

過酷事故に陥った航空機の制御を目指して — 多変数べき級数根の利用 —

Towards Controlling Aircraft in Severe Accidents — Use of Multivariate Power-series Roots —

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *

筑波大学 名誉教授

稲葉大樹 (Daiju Inaba) †

財団法人 日本数学検定協会

Abstract

尾翼がもげて墜落した日航機のように過酷事故に陥った航空機では、機体損壊状況に応じた制御系をその場で作成し、操縦変量を迅速に計算する必要がある。本稿では、パラメトリックな線形制御系を試作し、べき級数近似による適解の計算法を模索する。特に、多変数代数関数の特異点での展開である Hensel 級数の利用可能性を探る。

1 本研究の動機と概要

筆者の一人 (T.S.) は、1980 年代末に近似的代数計算法 (後に一松先生が「近似代数」と命名して下さった) を提唱し、1989 年に 1 変数多項式の近似 GCD (最大公約多項式) の算法を発表、1991 年に多変数多項式の近似 GCD と近似因数分解の算法を考案発表した。筆者らは、近似代数は研究と応用の両面で世界に広まると確信していた。実際、研究面では近似代数は 2000 年を待たずに世界に広まり、計算代数分野の世界的主流研究の一つになった。しかしながら、応用面では全く期待はずれである (成功例はカラー写真のボケ補正)。その理由は、応用分野の研究者は近似代数を知らないか、聞いてはいても内容をよく知らないからだろう、と思う。この状況を打ち破るには、近似代数の算法研究者自身が応用してみせるしかないと思う。昨年、6 年間の懸案だった近似グレブナー基底の理論と算法が不十分ながら出来上がったので、最初の応用例として、悪条件連立代数方程式の分類と、近似特異系と命名した悪条件系を良条件化する方法を発表した [10, 11]。しかし、筆者らが一番応用したいのは、近似 GCD でも近似因数分解でもなく、多変数代数関数の特異点 (critical point) での級数 (Hensel 級数と命名) 展開法である [5, 6, 7, 8]。その理由

*sasaki@math.tsukuba.ac

†d.inaba@su-gaku.net

は、「特異点での数値解析の建設」が数値解析の長年の夢であり、特異点での級数展開がその突破口になると期待するからである

多変数代数関数が実用的に頻出するのは、多項式を要素とする行列の固有値であろう。そのような行列は線形制御理論において中心的に現れる。しかし、筆者らは制御の素人であるし、制御理論を利用する応用分野では一層の素人である。唯一の強みは、多変数代数関数の特異点での実用的な級数展開法を考案した当事者として、その展開法の長所と弱点に精通していることである。「過酷事故に陥った航空機」を取り上げたのは、過酷事故時なら特異点での級数展開法の出番がありそうだと期待したのと、過酷事故時の航空機なら航空工学の専門家も大した理論解析はしていないだろうと思ったからである。過酷事故として、具体的には尾翼が大きく損壊した状況を想定する。

航空機設計の入門書を購入して勉強してみると、航空機の制御用機能をほぼ取り込んだ単一の制御モデルは載っておらず、制御機能が小分けされて記述されているのみだった。そこで、航空機の制御モデルの手作りから研究を開始した。第2章でフラップを無視した運動方程式を作成し、第3章でフラップと左右エンジンの出力差を取り込んだ運動方程式に拡張し、それを線形化して線形制御モデルを構築する。それは、機体の運動性能を表す行列と外部から運動を制御するベクトルで定義される線形微分方程式だが、筆者らの興味の対象は行列の固有値(多変数代数関数)である。

