

# 長方形基礎の加振による半無限粘弾性 地盤の振動特性(その2)

小堀 鐸二・南井良一郎・日下部 馨

## VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF SEMI-INFINITE VISCO-ELASTIC MEDIUM TO SURFACE EXCITATIONS ON A RECTANGULAR AREA (PART 2)

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Kaoru KUSAKABE*

### Synopsis

In this paper, we investigate the vibrational behaviors of a visco-elastic ground subjected to vertical and horizontal harmonic excitations on the rectangular surface area, by making use of the similar treatment in the previous paper. The numerical results of the amplitude and phase characteristics of the displacement in the parallel and perpendicular directions to each excitation are shown graphically along two principal axes of the rectangular area on the surface and along the depth below the center of the rectangular surface area. We discuss the effect of frequency of exciting force, width of the base, distance from the center of the base and damping coefficient in the ground upon the vibrational characteristics.

### 1. ま え が き

前報<sup>1)</sup>において、半無限 Voigt 型の粘弾性地盤上の長方形基礎に垂直、水平および回転加振を与えた場合、基礎に加わる力を入力、地盤内各点のある方向の変位を出力とする複素伝達関数の解析的表現を求め、数値解としては垂直および水平加振を基礎に与えた場合の基礎中心直下の深さ方向の振動特性と位相特性との分布性状を調べた。しかし、複素伝達関数の鉛直下方分布と地表面での分布とでは波動の伝播形態に異なる機構があると考えられる。他方、複素伝達関数の結果は地盤上の基礎版を起振器で加振するときの地盤振動の計測計画ならびに計測結果の理論的裏付けとなり得る。さらに、表面での伝達特性は隣接する基礎あるいは構造物相互間の干渉を考慮した連成振動の問題にも適用できる。したがって、複素伝達関数の鉛直下方分布よりも地表面での分布の方が応用面が広い。

本報では、垂直および水平加振に対する複素伝達関数を振巾特性および位相特性の形で把え、地表面上の長方形基礎主軸方向に沿った分布性状を鉛直下方の分布性状と比較しながら調べた。

2では長方形基礎に対する複素伝達関数の積分表示を誘導し、また、特殊な場合として基礎巾を零に収束させた場合の点加振に対する複素伝達関数の積分表示を誘導する。1904年、H. Lamb<sup>2)</sup>は水平な境界面をもつ半無限弾性体の表面に harmonic に振動する鉛直集中荷重を与えたときに生じる弾性波動の生成伝播に関する研究を行なった。最近では、田治見宏博士<sup>3,4)</sup>により、弾性地盤上の点加振に対する伝達関数が一部求められているが、この場合、地盤は減衰のない完全弾性体とし、加振方向の伝達関数のみが求められている。しかし、一般に地表面を加振した場合、三次元的な方向に変形が起るので、三方向の成分の伝達関数が求まる。したがって、本報では加振方向に直角な変位成分の伝達関数をも含め、また、Voigt 型の粘性減衰をもつ地盤を対象として点加振に対する複素伝達関数を求める。3では2で求めた複素伝達関数の

積分表示の数値計算法を概略的に述べ、計算精度は静的な载荷における厳正解と数値解とを比較して検討する。4では複素伝達関数の積分表示の計算結果をグラフで示し、複素伝達関数を振動数、基礎巾、基礎中心からの距離と方向および地盤の媒質のもつ dissipative な減衰作用等に注目しながら解析する。

## 2. 複素伝達関数の積分表示

### 2.1 基礎方程式

ここでは、前報<sup>1)</sup>と同様に地盤を粘弾性体の最も基本的な Voigt solid とし、等質等方な半無限粘弾性体上に、Fig. 1 に示すような長方形基礎が載る場合、それに垂直および水平方向の外乱が作用するときの、粘弾性地盤内の振動分布の問題を扱う。したがって、粘性減衰はひずみ速度に比例するので、直交座標系  $x, y, z$  に対する等質等方な 3 次元 Voigt solid の運動方程式は  $\{x, y, z\}$  方向の各々の変位成分を  $\{u, v, w\}$  とすると次式で示される。

$$\{(\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t}\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} A + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \{u, v, w\} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u, v, w\} \quad \dots\dots(2.1)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \text{dilatation, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \text{Laplace 演算子} \\ \lambda, \mu; &\text{Lamé の常数, } \lambda', \mu'; \text{Lamé の常数 } \lambda, \mu \text{ に対する粘性常数, } \rho; \text{密度} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots(2.2)$$

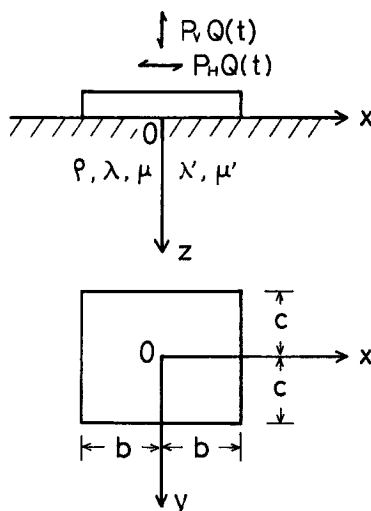


Fig. 1 Co-ordinate system and excitation pattern.

### 2.2 境界条件

半無限粘弾性体の表面に剛な長方形基礎が載る場合、厳密解を得るには変形に対して境界条件<sup>5,6)</sup>を与えるのが妥当であるが、この場合、混合境界値問題となり、解析的表現を解くには非常に複雑となる。しかるに、応力に対する境界条件の場合には、解析的表現を簡単に表わすことができ、また、数値解は電子計算機を用いて数値計算を行なうことにより容易に得ることができる。したがって、本論文では、境界条件を応力で合やす手法を用いて、基礎下の応力分布は time factor と分離型であるとし、応力の振巾分布は基礎に垂直または水平加振を与えたとき、基礎と接触している面で加振方向の応力を一様分布、他の応力を零とする。すなわち、式で表わすと次のようになる。

(a) 垂直加振の場合（加振方向； $z$  方向）

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c) \\ -q_{0V}Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c), \end{cases} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

(b) 水平加振の場合（加振方向； $x$  方向）

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c) \\ -q_{0H}Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c), \end{cases} \quad \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

ここに、 $q_{0i}$  [ $l=V, H$ ] は正の常数で、各場合における加振力の振巾は次式で表わされる。

$$P_V = 4bcq_{0V}, \quad P_H = 4bcq_{0H} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

そして、 $Q(t)$  は time factor を表わす。**2.3 長方形基礎の加振による複素伝達関数の積分表示**

この場合の解析的表現は前報<sup>1)</sup>において求められているので、その結果を引用すると、各加振型に対応する地盤内の任意の点  $(x, y, z)$  における力—変位複素伝達関数の無次元表示は次式となる。

i) 加力が動的な場合

(a) 垂直加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-a_0 \alpha_2 z} \} \\ &\cdot \cos \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \\ &\dots\dots\dots(2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-a_0 \alpha_2 z} \} \\ &\cdot \sin \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \sin(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \\ &\dots\dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \alpha_1}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 z} - 2\xi^2 e^{-a_0 \alpha_2 z} \} \\ &\cdot \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots(2.8) \end{aligned}$$

(b) 水平加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\xi \alpha_2}{F(\xi)} \{ -2\xi^2 e^{-a_0 \alpha_1 z} + (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_2 z} \} \cos^2 \theta \right. \\ &\left. + \frac{\xi}{\alpha_2} e^{-a_0 \alpha_2 z} \sin^2 \theta \right] \\ &\cdot \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \cos(X a_0 \xi \cos \theta) \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots(2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu &= \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\xi \alpha_2}{F(\xi)} \{ 2\xi^2 e^{-a_0 \alpha_1 z} - (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_2 z} \} + \frac{\xi}{\alpha_2} e^{-a_0 \alpha_2 z} \right] \\ &\cdot \cos \theta \sin \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \sin(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \\ &\dots\dots\dots(2.10) \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu = \frac{a_0 g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{2\alpha_1 \alpha_2 e^{-a_0 \alpha_1 Z} - (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_2 Z}\} \\ \cdot \cos \theta \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \sin(X a_0 \xi \cos \theta) \cos(Y a_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \dots (2.11)$$

