

2次元FPU格子における変調不安定性の解析

阪大・工 土井 祐介 (Yusuke Doi),
阪大・工 中谷 彰宏 (Akihiro Nakatani)
Graduate School of Engineering, Osaka University

概要

非線形格子において Zone Boundary Mode や Band Edge Mode の変調不安定性は、非線形局在モード／離散ブリーザーの励起、またカオス的ブリーザーの発生と関連付けられる重要な性質のひとつである。本研究では 2 次元 2 原子非線形格子系の ZBM, BEM の変調不安定性解析を厳密に行う。

1 はじめに

非線形格子モデルは周期構造物の大振幅振動を記述するモデルとして様々な解析が行われてきた。非線形格子においてはソリトンや再帰現象など種々の興味深い現象が観測されているが、特に系の非線形性と離散性の両方に起因するダイナミクスとして非線形局在モード (Intrinsic Localized Mode, ILM) / 離散ブリーザー (Discrete Breather, DB) が注目されている [1, 2]。近年、種々の格子系において DB の観測が報告されており、工学的な応用も期待される。

DB の大きな特徴としてその存在が系の次元によらないということが挙げられる。すなわち基本的に一次元系における現象であるソリトンと異なり、2次元、3次元の格子系においても DB が存在する。またその構造は系の次元数に応じて多様である。

DB の構造、安定性などについて様々な解析が行われている一方で、その励起メカニズムについては未だ様々な課題が残されている。DB の励起については線形の固有振動の振動数帯と禁止帯の境界である Zone Boundary Mode (ZBM) および Band Edge Mode (BEM) からの変調不安定によって引き起こされることが報告されている。このことから ZBM および BEM の変調不安定性を解析することは DB の励起との関連性からも重要であるといえる。

ZBM および BEM の安定性解析としては Fermi-Pasta-Ulam 格子や非線形 Krein-Gordon 格子などにおいて様々に行われてきている。しかし厳密な結果については Yoshimura の単原子非線形格子 [3] および著者の 2 原子非線形格子系についての結果 [4] を除いて報告されていない。

本研究では、2次元の 2 原子格子系における変調不安定性の厳密な結果を示す。2次元格子系においても DB が存在しており、この励起メカニズムを探る上でもこの変調不安定性解析は重要であると考えられる。2 原子格子系を考えることから 1 次元の場合と同様に光学モードと音響モードの 2 つの振動数帯の間にギャップが出現し得る。したがって、

ZBEとは別にBEMも存在する。これらの振動モードそれぞれについて変調不安定性解析を行うものとする。

2 非線形周期解の安定性解析

方程式

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \alpha_{2p}\phi^{2p-1} = 0 \quad (1)$$

が周期 T の周期解を持つとして、この周期解 $\phi(t)$ を係数に持つ方程式

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta_{2p}\phi^{2p-2}\xi = 0 \quad (2)$$

を考える。ただし p は整数である。

この時、方程式 (2) の解の安定性はモノドロミー行列 $\mathcal{M}$ の固有値を調べることで明らかになる。具体的にはモノドロミー行列の固有値の絶対値が1よりも大きければ不安定である。 $\mathcal{M}$ は ξ の時刻 t から $t+T$ への写像である。

$$\begin{pmatrix} \xi(t+T) \\ \dot{\xi}(t+T) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

モノドロミー行列 $\mathcal{M}$ は一般には陽な形で書くことが出来ない。しかし、方程式 (2) は変数変換

$$z = \left(\frac{\alpha_{2p}}{2ph} \right) [\phi(t)]^{2p} \quad (4)$$

を行うことによって、Gauss の超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\xi}{dz} - ab\xi = 0, \quad (5)$$

$$a+b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, ab = -\frac{\lambda_{2p}}{4p}, c = 1 - \frac{1}{2p} \quad (6)$$

が得られる。ここで h は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{\alpha_{2p}}{2p} \phi^{2p} = h \quad (7)$$

で与えられる。また

$$\lambda_{2p} = \frac{\beta_{2p}}{\alpha_{2p}} \quad (8)$$

である。

Gauss の超幾何微分方程式のある基本解に関する、2つの特異点 $z=0$ と $z=1$ の回りの閉曲線 γ_0 および γ_1 に対するモノドロミー行列は

$$M(\gamma_0) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\pi ib} - e^{-2\pi ic} \\ 0 & e^{-2\pi ic} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M(\gamma_1) = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(c-a-b)} - e^{-2\pi i c} & 0 \\ 1 - e^{2\pi i(c-a)} & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

で与えられる。これらを使って方程式 (2) の周期に対応するモノドロミー行列 M は

$$\begin{aligned} M &= M(\gamma_0)^p M(\gamma_1) M(\gamma_0)^p M(\gamma_1) \\ &= \begin{pmatrix} ABC - 1 & BC \\ -A & -1 \end{pmatrix}^2, \\ A &= 1 - e^{2\pi i(c-a)}, \\ B &= 1 - e^{2\pi i(c-b)}, \\ C &= \frac{2}{1 - e^{2\pi i c}} \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。