実際に制御モデルを調べてみると、尾翼の損壊度は Hensel 級数とは結びつかなかった。そこで方針を転換して、制御モデルにおいて発生しうる特異点を探し、その Hensel 級数展開を調べることにした。行列の固有多項式の低次項の係数は簡単に因数分解ないし部分因数分解できて、特異点は容易に見つけることができた。しかし、その直後から理想的な状況を仮定して構築された数学理論を、誤差と近似だらけの産業用計算に応用する際の多くの雑事に翻弄されることになった。この雑事は、数学的には大した問題ではないが、数値計算における誤差解析のように面倒で、しかも有用な答えを得るには不可欠である。第4章で現在格闘中の雑事を説明し、近似代数を産業応用する際の教訓とする。そういう訳で、研究の現状は過酷事故機の制御からほど遠いことをお断りする。

2 航空機の制御モデル：エンジンの左右差とフラップを無視

本稿では航空機として標準的な大型旅客機を想定し、左右のジェットエンジン1基ずつ、フラップ(flap)と補助翼(aileron)を持つ主翼、昇降舵(elevator)を持つ水平尾翼、方向舵(rudder)を持つ垂直尾翼(尾翼=tail plate)、を装備しているとする。補助翼は主翼端に近い翼後部にあり、航空機胴体を貫く機軸周りの回転を制御する。なお、左右のエンジンと左右のフラップはそれぞれ独立にパイロットが制御できるものとする。

時間を t で表し、 dX/dt を $\dot{X}$ と表す。航空機の重心を単に重心という。 (x, y, z) を地表に固定された直交座標系とする：垂直軸が z -軸で、 $t = t_0$ に航空機は x -軸方向を向いているとする。航空機の重心の速度を $v = (v_x, v_y, v_z)$ とする。航空工学では航空機に固定された直交座標系も用いる。座標系の原点は重心で、機軸は機首方向を向き胴体を貫く。翼軸は主翼に平行して左から右へ貫く。ヨ一軸は機体を床から天井へ貫く。

本稿では風は考慮しない。この場合、航空機からみれば進行方向と逆方向、すなわち $-v$ 方向の空気流に機体が曝されることになる。飛行中の機体の向きは一般に x 方向でも水平方向でもなく、進行方向も機体の向きとは限らない。機体の傾きを表すのが角度 (ϕ, θ, ψ) で、機体の傾きと進行方向との差を表すのが角度 α, β である。さらに、翼構造を表す角度に後退角 λ と上半角 (dihedral angle) γ がある；上半角は本稿では考慮しない。重要な記号とともに、これら角度とその意味を一覧表にしておく。

symbols and terminology in aircraft engineering

M	機体質量 (mass)	200 ~ 300 トン
G	重力 (gravitation)	$G = -gM : g$ 重力定数
T	推力 (thrust)	$T = T_L + T_R$ (左+右 engines)
L	揚力 (lift)	$L = L_L + L_R$ (左+右 lifts)
D	抗力 (drag)	$D = D_B + D_W$ (body/wing)
ϕ	ロール角 (roll/bank angle)	翼軸が水平面となす上下角度
θ	ピッチ角 (pitch angle)	機軸が水平面となす上下角度
ψ	ヨー角/方位角 (yaw angle)	機軸が x -軸となす左右角度
α	迎え角 (attack angle)	機軸が空気流となす上下角度
β	横滑角 (side-slide angle)	機軸が空気流となす左右角度
λ	後退角 (sweptback angle)	主翼が後ろ方向に傾いた角度
v	機体速度 (ベクトル)	$v = (v_x, v_y, v_z)$

迎え角 α は揚力や抗力の大きさに関係する非常に重要な角度である。横滑角なる名称は、航空機からみると機体が角度 β で横滑りしているようだからである。後退角なる名称は自明だろう。空気流の向きが $-v$ であることから、次の関係式が成立する。

$$\alpha = \theta - \text{atan}(v_z/v_x), \quad \beta = \psi - \text{atan}(v_y/v_x). \quad (2.1)$$