ここに,  $F(\xi) = (2\xi^2 - g_2)^2 - 4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2$ ; Rayleigh function ..... (2.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\xi^2 - g_2} \\ a_0 = \frac{\omega}{c_2} b; \text{円振動数 } \omega \text{ に関する無次元量} \\ n = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}; \text{剪断波と疎密波の伝播速度比} \\ X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{b}; \text{座標 } x, y, z \text{ の無次元量} \\ g_1 = \frac{1}{1 + i\omega \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}} = \frac{1}{1 + i a_0 \eta_1}, \quad g_2 = \frac{1}{1 + i\omega \frac{\mu'}{\mu}} = \frac{1}{1 + i a_0 \eta} \\ \eta_1 = \frac{c_2}{b} \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} = \eta n^2 \left(2 + \frac{\lambda'}{\mu'}\right); \text{疎密波に対応する粘性係数に関する} \\ \hspace{10em} \text{無次元量} \\ \eta = \frac{c_2}{b} \frac{\mu'}{\mu}; \text{剪断波に対応する粘性係数に関する無次元量} \\ c_2 = \sqrt{\mu/\rho}; \text{減衰がない場合の弾性体内を伝播する剪断波の速度,} \\ i = \sqrt{-1}; \text{虚数単位} \\ \mathcal{F}_I\{u, v, w, Q(t)\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \{u, v, w, Q(t)\} e^{-i\omega t} dt \\ \hspace{10em}; \{u, v, w, Q(t)\} \text{ の時間 } t \text{ に関するフーリエ変換} \end{array} \right. \dots (2.13)$$

ii) 加力が静的な場合

(a) 垂直加力

$$\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \\ \cdot \cos \theta \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \sin(X \sigma \cos \theta) \cos(Y \sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \dots (2.14)$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \\ \cdot \sin \theta \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \cos(X \sigma \cos \theta) \sin(Y \sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \dots (2.15)$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \\ \cdot \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \cos(X \sigma \cos \theta) \cos(Y \sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \dots (2.16)$$

(b) 水平加力

$$\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1 - (1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \cos^2 \theta + e^{-Z\sigma} \sin^2 \theta \right\} \times$$

$$\cdot \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \cos(X\sigma \cos \theta) \cos(Y\sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\frac{\mathcal{F}_i\{v\}}{P_H \mathcal{F}_i\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1-2n^2+(1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \\ \cdot \cos \theta \sin \theta \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \sin(X\sigma \cos \theta) \sin(Y\sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\frac{\mathcal{F}_i\{w\}}{P_H \mathcal{F}_i\{Q(t)\}} b\mu|_{a_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{n^2+(1-n^2)Z\sigma}{2(1-n^2)} e^{-Z\sigma} \\ \cdot \cos \theta \frac{\sin(\sigma \cos \theta)}{\sigma \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} \sigma \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} \sigma \sin \theta} \sin(X\sigma \cos \theta) \cos(Y\sigma \sin \theta) d\theta d\sigma \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

#### 2.4 点加振による複素伝達関数の積分表示

点加振に対する複素伝達関数は有限面積をもつ長方形基礎の場合の複素伝達関数 (2.6) ~ (2.11) 式において、基礎半巾  $b$  および  $c$  を零にもって行けば求まる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} a_0 X &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\omega}{c_2} b \cdot \frac{x}{b} = \frac{\omega x}{c_2}, & \lim_{b \rightarrow 0} a_0 Y &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\omega}{c_2} b \cdot \frac{y}{b} = \frac{\omega y}{c_2} \\ \lim_{b \rightarrow 0} a_0 Z &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\omega}{c_2} b \cdot \frac{z}{b} = \frac{\omega z}{c_2}, & \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{a_0} &= \lim_{b \rightarrow 0} b \cdot \frac{c_2}{\omega b} = \frac{c_2}{\omega} \\ \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 0}} \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} &= \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 0}} \frac{\sin(b \zeta \cos \theta)}{b \zeta \cos \theta} \frac{\sin(c \zeta \sin \theta)}{c \zeta \sin \theta} = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

の関係式を (2.6) 式の両辺を  $a_0$  で除した式に代入すると次式となる。

$$\frac{\mathcal{F}_i\{u\}}{P_H \mathcal{F}_i\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \\ \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \alpha \cos \theta\right) \cos\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \sin \alpha \sin \theta\right) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

ここに、

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad \alpha = \tan^{-1} y/x \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \alpha \cos \theta\right) \cos\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \sin \alpha \sin \theta\right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \alpha \cos \theta + \frac{\omega r}{c_2} \xi \sin \alpha \sin \theta\right) \right. \\ & \quad \left. + \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \alpha \cos \theta - \frac{\omega r}{c_2} \xi \sin \alpha \sin \theta\right) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin\left\{ \frac{\omega r}{c_2} \xi \cos(\theta - \alpha) \right\} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin\left\{ \frac{\omega r}{c_2} \xi \cos(\theta + \alpha) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\pi/2 - \alpha} \cos(\tau + \alpha) \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \tau\right) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\pi/2 + \alpha} \cos(\tau - \alpha) \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \tau\right) d\tau \\ & \quad (\text{第1項を } \tau = \theta - \alpha, \text{ 第2項を } \tau = \theta + \alpha \text{ と変数変換する}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\tau - \alpha) \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \tau\right) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\tau + \alpha) \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \tau\right) d\tau \\ &= \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos \tau \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \tau\right) d\tau \quad \dots\dots\dots (2.23) \end{aligned}$$

しかるに, Bessel 関数の積分表示<sup>8)</sup>は

$$J_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (-1)^{(n-1)/2} \int_0^{\pi/2} \cos n\eta \sin(z \cos \eta) d\eta & (n : \text{odd}) \\ \frac{2}{\pi} (-1)^{n/2} \int_0^{\pi/2} \cos n\eta \cos(z \cos \eta) d\eta & (n : \text{even}) \end{cases}$$

と表わされ,  $n=1$  とすると結局 (2.23) 式は

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \cos \alpha \cos \theta\right) \cos\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi \sin \alpha \sin \theta\right) d\theta = \frac{\pi}{2} J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) \cos \alpha$$

となる。この関係を (2.21) 式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \int_0^\infty \cos \alpha \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi$$

同様にして, (2.6)~(2.11) 式に対応する点加振による複素伝達関数の積分表示は次式となる。

(a) 垂直加振

$$\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \cos \alpha \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \cdot J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \sin \alpha \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \cdot J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.25)$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \alpha_1}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\xi^2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

(b) 水平加振

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = & \frac{g_2}{4\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\xi \alpha_2}{F(\xi)} \{ -2\xi^2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} + (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \right. \\ & + \left. \frac{\xi}{\alpha_2} e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \right] \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi - \frac{g_2}{4\pi} \cos 2\alpha \int_0^\infty \left[ \frac{\xi \alpha_2}{F(\xi)} \{ -2\xi^2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} + (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \right. \\ & - \left. \frac{\xi}{\alpha_2} e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \right] \cdot J_2\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_I\{v\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = & \frac{g_2}{4\pi} \sin 2\alpha \int_0^\infty \left[ \frac{\xi \alpha_2}{F(\xi)} \{ 2\xi^2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \right. \\ & + \left. \frac{\xi}{\alpha_2} e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \right] \cdot J_2\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.28) \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_H \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \cos \alpha \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \cdot J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha, & y = r \sin \alpha, & \alpha = \tan^{-1} y/x \\ J_\nu(\xi); \nu \text{ 次の第 1 種円柱関数 (Bessel 関数)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

ここで, 垂直加振の場合の (2.24) および (2.25) 式を円筒座標系で表わすと, 半径方向の変位は

$$\frac{\mathcal{F}_I\{\sqrt{u^2 + v^2}\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = \frac{g_2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{F(\xi)} \{ (2\xi^2 - g_2) e^{-(\omega z/c_2)\alpha_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-(\omega z/c_2)\alpha_2} \} \cdot J_1\left(\frac{\omega r}{c_2} \xi\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

また, 接線方向の変位は

$$\frac{\mathcal{F}_I\{\tan^{-1} v/u - \tan^{-1} y/x\}}{P_V \mathcal{F}_I\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

となる。

### 3. 数値積分の方法

前節で求めた長方形基礎の加振による複素伝達関数の積分表示 (2.6)~(2.11) 式はそれ以上解析的表現を求めることができないので、数値積分を行なう必要がある。しかるに、完全弾性体（無減衰； $\lambda'=\mu'=0$ ）の場合には  $\xi \geq 0$  において、 $\xi$  の実軸上に2個の分岐点（ $\xi=n$  および  $\xi=1$ ）と Rayleigh Pole  $\xi=\xi_0$ （ $F(\xi_0)=0$ ）が存在する。したがって、前報<sup>1)</sup>ではこれらの特異点を避けるために複素平面に拡張して、 $\xi$  が  $[0, 2]$  の積分区間では、変数変換  $\xi=1+e^{i\varphi}$  を導入した。しかるに、この方法は (2.6)~(2.11) 式の被積分関数に三角関数および双曲線関数が含まれ、それらの引数（argument）が  $X$  および  $Y$  の関数となっているため、 $X$  または  $Y$  が大きくなると双曲線関数の値が非常に大きくなり、結局、被積分関数の絶対値が大きくなり、かつ、 $\xi$  の少しの変化に対して、符号に正負の繰返しが起るため数値計算の誤差（絶対値の大きいもの同志の加減算による誤差）が大きくなる。また、 $X$  または  $Y$  が変わると  $\theta$  に関する積分を行なわねばならないが、 $\xi=1+e^{i\varphi}$  なる変数変換を導入すると、さらに、 $a_0$  が変わるとにも、 $\theta$  に関する積分を行なう必要が生じ、演算時間が非常に増加する。したがって、本報では  $\xi$  の実軸上を積分路にとる。この場合、(2.6)~(2.11) 式で特異点における積分の評価としては、分岐点（ $\xi=n$  および  $\xi=1$ ）まわりの円弧に沿う積分は  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき零に収束し、 $\xi$  に関する積分値には影響をおよぼさないで、Rayleigh Pole  $\xi=\xi_0$  における留数だけを考慮すればよい。Cauchy の主値については、Rayleigh function を含む項に対しては、Rayleigh Pole  $\xi=\xi_0$  の近傍で被積分関数は発散するが、 $\xi=\xi_0$  の極をはさむ Cauchy の主値を求める数値積分は、“被積分関数を偶関数と奇関数部分に分け、極を原点に移し、原点に関して対称な領域でその奇関数部分を消去し、残る偶関数部分について計算する”という“I.M. Longman の方法<sup>2)</sup>”を用いることにより解決できる。また、 $\xi/\sqrt{\xi^2-1}$  を含む項に対しては、分岐点  $\xi=1$  のところで被積分関数は発散するが、 $\xi=1$  をはさむ Cauchy の主値は、 $(\xi/\sqrt{\xi^2-1})e^{-a_0\sqrt{\xi^2-1}}$  および  $\xi/\sqrt{\xi^2-1}$  が不定積分

$$\int \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} e^{-a_0\sqrt{\xi^2-1}} d\xi = -\frac{1}{a_0\xi} e^{-a_0\sqrt{\xi^2-1}}, \quad \int \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi = \sqrt{\xi^2-1}$$