このモノドロミー行列 (11) の固有値は

$$\rho_{2p}, \rho_{2p}^{-1} = F_{2p}(\lambda) \pm \sqrt{[F_{2p}(\lambda_{2p})]^2 - 1} \quad (12)$$

となる。ここで

$$F_{2p}(\lambda_{2p}) = \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2p}\right)} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2p} \sqrt{(p-1)^2 + 4p\lambda_{2p}} \right] - 1 \quad (13)$$

である。固有値が 1 より大きくなるのは $F_{2p}(\lambda_{2p}) > 1$ の時に限られる。さらに $F_{2p}(\lambda_{2p}) > 1$ が成り立つのはパラメータ λ_{2p} が以下に定める領域 S_{2p} の中にある場合である [5].

$$\begin{aligned} S_{2p} &= \{ \lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda < 0, 1 < \lambda < 2p-1, 2p+1 < \lambda < 6p-2, \\ &\quad \dots, j(j-1)p+j < \lambda < j(j+1)p-j, \dots \} \end{aligned} \quad (14)$$

λ は ξ の安定性を示すパラメータであり stability parameter と呼ばれる。

3 解析モデル

解析モデルとして図 1 に示すような、2次元2原子格子モデルを考える。格子は $x-y$ 平面に属しており、平面に垂直な z 方向の変位を考えると、系の Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= \sum_{I=1}^{2N} \sum_{J=1}^{2N} \frac{1}{2} m_{I,J} \dot{z}_{I,J}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N [V(z_{2i+1,2j} - z_{2i,2j}) + V(z_{2i,2j+1} - z_{2i,2j})] \\ &\quad + l \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N [V(z_{2i+1,2j+1} - z_{2i,2j}) + V(z_{2i+1,2j-1} - z_{2i,2j})] \end{aligned} \quad (15)$$

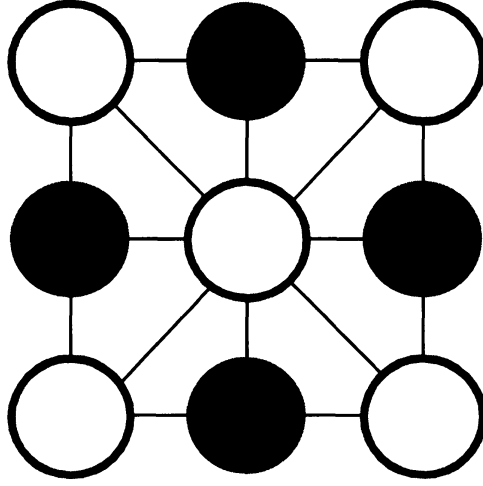


図 1: モデル

で与えられる。相互作用ポテンシャル $V(r)$ は偶数次ポテンシャルの和

$$V(r) = \sum_{s=1}^p \frac{1}{2s} \kappa_{2s} r^{2s} \quad (16)$$

である。また $m_{I,J}$ は (I, J) 番目の質点の質量であり、

$$m_{I,J} = \begin{cases} 1 & \text{if both } I \text{ and } J \text{ are even or odd} \\ m & \text{other} \end{cases} \quad (17)$$

で与えられる。格子間の相互作用は第1近接格子および第2近接格子間に働く。第2近接格子間の相互作用は第1近接格子間の相互作用の l 倍であるとする。また x, y 方向共に周期境界条件を適用する。

式 (15) より運動方程式は

$$\begin{aligned} m_{I,J} \ddot{z}_{I,J} = & -V'(z_{I+1,J} - z_{I,J}) - V'(z_{I-1,J} - z_{I,J}) \\ & -V'(z_{I,J+1} - z_{I,J}) - V'(z_{I,J-1} - z_{I,J}) \\ & +l(V'(z_{I+1,J+1} - z_{I,J}) + V'(z_{I-1,J+1} - z_{I,J}) \\ & +V'(z_{I-1,J-1} - z_{I,J}) + V'(z_{I+1,J-1} - z_{I,J})) \end{aligned} \quad (I, J = 1, 2, \dots, 2N) \quad (18)$$

となる。

4 線形分散関係

運動方程式 (18) を線形化することにより以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}
 m_{I,J} \ddot{z}_{I,J} = & (z_{I+1,J} + z_{I-1,J} + z_{I,J+1} + z_{I,J-1} - 4z_{I,J}) \\
 & -l(z_{I+1,J+1} + z_{I-1,J+1} + z_{I-1,J-1} + z_{I+1,J-1} - 4z_{I,J}) \\
 & (I, J = 1, 2, \dots, 2N)
 \end{aligned} \tag{19}$$

線形化運動方程式 (19) の解として定常波解

$$z_{2i,2j} = A \cos(2ip_\mu) \cos(2jq_\nu) \cos(\omega t) \tag{20}$$

$$z_{2i+1,2j+1} = \tilde{A} \cos(2(i+1)p_\mu) \cos(2(j+1)q_\nu) \cos(\omega t) \tag{21}$$

$$z_{2i+1,2j} = B \cos((2i+1)p_\mu) \cos(2jq_\nu) \cos(\omega t) \tag{22}$$

$$z_{2i,2j+1} = \tilde{B} \cos(2ip_\mu) \cos((2j+1)q_\nu) \cos(\omega t) \tag{23}$$