我々は航空機の運動を制御理論の枠組みで定式化することにする。ただし、その定式化は平常時とは大きく異なる。主要要請は次の3点であろう。

1. 平常時の制御系は既知でよく検討済みだが、過酷事故時には機体損壊状況に応じて制御系をその場で作成する必要がある。
2. 平常時の制御系の場合には最適解を時間をかけて計算してよいが、過酷事故時には未知の適解を短時間で計算する必要がある。
3. 平常時の制御系における最重要な指標は安全性と経済性だが、過酷事故時における重要な指標は迅速さと安全性であろう。

要請 1. に対しては、パラメトリックな制御系を採用する；機体損壊状況をパラメータの値を変えることで表せるからである。要請 2. に対しては、線形制御システムを採用する；線形システムならば秒単位で変化する運動の制御が可能であろう。要請 3. に対しては、べき級数近似を採用する；粗い解であっても、迅速に求めることを優先するのである。

多くの制御システムではかなり長い時間スパンにおけるシステム動作が制御されるが、過酷事故時には最適解を求めるわけではなく、秒単位の短い時間スパンで次々と航空機の姿勢を制御することになる。その場合、重要なのは航空機の手速と機体の姿勢であり、航路(軌跡)は重要ではない。そこで、我々は状態変数として次の組を採用する。

$$(v_x, v_y, v_z, \phi, \theta, \psi, \omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi).$$

ここで、 $\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi$ は角速度である： $(\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi) = (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ 。

航空機に働く主な力は、重力 G (垂直方向)、推力 T (ほぼ機首方向)、揚力 L (主翼面にほぼ垂直)、抗力 $D = D_W + D_B$ (D_W は揚力の後向き成分、 D_B は空気流が機体に及ぼす力で $-v$ 方向)、水平尾翼による揚力 P_h (α に比例)、垂直尾翼による横向き力 P_v (β に比例) である。主なトルクは、 P_h による翼軸周りの回転力、 P_v によるヨー軸と機軸周りの回転力、および Q_{ai}, Q_{el}, Q_{ru} (それぞれ補助翼、昇降舵、方向舵による回転力) である。フラップは重要な揚力発生装置であるが、フラップが生む力とトルク、およびエンジンとその左右出力差がもたらすトルクは次章で扱う。後退角の効果は少し後で述べる。

$L = |L|, D = |D_B|, P_* = |P_*|$ ($*$ は h または v) とする。これらに関しては次の有名な公式がある ($\frac{1}{2}$ が掛かっていないことに注意)；以下、 $V = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ とする。

$$L = \rho V^2 S_W C_L, \quad D = \rho V^2 S_B C_D, \quad P_* = \rho V^2 S_* C_p. \quad (2.2)$$

ここで、 ρ は空気密度、 S_W, S_B, S_* はそれぞれ主翼面積 (両翼)、胴体面積 (前面+側面)、尾翼面積である。 C_L, C_D はそれぞれ揚力係数、抗力係数と呼ばれている。重要なことは C_L が $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$ の範囲で α にほぼ比例し、 $\alpha = 0$ の水平飛行状態でも $C_L > 0$ なことである。また、 D は L の $1/10$ ほどの小ささである。

運動方程式を立てる際、 C_L は α に依存するから注意が必要である； C_D の α 依存性は小さい。筆者らは、上記 L から α に依存する部分を抜きだして、 $L = (\alpha_m + \alpha) \tilde{L}$ と表す。ここで、 $\alpha_m \tilde{L}$ は水平飛行時 ($v_z = 0$ の状態、 $\theta > 0$ の状態を含んでもよい) の揚力を表し、 $\alpha_m = 1^\circ \sim 4^\circ$ である。ただし、尾翼は $\alpha_m \tilde{L}$ に対応する揚力を生まない。次に、後退角の効果を考える。主翼は上面が緩やかに湾曲していて水平飛行時の揚力を生んでいるが、その揚力の大きさは曲率に比例すると考えられる。機体が角度 β で左方向へ横滑りしているとする。この場合、空気流は角度 $\lambda - \beta, \lambda + \beta$ でそれぞれ左右の主翼に当たるので、 $\beta \ll \lambda$ として、左右の揚力 L_L と L_R の比と差は次式で近似できるだろう。

$$\frac{L_L}{L_R} \approx \frac{\cos(\lambda - \beta)}{\cos(\lambda + \beta)} \Rightarrow L_L - L_R \simeq L \tan \lambda \sin \beta \quad \text{for } \beta \ll 1. \quad (2.3)$$