をもつため、部分積分を施すことにより解決できる。粘弾性体（ $\eta \neq 0$ ）ではもはやそれらの特異点は第4象限に移行し、実軸上には存在しないので、被積分関数は実軸上の  $\xi$  に対していたるところで連続となり、実軸上に沿っての数値積分を行なうことができる。

ここで用いた二重積分の方法は、まず、一定の  $\{X, Y, c/b\}$  の値に対して、(2.6)~(2.11) 式で  $0$  から  $\pi/2$  までの積分変数  $\theta$  に関する積分を  $a_0\xi$  の適当な間隔に対して行ない、この積分値  $\theta(a_0\xi)$  の表をもとにして、 $a_0\xi$  の中間の値は stirling の補間公式で補間しながら、 $0$  から  $\infty$  までの積分変数  $\xi$  に関する積分を行なう。また、 $\xi/\sqrt{\xi^2-1}$  を含む項において部分積分を行なうとき、 $\theta(a_0\xi)$  の  $\xi$  に関する微分が必要となる。これに対しては、さきに求めた  $\theta(a_0\xi)$  の表をもとにして、stirling の数値微分公式を適用する。

ここで、 $\theta$  に関する積分値  $\theta(a_0\xi)$  は  $a_0\xi$  の増加と共に振動しながら零に収束するが、 $X$  または  $Y$  が大きくなると  $\theta(a_0\xi)$  の振動する  $a_0\xi$  の間隔が短くなるため、それを考慮して、 $\theta(a_0\xi)$  の table をつくときの  $a_0\xi$  の間隔  $\Delta a_0\xi$  は

$$\Delta a_0\xi = \frac{\pi}{24 \times \{1, X, Y\}_{\max}}$$

とする。ここで、 $\{1, X, Y\}_{\max}$  は  $1, X$  および  $Y$  の値のうちで最大の値を表わす。 $\theta$  に関する数値積分は simpson 3/8 則を用い、積分間隔を順次細かくして行き、前回の積分値との相対誤差が  $0.005\%$  以下になるまで積分間隔を分割した。積分変数に関する無限積分は無限大まで積分することは不可能であるから、有限の範囲  $\xi_{\text{cut}}$  で積分区間を打ち切り、有限積分として扱った。ここでは、 $X$  または  $Y$  が大きくなるほど無限積分が  $\xi$  に対して早く収束すること、および、演算時間が長くなることを考慮して

$$a_0\xi_{\text{cut}} = \text{整数部分} \{16 \times (1 + \log_{10}\{1, X, Y\}_{\max})\} \times \frac{\pi}{\{1, X, Y\}_{\max}}$$

とし、 $a_0\xi$  を  $\pi/\{1, X, Y\}_{\max}$  の区間ごとに区切って simpson 3/8 則の積分公式を適用し、それぞれの区間で相対誤差が0.05%以下になるまで積分間隔を細かくした。

静的に加力を与えたときの複素伝達関数の積分表示 (2.16) および (2.17) 式は  $Y=Z=0$  または  $X=Z=0$  に対して初等関数で表わすことができる。すなわち

$$\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V\mathcal{F}_I\{Q(t)\}}b\mu = \begin{cases} = \frac{1}{8(1-n^2)\pi} \left\{ \log \left( \frac{1+\sin\theta_1}{1-\sin\theta_1} \right) + \frac{1-X}{2c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1} \cdot \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_1}{1+\sin\theta_1} \right) + \frac{1}{c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_2}{1-\cos\theta_2} \right) \right\} & [X \leq 1] \\ = \frac{1}{8(1-n^2)\pi} \left\{ \frac{1-X}{2c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_3}{1-\cos\theta_3} \cdot \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_3}{1+\sin\theta_3} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_2}{1-\cos\theta_2} \right) \right\} & [X > 1] \end{cases} \quad \dots\dots (3.1)$$

$$\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H\mathcal{F}_I\{Q(t)\}}b\mu = \begin{cases} = \frac{1}{8(1-n^2)\pi} \left\{ \log \left( \frac{1+\sin\theta_1}{1-\sin\theta_1} \right) + \frac{1-X}{2c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1} \cdot \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2} \right) \right. \\ \quad + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_1}{1+\sin\theta_1} \right) + \frac{1}{c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_2}{1-\cos\theta_2} \right) \\ \quad + \frac{1-2n^2}{8(1-n^2)\pi} \left\{ -2\sin\theta_1 + \log \left( \frac{1+\sin\theta_1}{1-\sin\theta_1} \right) + \frac{1-X}{c/b} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) - (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_1}{1+\sin\theta_1} \right) + \frac{2}{c/b} \cos\theta_2 \right\} & [X \leq 1] \\ = \frac{1}{8(1-n^2)\pi} \left\{ \frac{1-X}{2c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_3}{1-\cos\theta_3} \cdot \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_3}{1+\sin\theta_3} \right) \right. \\ \quad + \frac{1}{c/b} \log \left( \frac{1+\cos\theta_2}{1-\cos\theta_2} \right) + \frac{1-2n^2}{8(1-n^2)\pi} \left\{ \frac{1-X}{2c/b} (\cos\theta_3 - \cos\theta_2) + (\sin\theta_3 - \sin\theta_2) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin\theta_2}{1-\sin\theta_2} \cdot \frac{1-\sin\theta_3}{1+\sin\theta_3} \right) + \frac{2}{c/b} \cos\theta_2 \right\} & [X > 1] \end{cases} \quad \dots\dots (3.2)$$

$$\text{ここに, } \theta_1 = \tan^{-1} \frac{1-X}{c/b}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{1+X}{c/b}, \quad \theta_3 = \tan^{-1} \frac{X-1}{c/b} \quad \dots\dots (3.3)$$

したがって、(3.1) および (3.2) 式の厳正解と、前に述べた数値積分の方法を (2.16) および (2.17) 式に適用して求めた数値解とを比較すると Table 1 となり、相対誤差は  $X \leq 10$  では0.2%以内に、 $10 < X \leq 30$ では1.0%以内になっている。

Table 1

| $X/b$ | Eq. (2.16) ; $\frac{\mathcal{F}_I\{w\}}{P_V\mathcal{F}_I\{Q(t)\}}b\mu$ |                |                | Eq. (2.17) ; $\frac{\mathcal{F}_I\{u\}}{P_H\mathcal{F}_I\{Q(t)\}}b\mu$ |                |                |
|-------|------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|
|       | exact sol.                                                             | numerical sol. | relative error | exact sol.                                                             | numerical sol. | relative error |
| 0     | 0.21041                                                                | 0.21031        | 0.05%          | 0.24548                                                                | 0.24537        | 0.05%          |
| 2     | 0.061954                                                               | 0.061994       | -0.06%         | 0.080597                                                               | 0.080636       | -0.05%         |
| 5     | 0.024030                                                               | 0.024016       | 0.06%          | 0.0031930                                                              | 0.031915       | 0.05%          |
| 10    | 0.011956                                                               | 0.011980       | -0.20%         | 0.015929                                                               | 0.015952       | -0.14%         |
| 20    | 0.0059708                                                              | 0.0060064      | -0.60%         | 0.0079594                                                              | 0.0079951      | -0.45%         |
| 30    | 0.0039796                                                              | 0.0039410      | 0.97%          | 0.0053057                                                              | 0.0052620      | 0.73%          |