を仮定すると, 線形分散関係として (i) $A = \tilde{A}, B = \tilde{B}$ の場合,

$$\begin{aligned}
 \Omega_{I,II}^2(p, q) = & 2k \frac{1+m}{m} (1+l-l \cos p \cos q) \\
 & \pm \frac{1}{m} \sqrt{4k^2(1+m)^2(1+l-l \cos p \cos q)^2} \\
 & \frac{-16k^2m(1+l-l \cos p \cos q)^2 + 4k^2m(\cos p + \cos q)^2}{-16k^2m(1+l-l \cos p \cos q)^2 + 4k^2m(\cos p + \cos q)^2}
 \end{aligned}$$

また (ii) $A = -\tilde{A}, B = -\tilde{B}$ の場合

$$\begin{aligned}
 \Omega_{III,IV}^2(p, q) = & 2k \frac{1+m}{m} (1+l+l \cos p \cos q) \\
 & \pm \frac{1}{m} \sqrt{4k^2(1+m)^2(1+l+l \cos p \cos q)^2} \\
 & \frac{-16k^2m(1+l+l \cos p \cos q)^2 + 4k^2m(\cos p - \cos q)^2}{-16k^2m(1+l+l \cos p \cos q)^2 + 4k^2m(\cos p - \cos q)^2}
 \end{aligned}$$

の4つの分枝が得られる.

この4つの分枝の変化を図2,3に示す. 分散曲線の構造を特徴づける固有振動は以下の4つのモードである.

$$\begin{aligned}
 \text{Mode a: } \Omega_I^2(0, 0) &= 4k \frac{1+m}{m} \\
 \text{Mode b: } \Omega_{III}^2(0, 0) &= 4k \frac{1+2l}{m} \\
 \text{Mode c: } \Omega_{II,III}^2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= 4k \frac{1+l}{m} \\
 \text{Mode d: } \Omega_{IV}^2(0, 0) &= 4k(1+2l)
 \end{aligned} \tag{24}$$

これらのモードはパラメータ m および l の大きさによって大小が入れ替わる, またギャップの有無も変化する. また, 各格子点の空間変位パターンは一様となり, $z_{I,J}(t) = \bar{z}_{i,j} \cos(\omega t)$