航空機を左旋回させるには機体を左に傾け (ロール角 ϕ をプラスにする)、主翼による揚力に左向き成分を生じさせるのが普通だが、ロール角の変動は航空機を不安定にする大きな要因である。後退角には機体の傾きを元に戻して安定化させる重要な機能がある。なお、 $\omega_\psi \neq 0$ の場合、左右の翼に当たる空気流の速さが異なるので L_L と L_R に差が生じ、差は $L_L - L_R \approx 4 l_W (\alpha_m + \alpha) (\tilde{L}/V) \omega_\psi$ となる； l_W については下記参照。

以上より下記の運動方程式系を得る。ここで、 I_ϕ, I_θ, I_ψ はそれぞれ機軸、翼軸、ヨー軸周りの機体の回転モーメントであり、 l_W は主翼揚力中心と機軸間の距離、 l_T は尾翼中心と翼軸間の距離で、 L と同様に $P_h = \alpha \tilde{P}_h$, $P_v = \beta \tilde{P}_v$ とおいた。

$$M\dot{v}_x = T \cos \theta \cos \psi - Dv_x/V - (\alpha_m + \alpha) \tilde{L} \sin \theta, \quad (2.4)$$

$$M\dot{v}_y = T \cos \theta \sin \psi - Dv_y/V - (\alpha_m + \alpha) \tilde{L} \cos \theta \sin \phi + \beta \tilde{P}_v, \quad (2.5)$$

$$M\dot{v}_z = T \sin \theta - gM - Dv_z/V + (\alpha_m + \alpha) \tilde{L} \cos \theta \cos \phi + \alpha \tilde{P}_h, \quad (2.6)$$

$$I_\phi \dot{\omega}_\phi = Q_{ai} - l_W(\alpha_m + \alpha) \tilde{L} [\tan \lambda \sin \beta + 4(l_W/V)\omega_\psi] - \beta l_v \tilde{P}_v, \quad (2.7)$$

$$I_\theta \dot{\omega}_\theta = Q_{el} - \alpha l_T \tilde{P}_h, \quad (2.8)$$

$$I_\psi \dot{\omega}_\psi = Q_{ru} - \beta l_T \tilde{P}_v. \quad (2.9)$$

上記の運動方程式は非線形なので線形化する。まず、無次元速度 (u_x, u_y, u_z) を

$$v_x = V_0(1 + u_x), \quad v_y = V_0 u_y, \quad v_z = V_0 u_z, \quad (2.10)$$

により導入する。ここで、 V_0 は $t = t_0$ での航空機の速さである。 u_* の2次項を棄却すると $V \simeq V_0(1 + u_x)$, $v_x/V \simeq 1$, $v_y/V \simeq u_y$, $v_z/V \simeq u_z$ を得る。これらより、(2.2) の L, D, P_* が次のように近似される；以下で L_0 や $\tilde{L}_0$ などは $t = t_0$ での値である。

$$L \simeq L_0(1 + 2u_x), \quad D \simeq D_0(1 + 2u_x), \quad P_* \simeq P_{*0}(1 + 2u_x).$$