点加振に対する複素伝達関数の積分表示 (2.24)~(2.29) 式に対して, Bessel 関数が零に収束するのは (2.6)~(2.11) 式の  $\theta(a_0\xi)$  よりもゆるやかであるから, 同じ  $\xi_{\text{cut}}$  の値で無限積分を打ち切ると, 誤差が大きくなる。しかるに, Bessel 関数自身の不定積分  $\int J_0(z)dz$  は既知であるから, Bessel 関数の  $\xi_{\text{cut}}$  から  $\infty$  までの定積分は容易に求まり, また, (2.24)~(2.29) 式の被積分関数で Bessel 関数を除いた部分の関数は  $\xi$  を無限大にするとは有限な値に収束するから, その値と Bessel 関数の  $\xi_{\text{cut}}$  から  $\infty$  までの定積分との積により (2.24)~(2.29) 式の  $\xi_{\text{cut}}$  から  $\infty$  までの  $\xi$  に関する積分を近似的に評価することができる。したがって, (2.24)~(2.29) 式に対して,  $\xi$  の値は

$$\frac{\omega r}{c_2} \xi_{\text{cut}} = 50\pi$$

とし,  $\xi \leq \xi_{\text{cut}}$  においては (2.6)~(2.11) 式で用いた数値積分法を,  $\xi > \xi_{\text{cut}}$  においては上で述べた近似計算法により求めた。

#### 4. 解析結果および考察

粘弾性体上の長方形基礎に垂直または水平加振を与えた場合の複素伝達関数の積分表示 (2.6)~(2.11) 式, (2.14)~(2.19) 式および (2.24)~(2.29) 式に対して前節で述べた方法により数値計算を行なった。それらの結果の一部を Figs. 3~9 に変位応答の振巾特性  ${}_L A_j$  と位相特性  ${}_L \theta_j$  の形で示す。ここで,

$${}_L A_j = \left| \frac{\mathcal{F}_L\{j\}}{P_L \mathcal{F}_L\{Q(t)\}} \cdot b\mu \right|, \quad {}_L \theta_j = -\text{Arg} \left( \frac{\mathcal{F}_L\{j\}}{P_L \mathcal{F}_L\{Q(t)\}} \cdot b\mu \right)$$

すなわち,  $A$  および  $\theta$  はそれぞれ無次元変位の振巾と調和加振力に対する位相遅れを表わし, 左側の添字  $L$  は加振型の種類 ( $V$ ; 垂直加振,  $H$ ; 水平加振), 右側の添字  $j$  は変位成分の方向 ( $u$ ;  $x$  方向の変位成分,  $v$ ;  $y$  方向の変位成分,  $w$ ;  $z$  方向の変位成分) を表わす。たとえば,  ${}_V A_w$  は垂直加振による  $z$  方向の変位の振巾特性を表わす。

Fig. 3 は地盤のポアソン比  $\nu=1/4$ , 長方形基礎底面辺長比  $c/b=1$  (正方形基礎) において, (a) 垂直加力および (b) 水平加力を静的に加えた場合の  $x$  軸,  $y$  軸および  $z$  軸上での変位を基礎底面中心からの距離  $s/b$  [ $s=x, y, z$ ] を横軸にとって示したものである。Fig. 3 (a) の垂直加力に対しては, 基礎の形状は正方形であるので, 基礎中心から等距離の  $x$  軸上の変位と  $y$  軸上の変位とは常に等しい。したがって,  $x$  を  $y, u$  を  $v$  と読み替えることができる。この図からは, 加力方向の変位成分  ${}_V A_w$  は  $s/b \leq 1$  では  $x$  軸

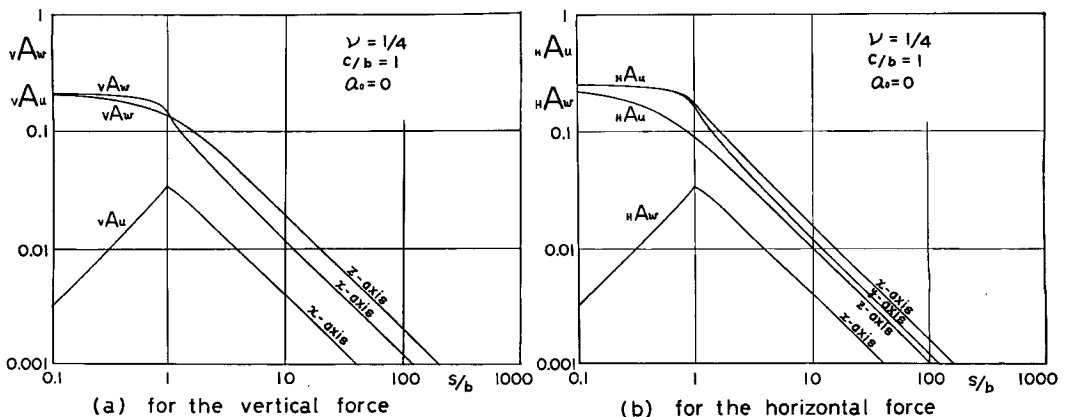


Fig. 3 Static displacement.

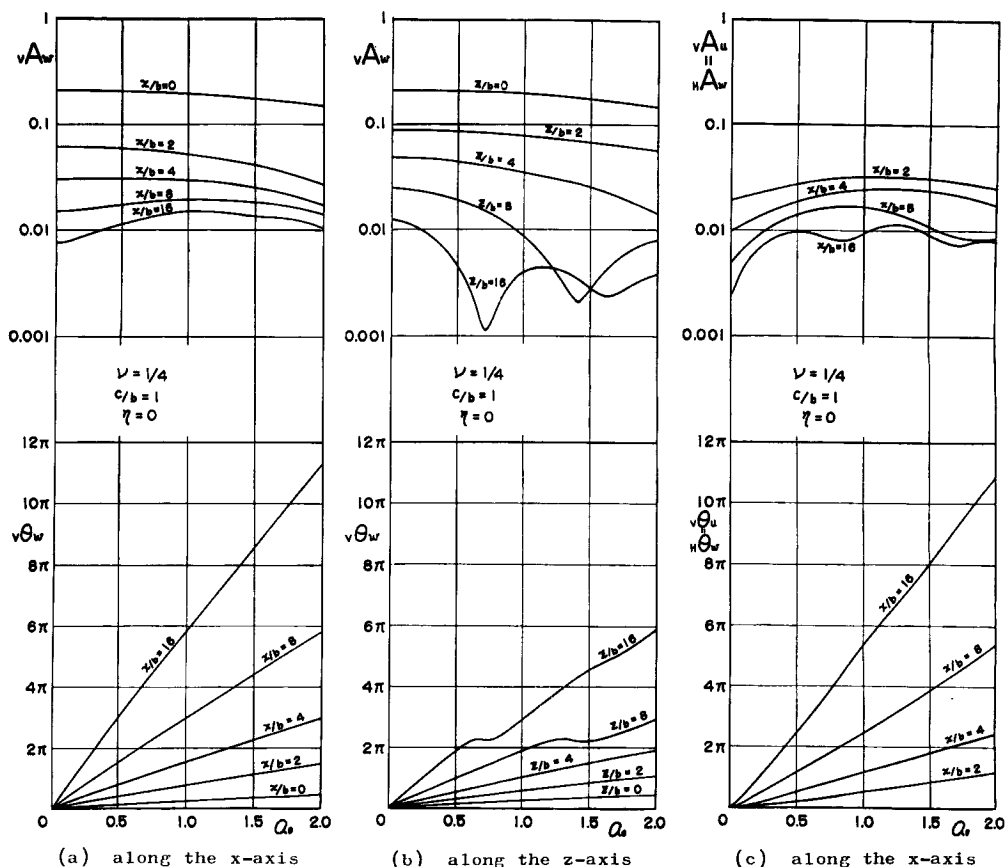


Fig. 4 Amplitude and phase characteristics for vertical excitation.

上における変位の方が基礎中心から等距離の  $z$  軸上における変位よりも大きい、基礎から少し離れると ( $s/b > 1$ ),  $z$  軸上における変位の方が  $x$  軸上における変位よりも大きくなる。一方、 $z$  軸上では加力方向の変位だけしか起らないが、 $x$  軸上 ( $y$  軸上) では加力方向に直角な  $x$  方向 ( $y$  方向) の変位  $\nu A_u$  ( $\nu A_v$ ) が起る。 $\nu A_u$  ( $\nu A_v$ ) は基礎下では  $x/b$  ( $y/b$ ) と共に増加しているが、基礎下より外に出ると  $x/b$  ( $y/b$ ) の増加に伴ない減少しており、その大きさは、 $x$  軸上 ( $y$  軸上) における加力方向の変位  $\nu A_w$  の約  $1/3$  である。また、ほぼ  $s/b > 2$  [ $s=x, y, z$ ] のところでは  $\nu A_w$  および  $\nu A_u$  と  $s/b$  とは両対数目盛で  $-45^\circ$  の勾配をもっている、基礎からある程度離れると変位  $\nu A_w$  および  $\nu A_u$  は基礎中心からの距離  $s/b$  [ $s=x, y, z$ ] に逆比例して減少していくことがわかる。Fig. 3 (b) の水平加力に対しては、加力方向の変位成分  $H A_u$  は基礎中心から等距離の点では加力方向に平行な  $x$  軸上で一番大きく、 $y$  軸、 $z$  軸の順に  $H A_u$  は小さくなっている。また、加力方向に直角な変位成分は  $x$  軸上で  $z$  方向の変位  $H A_w$  が起り、基礎下より離れた  $x$  軸上で  $H A_w$  の値は  $H A_u$  の約  $1/4$  となっている。そして、この場合も基礎中心からある程度離れると  $H A_u$ ,  $H A_w$  は  $s/b$  [ $s=x, y, z$ ] に逆比例して減少している。