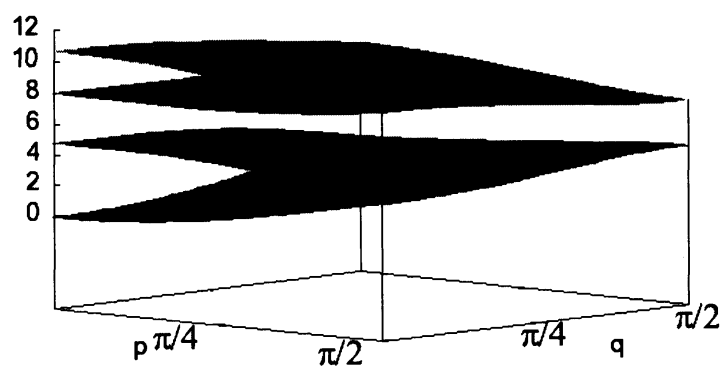


図 2: 分散関係の例

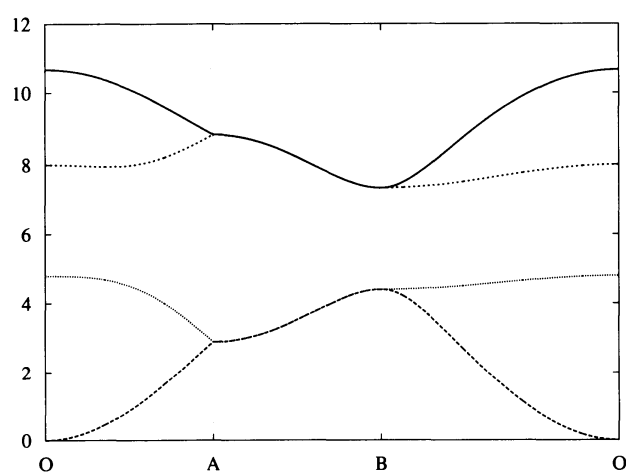


図 3: 分散関係の例

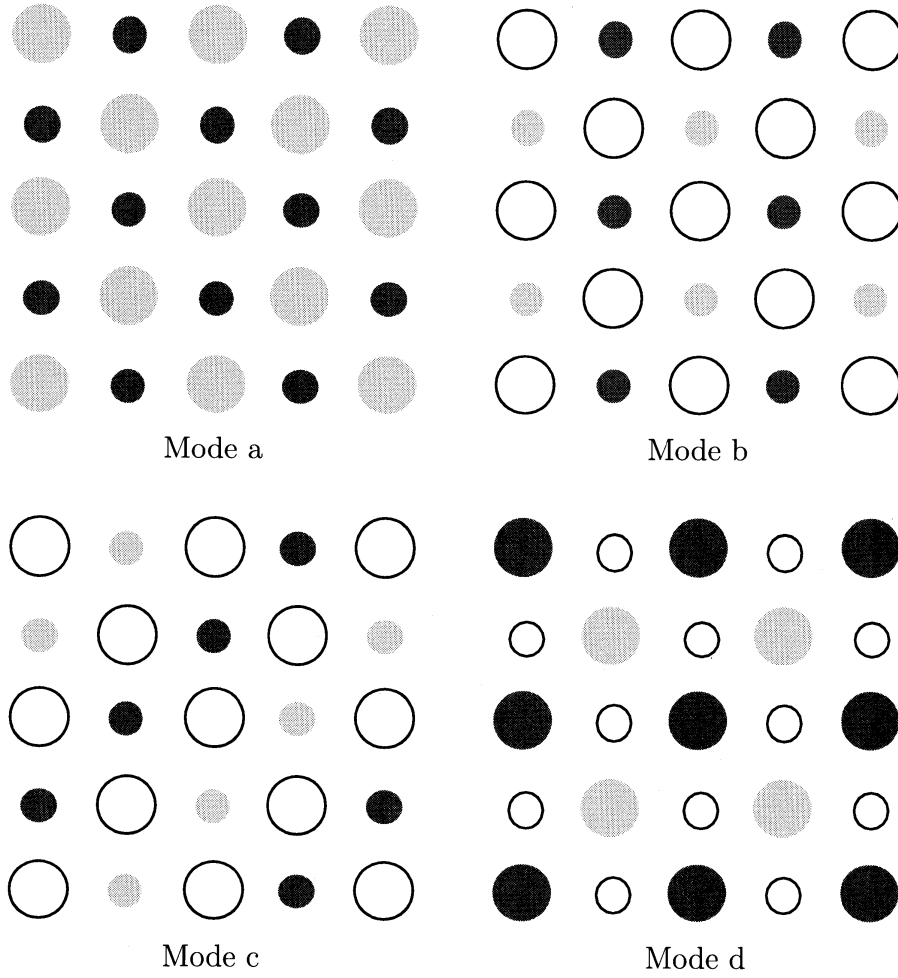


図 4: ZBM, BEM の変位パターン

として以下のように与えられる. またその様子を図 4 に示す.

$$\begin{aligned}
 \text{Mode a: } & \bar{z}_{2i,2j} = \bar{z}_{2i+1,2j+1} = mK_a \\
 & \bar{z}_{2i+1,2j} = \bar{z}_{2i,2j+1} = -K_a \\
 \text{Mode b: } & \bar{z}_{2i,2j} = \bar{z}_{2i+1,2j+1} = 0 \\
 & \bar{z}_{2i+1,2j} = K_b \\
 & \bar{z}_{2i,2j+1} = -K_b \\
 \text{Mode c: } & \bar{z}_{2i,2j} = \bar{z}_{2i+1,2j+1} = 0 \\
 & \bar{z}_{2i+1,2j} = (-1)^{i+j} K_c \\
 & \bar{z}_{2i,2j+1} = -(-1)^{i+j} K_c \\
 \text{Mode d: } & \bar{z}_{2i,2j} = K_d \\
 & \bar{z}_{2i+1,2j+1} = -K_d \\
 & \bar{z}_{2i+1,2j} = \bar{z}_{2i,2j+1} = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

波数 p_μ, q_ν は周期境界条件より,

$$p_\mu = \frac{\pi\mu}{N}, q_\nu = \frac{\pi\nu}{N} \quad (26)$$

で与えられる.

5 ZBM,BEMの安定性解析

5.1 Mode a の場合

空間的な変位パターンが式 (25) で与えられる非線形周期解を考える. いま, 解として

$$z_{2i,2j} = z_{2i+1,2j+1} = mK_a\Psi(t) \quad (27)$$

$$z_{2i+1,2j} = z_{2i,2j+1} = -K_a\Psi(t) \quad (28)$$

を仮定して運動方程式 (18) に代入すると, Ψ に関する発展方程式

$$\ddot{\Psi}(t) = -4 \sum_{s=1}^p [\kappa_{2s} K_a^{2s-2} m^{-1} (1+m)^{2s-1}] \Psi^{2s-1} \quad (29)$$

が得られる.