次に、 θ, ϕ, ψ が大きいことは航空機が危機的状況にあることなので、そうならないように制御されるとして、これらの2次項や u_x, u_y, u_z との積を棄却する： $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$, $\sin \alpha \simeq \theta - u_x$, $\sin \beta \simeq \psi - u_y$ 等。問題は(2.4)の $(\alpha_m + \alpha) \sin \theta$ 等である：これらを0とすれば重要な力を無視してしまう。そこで、 α_0 を $t = t_0$ での α の値とし $\alpha - \alpha_0$ を微小量として、 $(\alpha_m + \alpha) \tilde{L} \sin \theta \simeq (\alpha_m + \alpha_0) \tilde{L}_0 \theta$ と近似する。(2.6) と (2.7) では $(\alpha_m + \alpha) \tilde{L} \simeq (\alpha_m + \theta - u_x) \tilde{L}_0 + 2(\alpha_m + \alpha_0) \tilde{L}_0 u_x$, $(\alpha_m + \alpha) \sin \beta \simeq (\alpha_m + \alpha_0)(\psi - u_y)$ と近似する。

以上より、線形化された常微分方程式系として次式を得る。

$$\dot{U} = AU + b, \quad U = (u_x, u_y, u_z, \phi, \theta, \psi, \omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi)^t, \quad (2.11)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2D' & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{m0}L' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D' - P'_v & 0 & -\alpha_{m0}L' & 0 & T' + P'_v & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_{m0}L' & 0 & -D' - L' - P'_h & 0 & L' + T' + P'_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{m0}L' + Q'_v & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{m0}L' - Q'_v & 0 & 0 & -\alpha_{m0}Q'_o \\ 0 & 0 & Q'_h & 0 & -Q'_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q'_v & 0 & 0 & 0 & -Q'_v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} T'_d \\ 0 \\ L'_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q'_{ai} \\ Q'_{el} \\ Q'_{ru} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

ここで、 $\alpha_{m0} = \alpha_m + \alpha_0$ であり、簡単のため次の記号を導入した。

$$\left\{ \begin{array}{lll} L' = \tilde{L}_0/MV_0, & L'_d = (\alpha_m \tilde{L}_0 - gM)/MV_0, & D' = D_0/MV_0, \\ T' = T/MV_0, & T'_d = (T - D_0)/MV_0, & A' = l_W \tilde{L}_0 \tan \lambda / I_\phi, \\ Q'_o = 4 l_W^2 \tilde{L}_0 / (V_0 I_\phi), & P'_h = \tilde{P}_{h0}/MV_0, & P'_v = \tilde{P}_{v0}/MV_0, \\ Q''_v = l_v \tilde{P}_{v0}/I_\phi, & Q'_h = l_T \tilde{P}_{h0}/I_\theta, & Q'_v = l_T \tilde{P}_{v0}/I_\psi, \\ Q'_{ai} = Q_{ai}/I_\phi, & Q'_{ei} = Q_{ei}/I_\theta, & Q'_{ru} = Q_{ru}/I_\psi. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

【注釈1】 航空機が $t = t_0$ で x -軸方向を向いていると仮定したり、 α を α_0 と近似したことが示すように、上記の微分方程式系は $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ の短い時間間隔でしか成立しない；航空機が突風などでふらつく様子を見ると、 Δt は秒単位である。 Δt 秒後には、 V_0 や α_0 などの値を更新する必要がある、その結果、微分方程式系も更新される。 □

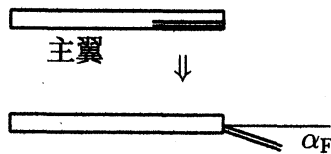
3 過酷事故時の制御モデル：フラップとエンジンを利用

本稿では過酷事故として、主翼は無事だが、水平尾翼と垂直尾翼の一方あるいは両方が部分的または全面的に破損された事態を想定する；主翼が大きく破損された航空機は飛行できないから。そのような航空機を制御する手段として、フラップとエンジンを用いる。