Fig. 4 は完全弾性体  $\eta=0$  で、弾性体のポアソン比  $\nu=1/4$  および基礎底面辺長比  $c/b=1$  (正方形基礎) に対して垂直加振を与えた場合、(a)  $x$  軸上の  $\nu A_w$  と  $\nu \theta_w$ , (b)  $z$  軸上の  $\nu A_w$  と  $\nu \theta_w$  および (c)  $x$  軸上の  $\nu A_u$  と  $\nu \theta_u$  を縦軸に、振動数パラメータ  $a_0 (= \omega b/c_2)$  を横軸にとって、基礎中心からの距離  $s/b$  [ $s=$

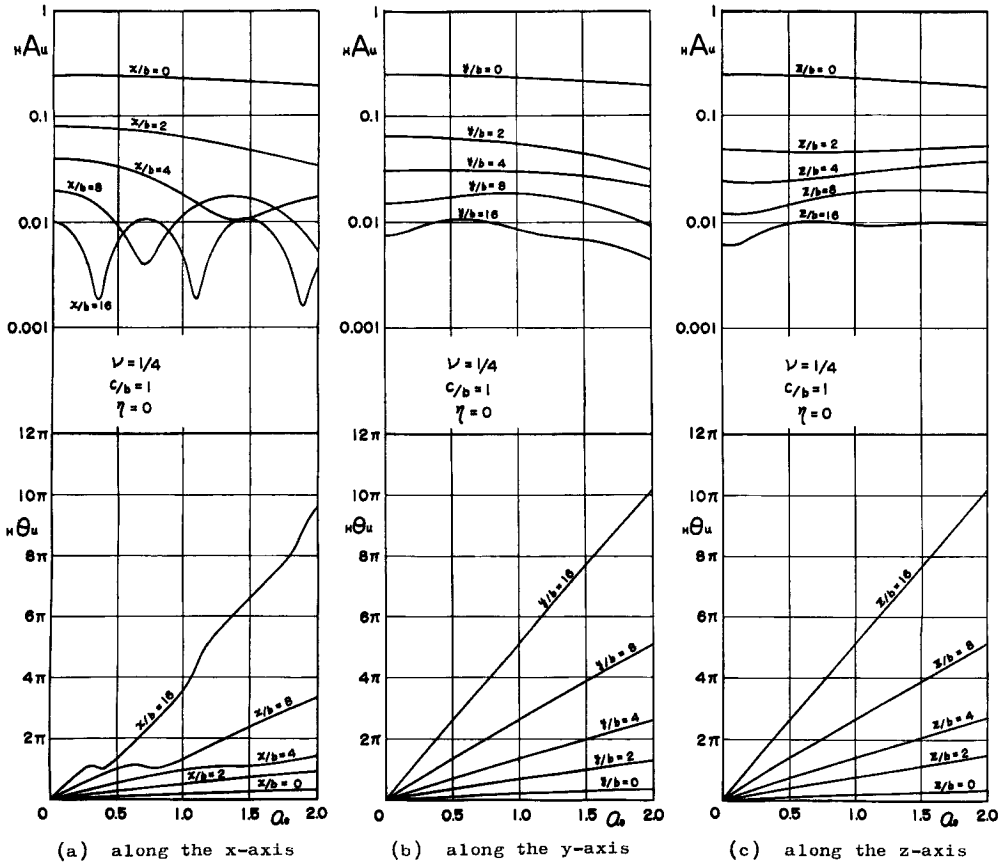


Fig. 5 Amplitude and phase characteristics for horizontal excitation.

$x, z$  をパラメータとして示した図である。これらの図より、加振力  $P_T$  および基礎巾  $2b$  を一定とすると、変位振巾  ${}_v A_w$  および  ${}_v A_u$  は振動数パラメータ  $a_0$  の関数となり、基礎中心からの距離  $s/b [s=x, z]$  が大きくなるほど、 $a_0$  の影響をよく受ける。そして、 $a_0$  による影響は  $x$  軸上での  ${}_v A_w$  よりも  $z$  軸上での  ${}_v A_u$  の方がよく受ける。 $x$  軸上での  ${}_v A_u$  は、 $x/b$  の大きいところでは、 $a_0$  が0から少し増加しても著しい変化を示し、 $x/b=16$  の場合、 $a_0=0$  (static) のときは  ${}_v A_w$  と  ${}_v A_u$  との比は約  $1/3$  であったのが、 $a_0$  の値によってはほぼ同程度の大きさとなり得る場合がある。次に  $x$  軸上での位相遅れ  ${}_v \theta_w$  および  ${}_v \theta_u$  は  $x/b$  を固定すると  $a_0$  に対してほぼ直線的に増加しているが、 $z$  軸上での  ${}_v \theta_w$  は  $x/b$  を固定しても  $a_0$  に対しては比例していない。

ここで、円振動数  $\omega$ 、wave number  $\kappa$ 、伝播速度  $c$  の応力波を考えると、この応力波の変位  $u$  は

$$u = A_1(s)e^{i(\omega t - \kappa s)} = A_1(s)e^{i(\omega t - (\omega/c)s)} \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

ここに、 $A_1(s)$  は点  $s$  における変位振巾を表わす。一方原点に対して点  $s$  における応力波の位相遅れを  $\theta$  とすると、変位  $u$  は

$$u = A_2(s)e^{-i(\omega t - \theta)} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

と表わされるから、位相だけを考えると、 $\omega, c, s$  および  $\theta$  の間には次の関係がある。

$$\theta = \frac{\omega}{c} s \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

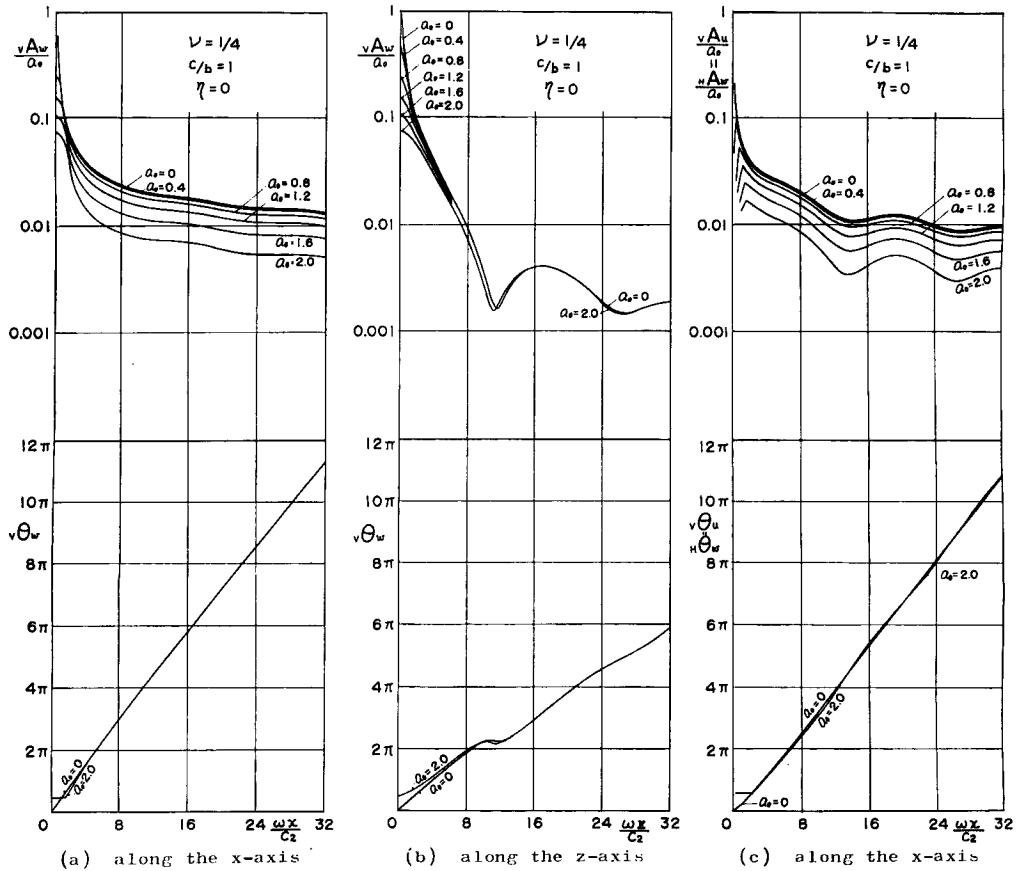


Fig. 6 Amplitude and phase characteristics for vertical excitation.