次に非線形周期解 $z_{I,J} = \bar{z}_{I,J}\Psi(t)$ 周りの擾乱 $\xi(t)$ を考える.

$$z_{2i,2j} = mK\Psi(t) + \xi_{2i,2j} \quad (30)$$

$$z_{2i+1,2j+1} = mK\Psi(t) + \xi_{2i+1,2j+1} \quad (31)$$

$$z_{2i+1,2j} = -K\Psi(t) + \xi_{2i+1,2j} \quad (32)$$

$$z_{2i,2j+1} = -K\Psi(t) + \xi_{2i,2j+1} \quad (33)$$

を運動方程式 (18) に代入して ξ の高次項を無視すると, 変分方程式

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{2i,2j}(t) = & - \sum_{s=1}^p [(2s-1)\kappa_{2s} K_a^{2s-2} (1+m)^{2s-2}] \Psi^{2s-2} \\ & \times (\xi_{2i-1,2j} + \xi_{2i+1,2j} + \xi_{2i,2j+1} + \xi_{2i,2j-1} - 4\xi_{2i,2j}) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{2i+1,2j+1}(t) = & - \sum_{s=1}^p [(2s-1)\kappa_{2s} K_a^{2s-2} (1+m)^{2s-2}] \Psi^{2s-2} \\ & \times (\xi_{2i,2j+1} + \xi_{2i+2,2j+1} + \xi_{2i+1,2j+2} + \xi_{2i+1,2j} - 4\xi_{2i+1,2j+1}) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_{2i+1,2j}(t) = & - \sum_{s=1}^p [(2s-1)\kappa_{2s} K_a^{2s-2} (1+m)^{2s-2}] \Psi^{2s-2} \\ & \times (\xi_{2i,2j} + \xi_{2i+2,2j} + \xi_{2i+1,2j+1} + \xi_{2i+1,2j-1} - 4\xi_{2i+1,2j}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_{2i,2j+1}(t) = & - \sum_{s=1}^p [(2s-1)\kappa_{2s} K_a^{2s-2} (1+m)^{2s-2}] \Psi^{2s-2} \\ & \times (\xi_{2i-1,2j+1} + \xi_{2i+1,2j+1} + \xi_{2i,2j+2} + \xi_{2i,2j} - 4\xi_{2i,2j+1}) \end{aligned} \quad (37)$$

が得られる。

変分方程式の加速度項 $\ddot{\xi}$ の係数行列を正規化することを考慮して、空間座標 ξ からノーマルモード座標 η に変換すると、各変数を分離した形でノーマルモードにおける変分方程式

$$\ddot{\eta}(k_1, k_2) = -\omega_a^2(k_1, k_2) \sum_{s=1}^p [(2s-1)\kappa_{2s}K_a^{2s-2}(1+m)^{2s-2}] \Psi^{2s-2}\eta(k_1, k_2) \quad (38)$$

を得る。ただし、 $\omega_a(k_1, k_2)$ はノーマルモードに対応した固有振動数であり

$$\omega_a^2(k_1, k_2) = \begin{cases} \omega_{a,i}^2 = \frac{2}{m} \left[(1+m) + \sqrt{(1-m)^2 + m(\cos k_1 + \cos k_2)^2} \right] \\ \omega_{a,ii}^2 = \frac{2}{m} \left[(1+m) - \sqrt{(1-m)^2 + m(\cos k_1 + \cos k_2)^2} \right] \\ \omega_{a,iii}^2 = \frac{2}{m} \left[(1+m) + \sqrt{(1-m)^2 + m(\cos k_1 - \cos k_2)^2} \right] \\ \omega_{a,iv}^2 = \frac{2}{m} \left[(1+m) - \sqrt{(1-m)^2 + m(\cos k_1 - \cos k_2)^2} \right] \end{cases} \quad (39)$$

で与えられる。

非線形周期解の振幅が十分に大きな場合、運動方程式および変分方程式において s の最高次の項が支配的になる。この場合、それぞれの式は

$$\ddot{\Psi}(t) = -4 [\kappa_{2p}K_a^{2p-2}m^{-1}(1+m)^{2p-1}] \Psi^{2p-1} \quad (40)$$

$$\ddot{\eta}(k_1, k_2) = -\omega_a^2(k_1, k_2) [(2p-1)\kappa_{2p}K_a^{2p-2}(1+m)^{2p-2}] \Psi^{2p-2}\eta(k_1, k_2) \quad (41)$$

となる。

式(40)および式(41)から Mode a に対する波数 (k_1, k_2) のノーマルモードによる擾乱の安定性を決定する stability parameter は

$$\lambda_{2p,a}(k_1, k_2) = \frac{2p-1}{4} \frac{m}{m+1} \omega_a^2(k_1, k_2) \quad (42)$$

で与えられる。

ここで stability parameter の値の範囲から非線形周期解の安定性を議論する。擾乱モードの振動数は式(39)からそれぞれの分枝について

$$\frac{4}{m} < \omega_{a,i}^2 < \frac{4(1+m)}{m} \quad (43)$$

$$0 < \omega_{a,ii}^2 < 4 \quad (44)$$

$$\frac{4}{m} < \omega_{a,iii}^2 < \frac{2}{m} \left(1+m + \sqrt{1-m+m^2} \right) < \frac{4(1+m)}{m} \quad (45)$$

$$0 < \frac{2}{m} \left(1+m - \sqrt{1-m+m^2} \right) < \omega_{a,iv}^2 < 4 \quad (46)$$

