

正則複体について.

東大・教養 加藤 十吉

定義. 局所有限な stratification $K = \{\dot{A}\}$ on X (可分な距離空間) が胞体的 n -複体であるとは, 各 stratum $\dot{A}$ の閉包 $A = \overline{\mathcal{Q}_X(\dot{A})}$ が位相的に (局) 球体であるときをいう.

このとき, $K = \{A \mid \dot{A} \in K\}$ を n -複体 (胞体的 n -複体) といい, $X = |K| (= \bigcup_{A \in K} A)$ と表わされる.

注意. 通常の凸胞体的複体と異なる点は K の二つの胞体が一つ以上の共通面をもつこともありうることである. しかしながら K の導複体 K' は通常の単体的複体と同型になる. したがって, 記法等は通常のもので用いても不都合はない.

<正則複体の定義> 正則 n -複体は次の様に帰納的に定義される. symbol $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ の正則 n -複体 K とは,

$n = 0$ のとき, $K = \{\text{点}\}$, $\kappa = \emptyset$

$n = 1$ のとき, $|K|$ は円周か直線に同相で, $\kappa = (\kappa_1)$ の κ_1

は K の頂点の個数である。(例. n 角形の周は正則 1-複体で $\kappa = (n)$ である。)

$m \leq n-1$ ($n \geq 2$) なる m に対し, 正則 m -複体が定義されたとして, symbol $\kappa(K)$ の正則 n -複体を, 連結な複体 K で,

(i). K は π_2 -正則である; K の導複体 K' において, K の各 $(n-k)$ -胞体の link $lk(A, K' \text{ rel } A)$ が 1-連結 ($k \geq 3$), あるいは, S^{k-1} ($k \leq 2$) に同相であるときをいう。

(ii). K の各 n -胞体 A は正則 n -胞体, symbol $\kappa(A) = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ である。すなわち, A の境界 ∂A をおさう K の部分複体 $K(\partial A)$ が symbol $\kappa' = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ の正則 $(n-1)$ -複体である。

(iii) K の各 $(n-2)$ -胞体 C に対し, C を含む K の n -胞体の個数は丁度 κ_n である。

なる 3 条件 (i) ~ (iii) をみたすものと定義する。

例. 周知のように, symbol (p, q) の正則 2-複体 K で, $|K| \cong S^2$ なるものは, p 角形が頂点のまわりに q 個集まる S^2 の分割であるが, これは, Platon 多面体の表面の分割に限られる。(但し, 同型を除く)。とくに, 非順序対 $\{p, q\}$ はこの場合 $\{3, 3\}$ (正 4 面体), $\{3, 4\}$ (正 8 面体, 正 6 面体), $\{3, 5\}$ (正 20 面体, 正 12 面体) に限られる。

この例における双対性 ((p, q) 型が存在すれば, (q, p) 型も存在する) が一般に成立する。

補題1 (双対定理). symbol $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ の正則 n -複体 K に対し, その導複体 K' における双対複体 K^* も (星形複体として) 正則であり, $\text{symbol}(\overbrace{\kappa^* =}^{\kappa^*} (\kappa_n, \dots, \kappa_1))$ をもつ.

正則 n -複体の symbols を決定する為に Coxeter の honeycombs を想起する。すなわち, n 次元 spherical, euclidean あるいは hyperbolic space (E^n , S^n あるいは H^n) の最も強い意味 (合同類) で n 正則胞体からなる正則分割の分類は次の表の symbols で完全になされる。(κ と κ^* は同一視されている。)

(1). $n = 1$: $\kappa = (\kappa_1)$, $\kappa_1 \geq 3$.

(2). $n = 2$:

κ	$\kappa(S_0^2)$	$\kappa(S_1^2)$	$\kappa(S_2^2)$	$\kappa(E_0^2)$	$\kappa(E_1^2)$	$\kappa(H_{p,q}^2)$	$\kappa(H_{p,l}^2)$	$\kappa(H_{p,q}^2)$
κ_1	3	3	3	4	3	3	4	$p \geq 5$
κ_2	3	4	5	4	6	$k \geq 7$	$l \geq 6$	$q \geq 5$

(3). $n = 3$:

κ	$\kappa(S_0^3)$	$\kappa(S_1^3)$	$\kappa(S_2^3)$	$\kappa(S_3^3)$	$\kappa(E_0^3)$	$\kappa(H_0^3)$	$\kappa(H_1^3)$	$\kappa(H_2^3)$			
κ_1	3	3	3	3	4	3	4	5			
κ_2	3	3	3	4	3	5	3	3			
κ_3	3	4	5	3	4	3	5	5			
各面	正4面体	正4面体	正6面体	正4面体	正12面体	正8面体	正6面体	正20面体	正6面体	正12面体	正12面体
面数	5	16	8	600	120	24	∞	∞	∞	∞	∞

(4). $n = 4$:

κ	$\kappa(S_0^4)$	$\kappa(S_1^4)$	$\kappa(E_0^4)$	$\kappa(H_0^4)$	$\kappa(H_1^4)$	$\kappa(H_2^4)$
κ_1	3	3	4	3	4	5
κ_2	3	3	3	3	3	3
κ_3	3	3	3	3	3	3
κ_4	3	4	4	5	5	5
各面	正5面体	正5面体	正8面体	正5面体	正120面体	正120面体
面数	6	32	10	∞	∞	∞

$$\begin{aligned}
 (5) \quad n \geq 5 : \quad & \kappa(S_0^n) = (3, \dots, 3), \\
 & \kappa(S_1^n) = (3, \dots, 3, 4), \\
 & \kappa(E^n) = (4, 3, \dots, 3, 4).
 \end{aligned}$$

(Coxeter, [1], [2] 参照).