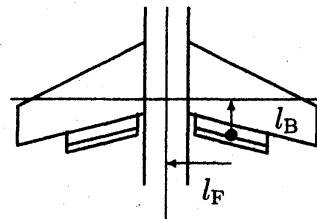
本章以降では、(2.11) の行列と (2.12) のベクトルをそれぞれ A_0, b_0 と表し、フラップとエンジンに対する行列とベクトルを A_F, b_F と表し、 A, b を下記とする。

$$A = A_0 + A_F, \quad b = b_0 + b_F. \quad (3.1)$$

フラップは通常、離着陸時に大きな揚力を得るために使用される。フラップには種々のタイプがあるが、三つの性質を持つと仮定する。i) 不使用時には主翼に収納されている。ii) 使用する際は必要な長さ（一定値以下）だけ後方に引き出される。iii) 主翼から相対的に角度 α_F だけ下方方向に引き出される；ここで、 $\alpha_F \approx 15^\circ \sim 20^\circ$ である。機軸から一定の距離にある主翼部分では揚力中心は前縁から約 $1/4$ の場所にある。すなわち、フラップは翼軸より後方であって翼軸周りのトルクを生み、左右の引出し幅が異なれば機軸周りとヨー軸周りのトルクも生む（下図参照）。エンジンは大抵主翼の下に位置していて翼軸周りのトルクを生み、左右の出力が異なればヨー軸周りのトルクも生む。



フラップ：収納時（上）と展開時（下）



距離 l_F, l_B の図解

前章で左翼と右翼に働く揚力を L_L, L_R と表した。同様に、左フラップと右フラップに働く揚力を F_L, F_R と表し、左エンジンと右エンジンの推力を T_L, T_R と表す。フラップの

揚力中心は機軸と翼軸からそれぞれ l_F , l_B の距離にあり、エンジンは機軸から l_E 、翼軸から下へ l_D の距離に設置されているとする。フラップに働く揚力は面に垂直で、 (x, y, z) 座標系で $(-F_* \sin(\alpha_F + \theta), -F_* \cos(\alpha_F + \theta) \sin \phi, F_* \cos(\alpha_F + \theta) \cos \phi)$ と表される (* は L または R)。フラップとエンジンの生むトルクは機体座標系でそれぞれ

$$\begin{aligned} & (-l_F(F_L - F_R) \cos \alpha_F, -l_B(F_L + F_R) \cos \alpha_F, -l_F(F_L - F_R) \sin \alpha_F), \\ & (0, l_D(T_L + T_R), l_E(T_L - T_R)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

と表される；第一成分から順に、機軸周り、翼軸周り、ヨー軸周りである。

フラップに当たる空気流は主翼で角度 α_{m0} だけ曲げられているので、フラップの揚力は α_F に比例する。フラップの引出し幅は可変なので、 $F_* = f_* \alpha_F \tilde{F}$ (* は L または R) と表す。同様に、推力 T に対し $T_2 = T/2$ とおき、 $T_* = (1 + e_*)T_2$ と表す。ここで、

$$0 \leq f_L, f_R \leq 1, \quad -0.5 \lesssim e_L, e_R \lesssim 2 \sim 3, \quad (3.3)$$

である (e_L, e_R に関する制約は筆者らが勝手に定めた)。最後に、 $f_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} f_L \pm f_R$, $e_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} e_L \pm e_R$ とおくと、フラップとエンジンの左右差を取り入れた運動方程式が得られる。

$$M\dot{v}_x = (\text{r.h.s. in (2.4)}) - f_+ \alpha_F \tilde{F} \sin(\alpha_F + \theta), \quad (3.4)$$

$$M\dot{v}_y = (\text{r.h.s. in (2.5)}) - f_+ \alpha_F \tilde{F} \cos(\alpha_F + \theta) \sin \phi, \quad (3.5)$$

$$M\dot{v}_z = (\text{r.h.s. in (2.6)}) + f_+ \alpha_F \tilde{F} \cos(\alpha_F + \theta) \cos \phi, \quad (3.6)$$

$$I_\phi \dot{\omega}_\phi = (\text{r.h.s. in (2.7)}) - f_- l_F \alpha_F \tilde{F} \cos \alpha_F, \quad (3.7)$$

$$I_\theta \dot{\omega}_\theta = (\text{r.h.s. in (2.8)}) - f_+ l_B \alpha_F \tilde{F} \cos \alpha_F + (2 + e_+) l_D T_2, \quad (3.8)$$

$$I_\psi \dot{\omega}_\psi = (\text{r.h.s. in (2.9)}) - f_- l_F \alpha_F \tilde{F} \sin \alpha_F + e_- l_E T_2. \quad (3.9)$$