(4.3) 式を  $a_0$  で微分すると,

$$\frac{d\theta}{da_0} = \frac{d}{da_0} \left( \frac{\omega s}{c} \right) = s \frac{c_2}{b} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{c} \right)$$

$c_2 s/b$  を一定とし,  $d\theta/da_0$  が  $a_0$  に無関係に一定値をとるならば,  $d(\omega/c)/d\omega$  は一定である。すなわち速度  $c$  は  $\omega$  に無関係となる。

したがって,  $x$  軸上では振動数に無関係に一定速度で応力波は進んでいくが,  $z$  軸上での応力波の速度  $c$  は振動数によって変わることを示している。Fig. 5 は Fig. 4 に対応する図で,  $\eta=0$ ,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=1$  に対して水平加振を与えた場合の (a)  $x$  軸上, (b)  $y$  軸上および (c)  $z$  軸上での  $H A_u$  および  $H \theta_u$  を縦軸に,  $a_0$  を横軸にとって,  $s/b [s=x, y, z]$  をパラメータとして示した図である。ここでは加振方向と平行な  $x$  軸上での  $H A_u$  は  $x/b$  を固定すると  $a_0$  により著しく変化し,  $x/b=16$  の場合,  $a_0=0$  の  $H A_u$  と比べて  $1/6$  ぐらいに減少することがある。また,  $H \theta_u$  は  $a_0$  と直線関係にないから  $a_0$  によって応力波の伝播速度が異なることを示している。 $y$  軸および  $z$  軸上では  $H A_u$  は  $a_0$  による著しい変化はなく,  $s/b=16 [s=y, z]$  の場合,  $a_0=0$  のときと比べて  $1/2 \sim 2$  倍ぐらいの変動である。 $H \theta_u$  は  $a_0$  とほぼ直線的な比例関係にあり,  $a_0$  によって速度  $c$  が変わらない。次に  $x$  軸上での  $H A_u$  と  $H A_w$  ( $x$  軸上における  $v A_u$  と  $v A_w$  とは相反定理より等しくなるので,  $H A_w$  は Fig. 4 (c) を参照) とを比較すると, 図に示されたパラメータ内では, 基礎からの距離が大きく ( $x/b > 4$ ) になると  $a_0$  によっては  $H A_w$  の方が  $H A_u$  よりも大きくなる場合が

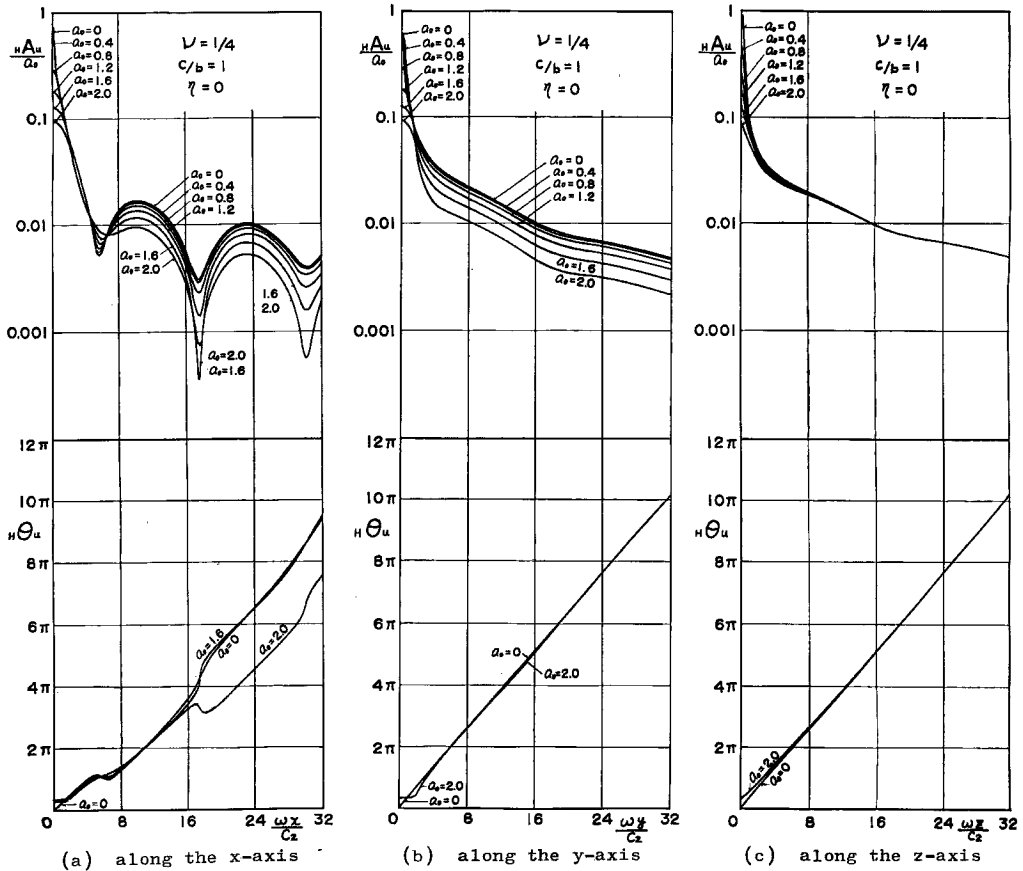


Fig. 7 Amplitude and phase characteristics for horizontal excitation.

ある。

Fig. 6 は  $\eta=0, \nu=1/4, c/b=1$  に対して、垂直加振を与えた場合 (a)  $x$  軸上での  $rA_w/a_0$  と  $r\theta_w$ , (b)  $z$  軸上での  $rA_w/a_0$  と  $r\theta_w$  および (c)  $x$  軸上での  $rA_u/a_0$  と  $r\theta_u$  を縦軸に、 $\omega s/c_2 (=a_0 \cdot s/b)$  [ $s=x, z$ ] を横軸にとり、 $a_0$  をパラメータとして示した図である。この図における  $a_0=\omega b/c_2=0$  は横軸  $\omega s/c_2$  との関係より  $\omega/c_2 \neq 0$  で  $b=0$  を意味する。すなわち、点加振 [(2.24)~(2.29) 式] の場合に相当する。そして、縦軸は、

$$\frac{rA_j}{a_0} = \left| \frac{\mathcal{F}_j\{j\}}{P_L \mathcal{F}_j\{Q(t)\}} \frac{c_2 \mu}{\omega} \right| \quad (L=H, V, j=u, v, w)$$

となり、変位振巾を  $c_2 \mu / \omega$  で無次元化したことに対応する。これらの図より、加振力、振動数および基礎中心からの距離を一定にすると、 $x$  軸上の  $rA_w/a_0$  および  $rA_u/a_0$  は基礎半巾  $b$  により異なるが、 $z$  軸上の  $rA_w/a_0$  は  $\omega z/c_2$  がある程度大きくなるとほぼ  $b$  に無関係となる。

$rA_w/a_0$  と  $b$  との関係は次のように説明される。すなわち、Fig. 2 において、 $AX$  と  $BX$  との差は

$$(x+b)-(x-b)=2b$$

となり、 $x$  軸上では点  $X$  が原点  $0$  からいくら遠く離れても基礎巾  $2b$  による差は一定であり、基礎底面で同時に発生した応力波が  $X$  点に達するには発生位置により時間遅れが生じる。したがって、 $X$  点において位相差の異なる応力波を加え合うために基礎巾  $2b$  の影響を受ける。しかし、点  $Z$  においては、 $OZ$  と  $BZ$

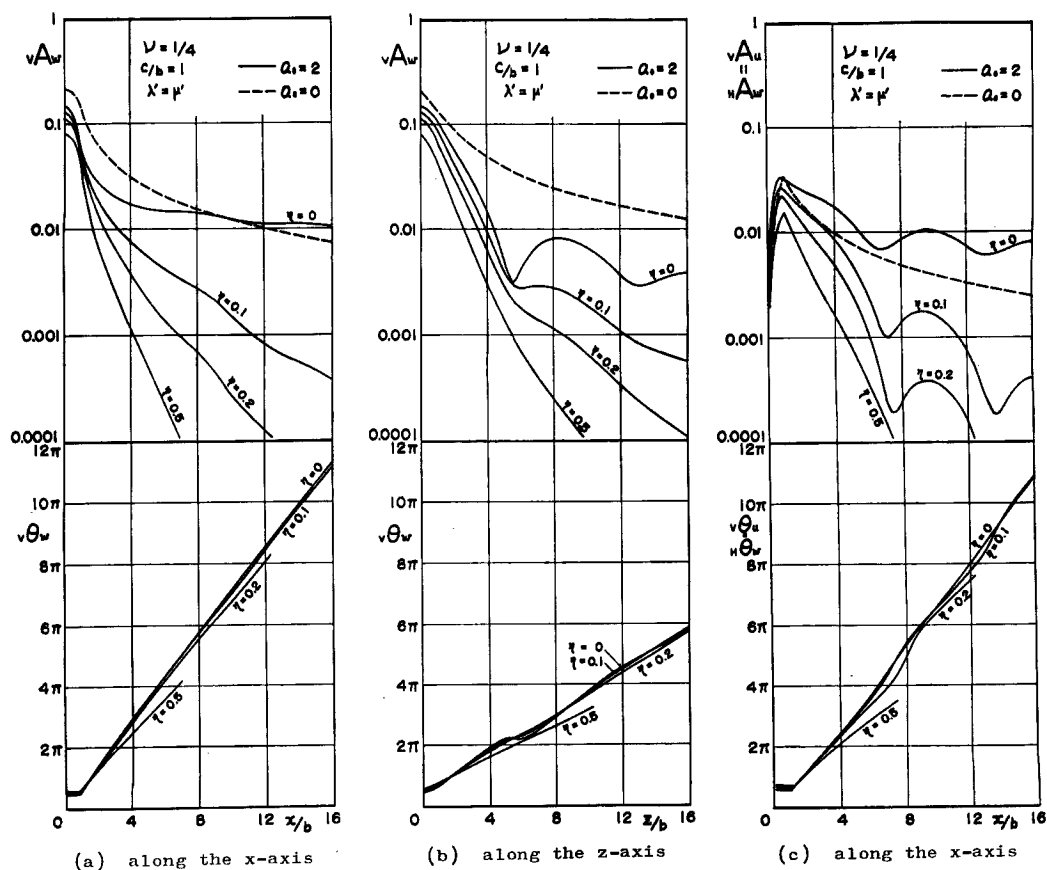


Fig. 8 Amplitude and phase characteristics for vertical excitation.

