partial_1 E^* \} - \frac{\zeta}{4\rho} (\tilde{\phi}_3 - 1)(\tilde{\phi}_3 + 1), \\ \partial_2 \tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2f\zeta} \{ -(1 + \zeta \tilde{\phi}_3) \partial_1 E + \tilde{\phi}_3 (\tilde{\phi}_3 + \zeta) \partial_1 E^* \} - \frac{1}{4\rho\zeta} (\tilde{\phi}_3 - 1)(\tilde{\phi}_3 + 1). \end{cases}$$

ϕ_3 , $\tilde{\phi}_3$ を使って B.T.Ⅳ は

$$\begin{cases} \partial_1 E' = -\frac{f'}{f} \frac{\phi_3 (1 + \zeta \phi_3)}{\phi_3 + \zeta} \partial_1 E + \frac{f'}{2\rho} \frac{\phi_3 (1 - \zeta^2)}{\phi_3 + \zeta}, \\ \partial_2 E' = -\frac{f'}{f} \frac{\phi_3 (\zeta + \phi_3)}{1 + \zeta \phi_3} \partial_2 E - \frac{f'}{2\rho} \frac{\phi_3 (1 - \zeta^2)}{\zeta (1 + \zeta \phi_3)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 E' = -\frac{f'}{f} \frac{\tilde{\phi}_3 (1 + \zeta \tilde{\phi}_3)}{\tilde{\phi}_3 + \zeta} \partial_1 E + \frac{f'}{2\rho} (1 + \zeta \tilde{\phi}_3), \\ \partial_2 E' = -\frac{f'}{f} \frac{1 + \zeta \tilde{\phi}_3}{\tilde{\phi}_3 (\tilde{\phi}_3 + \zeta)} \partial_2 E + \frac{f'}{2\rho \tilde{\phi}_3 \zeta} (1 + \zeta \tilde{\phi}_3), \end{cases}$$

と表わされる。上式を $1/\ell$ の巾で展開して、その第一項のみを残したとき、 ϕ_3 を使った表式は B.T.Ⅱ に、 $\tilde{\phi}_3$ を使った表式は B.T.Ⅲ に一致する。

以上のことから B.T.Ⅳ は、すでに知られていた Ehlers 変換と Killing ベクトルの回転による変換をその特別なケースとして含む、より一般化された変換であることがわかる。更にこのベックルント変換から逆散乱法の Lax pair が導かれることも知られている。ソリトンの物理で有効であった方法が、アインシュタインの方程式の厳密解を求める際にも有効な方法であることが示されたわけである。