の範囲となる。したがって stability parameter は

$$\frac{2p-1}{m+1} < \lambda_{a,i} < 2p-1 \quad (47)$$

$$0 < \lambda_{a,ii} < \frac{(2p-1)m}{m+1} \quad (48)$$

$$\frac{2p-1}{m+1} < \lambda_{a,iii} < 2p-1 \quad (49)$$

$$0 < \lambda_{a,iv} < \frac{(2p-1)m}{m+1} \quad (50)$$

の範囲となる。

これを式 (14) と比較すると, $\lambda_{a,i}$ および $\lambda_{c,iii}$ は $0 < m \leq 1$ において m の値にかかわらず S_{2p} の中に存在する。一方, $\lambda_{a,ii}$ および $\lambda_{a,iv}$ に関しては $0 < m < \frac{1}{2(p-1)}$ ではすべての場合について S_{2p} の範囲外に存在し, $\frac{1}{2(p-1)} < m \leq 1$ では一部の値が S_{2p} の範囲内になる。したがって, 分枝 i,iii に関しては全ての擾乱モードに対して不安定, 分枝 ii,iv に関しては $0 < m < \frac{1}{2(p-1)}$ では全ての擾乱モードに対して安定, $\frac{1}{2(p-1)} < m \leq 1$ では一部の擾乱モードが不安定である。図 5 に $p=2$ の場合の擾乱モードの波数 (k_1, k_2) と擾乱モードの安定性の関係を示す。この時, 分枝 ii,iv の安定性の特性は $m=0.5$ で変化する。 $m=0.5$ を境にして分枝 ii,iv に不安定な擾乱モードが出現していることが分かる。

5.2 Mode b の場合

前節と同様の手順で計算を行うと, 非線形発展方程式および変分方程式が

$$\ddot{\Psi}(t) = -4m^{-1} \sum_{s=1}^p [\kappa_{2s} K_b^{2s-2} (1 + 2^{2s-1} \lambda)] \Psi^{2s-1} \quad (51)$$

$$\ddot{\eta}(k_1, k_2) = -\omega_b^2(k_1, k_2) [(2p-1) \kappa_{2p} K_b^{2p-2} m^{-1}] \Psi^{2p-2} \eta(k_1, k_2) \quad (52)$$

となる。擾乱モードの固有振動数は

$$\omega_b^2(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}lc_1] \\ \quad + \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}lc_1]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}lc_1] \\ \quad - \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}lc_1]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}lc_2] \\ \quad + \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}lc_2]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}lc_2] \\ \quad - \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}lc_2]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2}] \end{cases} \quad (53)$$