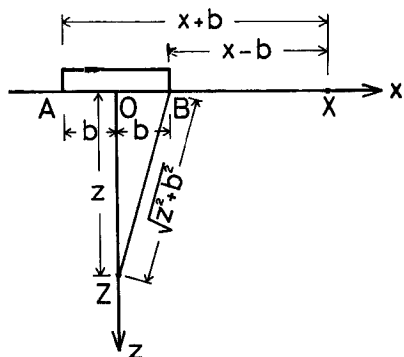


Fig. 2

との差は

$$\sqrt{z^2 + b^2} - z = \frac{b^2}{\sqrt{z^2 + b^2} + z} \approx \frac{b^2}{2z} \quad (z \gg b)$$

となり、 $z$  が大きくなると  $OZ$  と  $BZ$  の差は  $z$  に逆比例して小さくなり零に収束するので、基礎底面

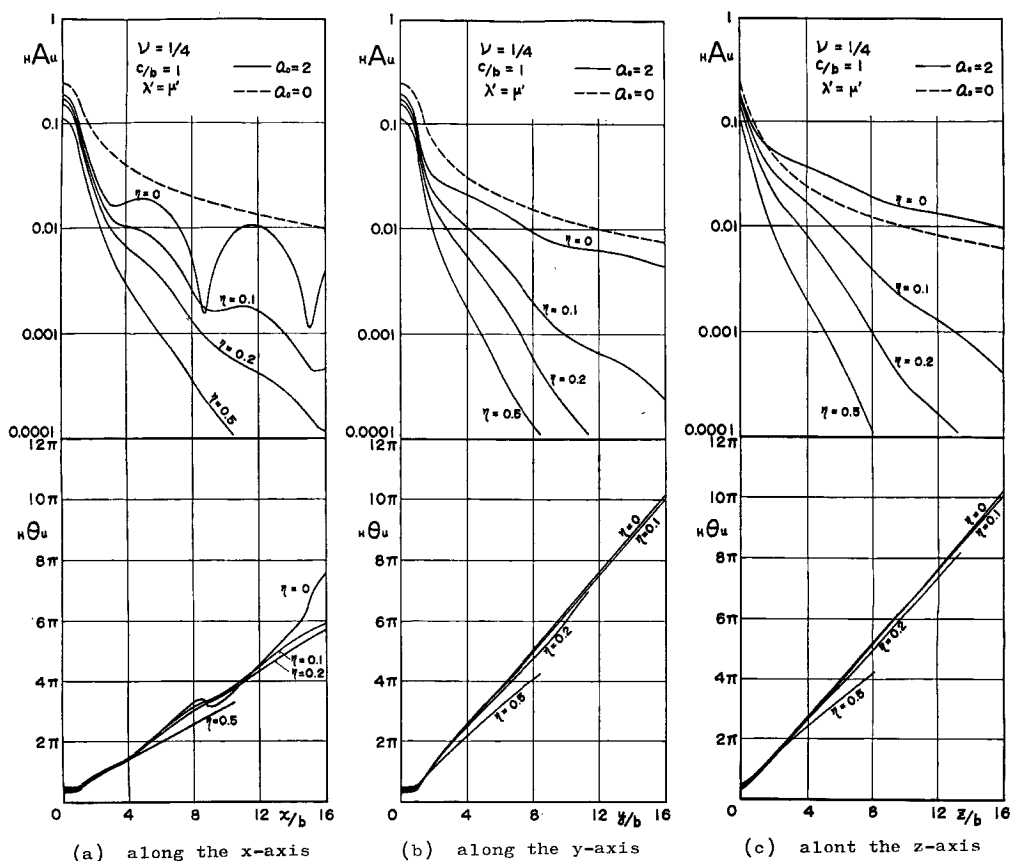


Fig. 9 Amplitude and phase characteristics for horizontal excitation.

で同時に発生した応力波が点  $Z$  に達するとき殆んど相位差が起らないため、基礎巾  $2b$  による影響を受け難くなる。

加振力、振動数および基礎巾を一定にすると  $x$  軸上の  $rA_w$  は  $x$  に関しほぼ単調に減少していくが、 $z$  軸上の  $rA_w$  および  $x$  軸上の  $rA_u$  は  $z$  または  $x$  に関して極大および極小ができる。ここで、剪断波の波長を  $l_2$  とすると、横軸は  $\omega s/c_2 = 2\pi s/l_2$  となり、基礎中心からの距離を剪断波の波長で無次元化したことに相当する。 $z$  軸上の  $rA_w$  および  $x$  軸上の  $rA_u$  の  $z$  または  $x$  に関する極値の間隔は  $a_0$  にほぼ無関係に横軸だけで定まっているから、極値の間隔は基礎巾には無関係で波長に關係していることがわかる。次に位相遅れについては、 $z$  軸上の  $r\theta_w$  および  $r\theta_u$  は  $\omega s/c_2$  に関してほぼ直線的に比例しているが、 $z$  軸上の  $r\theta_w$  は  $\omega x/c_2$  に関して比例していない。(4.3) 式  $\theta = \omega s/c$  において、 $\lambda = \mu$  ( $\nu = 1/4$ ) としたときの 1 種類の応力波が弾性体内を伝播する速度と位相遅れとの関係は、 $S$  波に対しては  $\theta_s = \omega s/c_2$ 、Rayleigh wave に対しては  $\theta_R = \omega s/c_R = 1.08766 \omega s/c_2$  となる。 $x$  軸上の  $r\theta_w$  の勾配は  $r\theta_w/(\omega x/c_2) = 1.09$ 、 $x$  軸上の  $r\theta_u$  の勾配は  $r\theta_u/(\omega x/c_2) = 1.09$  であるから  $x$  軸上を伝播する応力波の上下方向の成分および進行方向の成分の速度は共に Rayleigh wave の速度といえる。Fig. 7 は Fig. 6 に対応するもので、 $\eta = 0$ 、 $\nu = 1/4$ 、 $c/b = 1$  における水平加振を与えたときの (a)  $x$  軸上、(b)  $y$  軸上および (c)  $z$  軸上の  $H A_u/a_0$  および  $H \theta_u$  を、 $\omega s/c_2$  を横軸、 $a_0$  をパラメータとして示した図である。これらの図でも、 $P_H$ 、 $\omega$  および  $s$  を一定にすると、 $z$  軸上での  $H A_u/a_0$  は  $z$  がある程度大きくなると  $b$  に無関係となるが、地表面上の  $x$  軸および  $y$

軸上では  $b$  により影響を受ける。 $\omega s/c_2$  による  $H A_u$  の変化は、 $y$  軸および  $z$  軸上では単調減少であるが、加振方向と平行な  $x$  軸上では極値が現われ、この極値の間隔も  $b$  には無関係で波長に関係している。位相遅れに対しては、 $x$  軸上の  $H \theta_u$  は  $\omega x/c_2$  とは比例関係がないが、 $y$  軸および  $z$  軸上では  $H \theta_u$  と  $\omega s/c_2$  とはほぼ比例しており、この場合、勾配はともに約1.0となっている。したがって、水平加振を与えた場合、加振方向に直角な  $y$  軸 および  $z$  軸方向に沿って伝わる応力波は剪断波の速度をもつ。

**Fig. 8** は粘弾性体の減衰による効果を示す図で、Lamé の常数  $\lambda, \mu$  に対応する粘性常数  $\lambda', \mu'$  の比  $\lambda'/\mu'=1$  とし、 $\nu=1/4, c/b=1$  において垂直加振を与えたときの (a)  $x$  軸上の  $r A_w$  と  $r \theta_w$ , (b)  $z$  軸上の  $r A_w$  と  $r \theta_w$  および (c)  $x$  軸上の  $r A_u$  と  $r \theta_u$  を縦軸に、横軸には  $s/b [s=x, z]$  をとって、粘弾性体の減衰係数  $\eta$  をパラメータにして示した。図中、実線は  $a_0=2.0$  を、破線は  $a_0=0$  (static) の場合を表わしている。ここで、粘弾性体の減衰機構を Voigt 型として与えているために、 $a_0=0$  の場合には減衰がないのでパラメータ  $\eta$  は関与しない。