(注意). $n = 2$ の場合が最も豊富であり, $n = 3$ のときがそれ続く。Coxeter の honeycombs は後に示されるように, 単連結正則 n -複体の標準形となる。したがって, 単連結でない正則複体は Coxeter の標準形をある合同変換群 ($\cong \pi_1(K)$) でわってえられる。この観点から, 3, 4次元の正則複体は対称性をもった多様体として興味深い。しかし, 未だ十分な研究はなされていない。

補題2. symbol κ あるいは κ^* が上記の表に現われる
正則 n -複体 K は spherical, euclidean あるいは hyperbolic
な凸胞体のなす複体 K に同型となり,

- (i) K の各 n -胞体は Coxeter's honeycomb の n -胞体と合同,
- (ii) K の universal covering $\hat{K}$ は Coxeter's honeycomb に合同同
型となる。とくに, K は完備定曲率空間である。

この補題は K の各 n -胞体に (ii) をみたすように geometric structure
を与えて, 各 $(n-2)$ -胞体のまわりの角度が full angle (2π)
であることを見て, developping map の構成により示される。
このとき, π_2 -正則の条件が使用される。

補題3. symbol κ の正則 n -複体 K が存在し, $\kappa_i \geq 3$ であ
れば, κ は Coxeter's symbol (上表の κ あるいは κ^*) に限ら
れる。

この補題は次え n に関する帰納法で示される。とくに, K
の双対複体 K^* も各双対胞体 (星形胞体) が胞体で, 我々の
意味での胞体的複体であることが示される。

$\kappa_i = 2$ なるときには, K は球面の分割に限られ, 更に,
 m 次元と $n-m-1$ 次元の球面の正則分割の一種の join
分割と表わされる。この観点から, $\kappa_i \geq 3$ ($\forall i$) なる symbol
を単純という。以上をまとめると次の定理となる。

定理 1. 単純な symbol κ をもつ正則 n -複体 K の universal covering $\hat{K}$ は Coxeter's honeycombs の 1 つに同型となる。とくに、 K がコンパクト、単連結ならば、 $|K|$ は n -球面に同相である。(正則複体に対する Poincaré 予想の成立)。

2次元コンパクト Riemann 面 (可定向閉曲面) は
 種数 0 のとき, spherical structure をもち,
 種数 1 のとき, euclidean structure をもち,
 種数 ≥ 2 のとき, hyperbolic structure をもつ。
 種数 0 の正則分割は, Platon 多面体の表面に限られる。
 種数 1 の正則分割は, $(4, 4)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$ 型に限られる。これらのことは良く知られている。
 これに対し, 我々は hyperbolic case について次を得る。

定理 2. 種数 ≥ 2 のすべての閉曲面の正則分割として実現される symbols $\{p, q\}$ (unordered pairs) は,
 $\{3, 7\}$, $\{3, 8\}$, $\{3, 9\}$, $\{3, 10\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$
 であり, これらに限られる。

この定理の証明は, 種数 n の曲面に対し同じことを示し, その d -fold covering の種数が $d+1$ となることで一般種数の正

則分割へ拡張して示される。

Lannér [3] は鏡映群の構造の観点から、正則 ω -complex を分類している。例えば、3角群 $T(2, 3, 7)$ の proper torsion free normal subgroup π に対し、基本群が π となる閉曲面の正則 ω -分割がえられる。逆に、正則 ω -surface に対し、かゝる部分群が対応する。 $(3, 7)$ に対応する我々の種数2の正則分割の基本群は、universal covering の合同変換群として $T(2, 3, 7)$ のある部分群 $\pi_2 (\cong \pi_1(\text{種数2の閉曲面}))$ となるが絶対に正規部分群でない。よく知られているように、 $T(2, 3, 7)$ の最大正規部分群は種数3の閉曲面に対応するからである。正則 ω -複体は代数的に (Coxeter 群 Γ とその正規部分群達 π ^{よって}) 決定されるが、我々の正則複体についてはその点について未知である。

References.

- [1] Coxeter, Regular honeycombs in elliptic space, Proc. London Math. Soc. (3), 4 (1954), 471-509.
- [2] Coxeter, Regular honeycombs in hyperbolic space, Proc. Int. Cong. of Math., Amsterdam, 1954, vol III, 155-169.
- [3] F. Lannér, On complexes with transitive groups of automorphisms. Medd. Lunds Univ. Math. Sem. 11 (1950), 1-71.