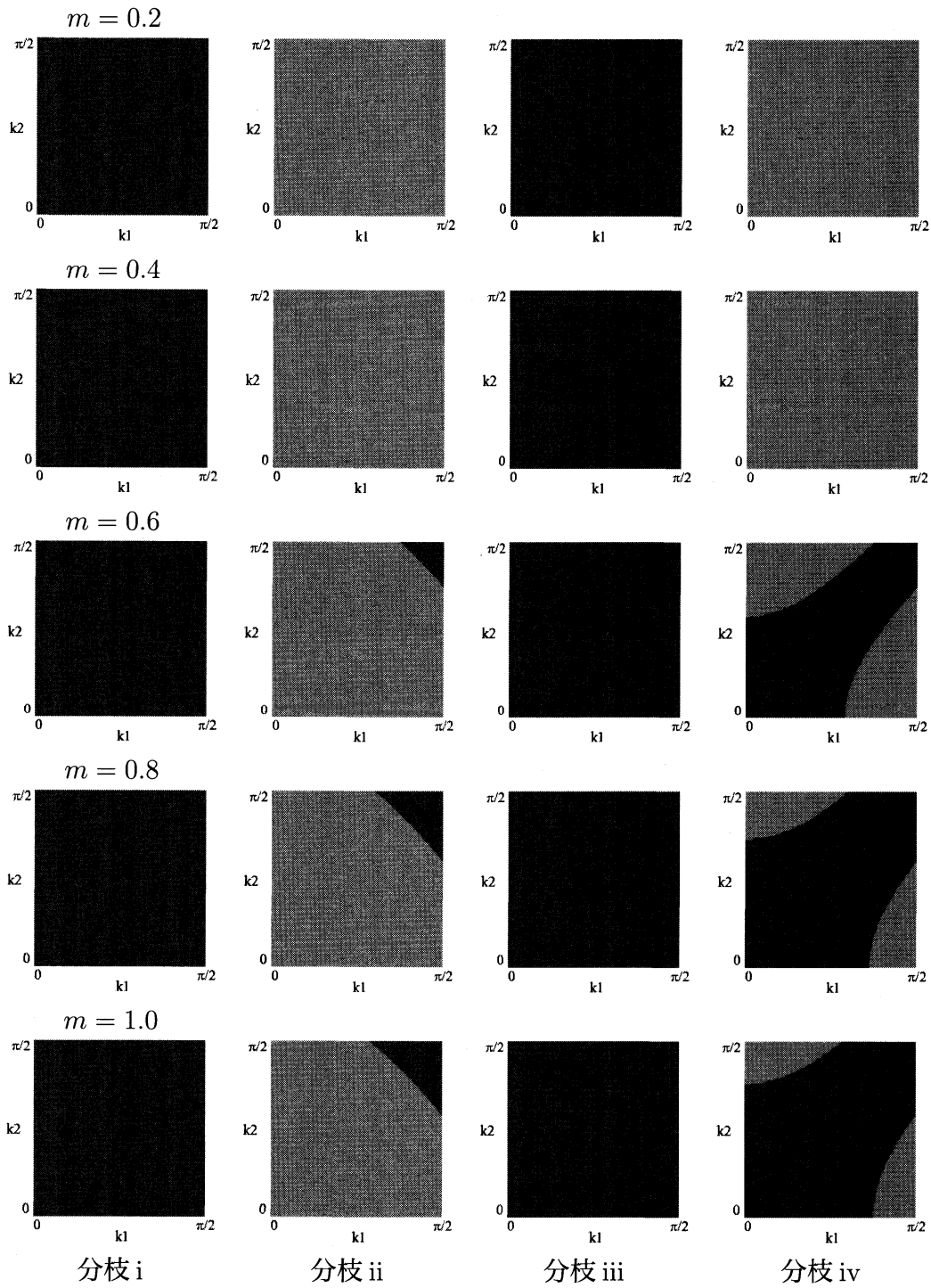


図 5: 非線形周期解 (Mode a) の擾乱に対する安定性：黒 (赤) が不安定領域，グレーが安定領域

で与えられる。ここで

$$c_1 = 1 - \cos k_1 \cos k_2 \quad (54)$$

$$c_2 = 1 + \cos k_1 \cos k_2 \quad (55)$$

である。

stability parameter は

$$\lambda_{2p,b} = \frac{2p-1}{4(1+2^{2p-1}l)} m \omega_b^2(k_1, k_2) \quad (56)$$

となる。

stability parameter による安定領域の様子を図 6 に示す。 l および m の変化に伴い、安定・不安定の領域が周期的なパターンを示す。

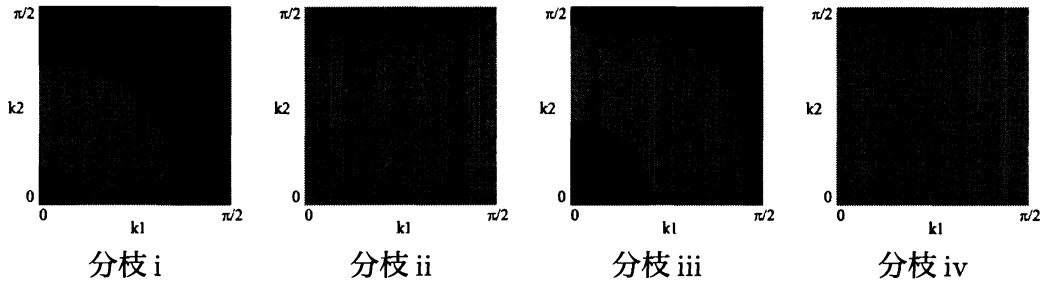


図 6: 非線形周期解 (Mode b) の擾乱に対する安定性：黒 (赤) が不安定領域，グレーが安定領域

5.3 Mode c の場合

非線形発展方程式および変分方程式は

$$\ddot{\Psi}(t) = -4m^{-1} \sum_{s=1}^p [\kappa_{2s} K_c^{2s-2} (1 + 2^{2(s-1)} l)] \Psi^{2s-1} \quad (57)$$

$$\ddot{\eta}(k_1, k_2) = -\omega_c^2(k_1, k_2) [(2p-1) \kappa_{2p} K_c^{2p-2}] \Psi^{2p-2} \eta(k_1, k_2) \quad (58)$$

で与えられる。擾乱モードの固有振動数は

$$\omega_c^2(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{1}{m} [2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_1] \\ \quad + \sqrt{[2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_1]^2 - 8m(2 + 2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2} \\ \frac{1}{m} [2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_1] \\ \quad - \sqrt{[2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_1]^2 - 8m(2 + 2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2} \\ \frac{1}{m} [2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_2] \\ \quad + \sqrt{[2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_2]^2 - 8m(2 + 2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2} \\ \frac{1}{m} [2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_2] \\ \quad - \sqrt{[2(1+m) + 2^{2(r-1)}lc_2]^2 - 8m(2 + 2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2} \end{cases} \quad (59)$$

で与えられる。ここで

$$c_1 = 1 - \cos(k_1 + k_2) \quad (60)$$

$$c_2 = 1 + \cos(k_1 + k_2) \quad (61)$$

である。

また, stability parameter は

$$\lambda_{2p,c} = \frac{2p-1}{4(1+2^{2(p-1)}l)} m\omega_c^2(k_1, k_2) \quad (62)$$