$\eta$  が増加すると、 $r A_w$  および  $r A_u$  は  $s/b$  の増加にともない急激に小さくなる。 $z$  軸上の  $r A_w$  は  $\eta=0$  のとき  $z/b$  に関して極値をとったが、 $\eta$  が大きくなると極値がなくなる傾向にあり、 $r \theta_w$  も  $\eta$  が増すほど複雑な曲線から直線に近づいてくる。また、逆に  $x$  軸上の  $r A_u$  は  $\eta=0$  のときよりも  $\eta$  が大きくなるにつれ  $x/b$  に対する極値は明確になり、 $r \theta_u$  も  $\eta$  が大きくなるほど、 $x/b$  に対して複雑な曲線となっている。 $x$  軸上の  $r \theta_w$  は  $\eta$  が増すほど勾配がさがり、伝播速度が速くなることを示している。 $\eta=0$  のときの  $a_0=0$  (static) と  $a_0=2.0$  とを比較すると、 $x$  軸上の  $r A_w$  は  $x/b < 10$  では  $a_0=0$  の場合が大きく、 $10 < x/b < 16$  では  $a_0=2.0$  の場合が大きくなっている。 $z$  軸上の  $r A_w$  は  $z/b$  のすべての範囲にわたり  $a_0=0$  の場合が大きい。 $x$  軸上の  $r A_u$  は  $x/b > 1.2$  に対しては  $a_0=2.0$  の場合が大きい。しかし、地盤に減衰があると、たとえば  $\eta=0.1$  のときには基礎から離れたところでは  $a_0=0$  のときの  $r A_w$  および  $r A_u$  が常に  $a_0=2.0$  のときよりも大きい。

**Fig. 9** は **Fig. 8** に対応するもので、 $\lambda'/\mu'=1, \nu=1/4, c/b=1$  において、水平加振を与えたときの (a)  $x$  軸上、(b)  $y$  軸上および (c)  $z$  軸上の  $H A_u$  と  $H \theta_u$  を縦軸に、 $s/b$  を横軸に、 $\eta$  をパラメータとしたもので、実線は  $a_0=2.0$  を、破線は  $a_0=0$  (static) の場合を示している。この図からも  $\eta$  が増加するほど、 $H A_w$  は  $s/b$  の増加にともない著しく減少していることがわかる。 $x$  軸上の  $H A_u$  は  $\eta=0$  のとき  $x/b$  に対して極値があるが、 $\eta$  が増加するにつれて極値は消えている。 $a_0=0$  と  $a_0=2.0$  のときの  $H A_u$  を比較すると、 $x$  軸および  $y$  軸上では  $a_0=0$  のときの方が  $H A_u$  は大きい、 $z$  軸上では  $z/b > 1.6$  に対し  $a_0=2.0$  のときの方が  $H A_u$  は大きい。位相遅れは、 $x$  軸上の  $H \theta_u$  は  $\eta=0$  のとき、 $x/b$  に対し複雑な曲線となっていたが、 $\eta$  が増加するにつれ、 $H \theta_u$  は  $x/b$  とほぼ直線的な関係に近づく。 $y$  軸および  $z$  軸上での  $H \theta_u$  は  $\eta$  の値にかかわらず、 $s/b [s=y, z]$  とはほぼ直線的であり、 $\eta$  が増加するほど、その勾配は小さくなる。これは  $\eta$  が増加するほど伝播速度が速くなることに対応している。

## 5. ま と め

本報では、表面上にのる長方形基礎の垂直および水平加振による半無限 Voigt 型粘弾性体の表面 ( $x$  および  $y$  軸) ならびに内部 ( $z$  軸) における力-変位伝達特性の分布を求めた。ここで、 $x$  軸および  $y$  軸は地表面での基礎の2つの主軸に対応し、 $z$  軸は基礎中心を通る鉛直下方の軸に対応する。また、水平加振は  $x$  軸方向に加振した。以上の結果、入力としての加振の種類、地盤上および地盤内での変位を求める位置および地盤の媒質がもつ dissipative な減衰作用により異なった性状を示すことが明らかになった。また、 $x$  軸上では垂直および水平加振に対し、加振方向に直角な方向の変位成分が出ることが明らかになった。それらは次のようにまとめられる。

### 1. 静的な荷重が加わる場合

垂直、水平両載荷に対し、 $x$  軸、 $y$  軸および  $z$  軸における載荷方向の変位ならびに  $x$  軸における載荷

直角方向の変位は基礎中心より基礎巾と同程度離れると、基礎中心からの距離にほぼ逆比例して減少する。また、基礎から等距離における載荷方向の変位成分は載荷方向に平行な軸上で一番大きくでている。

## 2. 動的な荷重が加わる場合

### (a) 振動数による影響

加振力、基礎巾および基礎中心からの距離を固定すると、振巾は振動数の関数となり、加振方向の振巾は加振方向に平行な軸上で振動数による変化が最もはげしい。 $x$  軸上における加振方向の振巾と加振直角方向の振巾とを比較すると、静的な場合には、加振方向の振巾が加振直角方向の振巾よりも3～4倍大きい、動的な場合には、振動数により同程度または加振直角方向の振巾の方が大きくなることがある。したがって、地盤に加振力を与えた場合、加振直角方向の変位成分も注意する必要がある。

### (b) 基礎巾による影響

加振力、振動数および基礎中心からの距離を固定すると、垂直、水平両加振に対して、地表面上（ $x$  軸および  $y$  軸）においては基礎巾により加振方向および加振直角方向の振巾は変化する。しかし、地盤内（ $z$  軸）においては、基礎からある程度離れると加振方向の振巾は基礎巾に無関係となる。したがって、地表面上においては点加振による振巾特性を有限面積をもつ長方形基礎の振巾特性に転用するには注意が必要である。

### (c) 基礎中心からの距離による影響

条件を一定にして、基礎中心から離れると、加振方向の振巾は加振方向に直角な軸上では単調に減少するが、加振方向に平行な軸上では基礎中心からの距離により振巾はかなり規則的な間隔をもった極大および極小が現われる。そして、この極値をもつ距離の間隔は基礎巾には無関係で波長に関係している。 $x$  軸上での加振直角方向の振巾も基礎中心からの距離によりかなり規則的な間隔をもった極大、極小が現われる。

以上の性状は地盤の媒質に減衰がない場合であったが、減衰の効果をみると、

### (d) 地盤の媒質が持つ減衰作用による影響

地盤に Voigt 型の粘性減衰を働かすと、加振方向および加振直角方向の振巾は基礎中心からの距離が増すにつれ減衰作用が大きく効き、振巾は距離と共に急激に減少する。現実の地盤には何んらかの減衰作用が働らくと考えられるので、地盤上の基礎を加振した場合、応力波は距離と共に非常に早く減衰すると考えられる。

### (e) 加振型により生成される応力波の種類について

基礎に垂直加振を与えた場合、地表面では Rayleigh wave が卓越して生成される。加振方向に平行な地盤内の方向へは疎密波が卓越すると考えられるが、他の種類の波も存在するようである。基礎に水平加振を与えた場合、加振方向に直角な地表面上（ $y$  軸）および地盤内（ $z$  軸）の方向へは剪断波が卓越して生成され、地表面上の加振方向に平行な方向には疎密波および Rayleigh wave が卓越すると考えられる。

なお、数値計算には、京都大学大型計算機センターの digital 電子計算機 “FACOM 230-60” および京都大学の digital 電子計算機 “KDC-II” (HITAC 5020) を使用したことを記し、最後に、本稿の作成にあたり討論に参加された京大・防災研助手鈴木 有氏ならびに小堀・南井両研究室の諸兄に深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有・日下部馨：長方形基礎の加振による半無限粘弾性地盤の振動特性。京都大学防災研究所年報，第12号 A，昭44.3，pp. 301～316。
- 2) Lamb, H.: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A, Vol. 203, 1904, pp. 1～42。

- 3) 田治見宏・野島 治：弾性地盤上点加振による波動伝播，日本建築学会関東支部第37回研究発表会，昭41，pp. 13～16.
- 4) 田治見宏：建物と地盤の相互作用，建築構造学大系1 地震工学，彰国社，昭43，pp. 54～105.
- 5) Awojobi, A.O. and P. Grootenhuis : Vibration of Rigid Bodies on Semi-Infinite Elastic Media, Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 287, No. 1408, 1965, pp. 27～63.
- 6) 小堀鐸二・南井良一郎・篠崎祐三：半無限弾性地盤上の剛基礎による強制振動——混合境界値問題としての取り扱い——，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭44，8，pp. 673～674.
- 7) Longman, I.M.: On the Numerical Evaluation of Cauchy Principal Values of Integrals. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, Vol. 12, No. 63, 1958, pp. 205～207.
- 8) Watson, G.N.: A treatise on the THEORY OF BESSEL FUNCTIONS, Cambridge University Press, 1966.
- 9) 森口繁一他：数学公式Ⅲ，岩波全書，1956.