となる。各分枝の擾乱モードによる安定・不安定領域の様子を図7に示す。

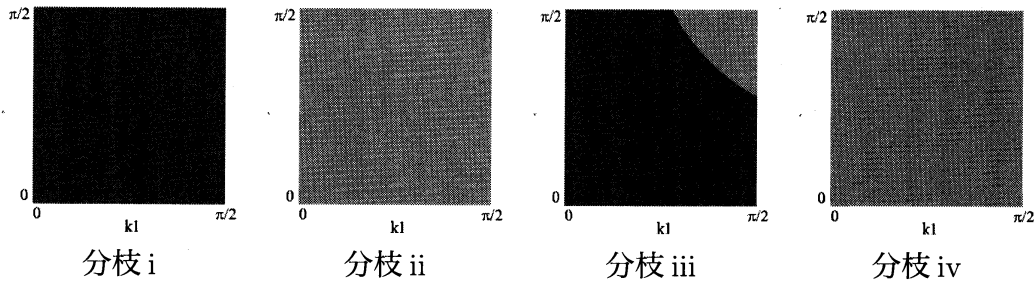


図 7: 非線形周期解 (Mode c) の擾乱に対する安定性：黒 (赤) が不安定領域, グレーが安定領域

5.4 Mode d の場合

非線形発展方程式および変分方程式は

$$\ddot{\Psi}(t) = -4 \sum_{s=1}^p [\kappa_{2s} K_d^{2s-2} (1 + 2^{2s-1}l)] \Psi^{2s-1} \quad (63)$$

$$\ddot{\eta}(k_1, k_2) = -\omega_d^2(k_1, k_2) [(2p-1)\kappa_{2p}K_c^{2p-2}] \Psi^{2p-2}\eta(k_1, k_2) \quad (64)$$

で与えられる。擾乱モードの固有振動数は

$$\omega_d^2(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}mlc_1] \\ \quad + \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}mlc_1]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}mlc_1] \\ \quad - \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}mlc_1]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_1) + 4m(\cos k_1 + \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}mlc_2] \\ \quad + \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}mlc_2]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2}] \\ \frac{1}{m} [2[1+m+2^{2(r-1)}mlc_2] \\ \quad - \sqrt{4[1+m+2^{2(r-1)}mlc_2]^2 - 16m(1+2^{2(r-1)}lc_2) + 4m(\cos k_1 - \cos k_2)^2}] \end{cases} \quad (65)$$

で与えられる。ここで

$$c_1 = 1 - \cos k_1 \cos k_2 \quad (66)$$

$$c_2 = 1 + \cos k_1 \cos k_2 \quad (67)$$

である。

stability parameter は

$$\lambda_{2p} = \frac{2p-1}{4(1+2^{2p-1}l)} \omega^2(k_1, k_2) \quad (68)$$

で与えられる。擾乱モードによる安定・不安定領域の様子を図8に示す。

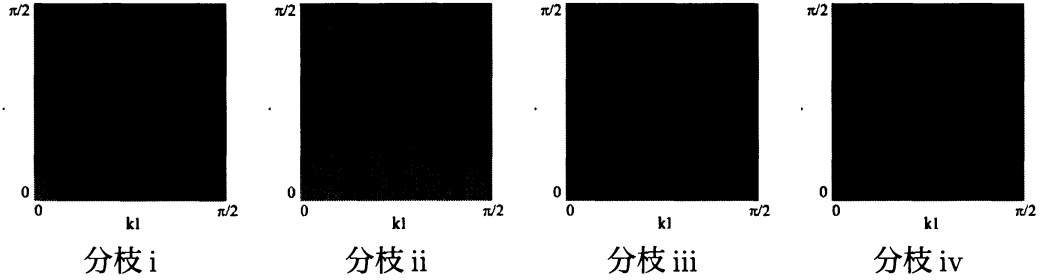


図 8: 非線形周期解 (Mode d) の擾乱に対する安定性：黒 (赤) が不安定領域，グレーが安定領域

6 おわりに

本研究では2次元2原子非線形格子のZBM, BEMの変調不安定性の解析を厳密に行った。非線形周期解をもつ発展方程式およびその変分方程式に着目して Gauss の超幾何微

分方程式のモノドロミー行列の性質を利用して不安定性解析を行った。これによって各 ZBM, BEM がどのような波数のノーマルモードの擾乱に対して不安定化するかを明らかにした。ZBE, BEM の変調不安定によってどのような現象が発生するかは数値シミュレーションによって時間発展を解析する必要があるがこれは今後の課題である。

参考文献

- [1] A.J. Seivers and S. Takeno, “Intrinsic localized modes in anharmonic crystals”, Phys. Rev. Lett., 61 (1988), pp. 970-973.
- [2] S. Flach and C.R. Willis, “Discrete Breathers”, Phys. Rep., 295 (1998), pp. 181-264.
- [3] K. Yoshimura, “Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices: Rigorous results”, Phys. Rev. E, 70 (2004), 016611.
- [4] Y. Doi, A. Nakatani and K. Yoshimura, “Modulational instability of zone boundary mode and band edge modes in nonlinear diatomic lattices”, Phys. Rev. E, 79 (2009), 026603.
- [5] 大貫義郎・吉田春夫, 力学, 岩波書店 (2001).