前章と同様、上式を線形化するが、 α_F が小さいとはしない。まず、(3.9) で $e_- l_E T_2$ に比べてフラップ項は小さいので無視する。次に、(3.4) ~ (3.6) のフラップ項は、 $\theta^2, \theta u_z$ などの2次項を棄却して次のように近似する： $\alpha_F \sin(\alpha_F + \theta) \simeq \alpha_F \sin \alpha_F + \alpha_F \cos \alpha_F \theta$, $\alpha_F \cos(\alpha_F + \theta) \sin \phi \simeq \alpha_F \cos \alpha_F \sin \phi$, $\alpha_F \cos(\alpha_F + \theta) \cos \phi \simeq \alpha_F \cos \alpha_F \cos \phi - \alpha_F \sin \alpha_F \theta$.

以上より、フラップとエンジンの左右差を取り入れた線形制御モデルが得られた。

$$\dot{U} = (A_0 + A_F)U + (b_0 + b_F), \quad (3.10)$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -f_+ F_{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f_+ F_{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_+ F_{as} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_F = \begin{pmatrix} -f_+ F_{as} \\ 0 \\ f_+ F_{ac} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_- H_{\phi ac} \\ -f_+ H_{\theta ac} + (2 + e_+) T'_\theta \\ -f_- H_{\psi as} + e_- T'_\psi \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

ここで、フラップとエンジンに対して次の記号を導入した。

$$\begin{cases} F_{ac} = (\tilde{F}/MV_0)\alpha_F \cos \alpha_F, & F_{as} = (\tilde{F}/MV_0)\alpha_F \sin \alpha_F, \\ H_{\phi ac} = (l_F \tilde{F}/I_\phi)\alpha_F \cos \alpha_F, & H_{\theta ac} = (l_B \tilde{F}/I_\theta)\alpha_F \cos \alpha_F, \\ H_{\psi as} = (l_F \tilde{F}/I_\psi)\alpha_F \sin \alpha_F, & T'_\theta = l_D T_2/I_\theta, \quad T'_\psi = l_E T_2/I_\psi, \end{cases} \quad (3.12)$$

なお、左右エンジンの出力差のため、(2.13) の T' と T'_d を次式のように再定義する。

$$T' = (2 + e_+)T_2/MV_0, \quad T'_d = [(2 + e_+)T_2 - D_0]/MV_0. \quad (3.13)$$

4 制御モデルの理論的・数値的解析

よく知られているように、(2.11) あるいは (3.10) の解は次式で与えられる。

$$U = e^{A(t-t_0)}U_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-t')}b(t')dt'. \quad (4.1)$$

ここで、 U_0 は $t = t_0$ での初期状態を表す。 A は外力に対する機体の反応の仕方を表し、 b は専ら機体を操縦するためのパイロットの操作を表す。(4.1) より、 $t - t_0$ が大きいときの U は A の固有値で特徴付けられること、 $t \rightarrow \infty$ で U が発散しないためには固有値の実部が全て負であること、固有値の虚部は状態変数の振動を表すこと、などがわかる。本章では A の固有値にターゲットを絞り、Hensel 級数の出現を探る。

A と b は多くのパラメータを含むが、それらは次の三種類に分類できる。

$$\begin{aligned} \text{航空機定数: } & L', L'_d, D', A', P'_h, P'_v, Q'_o, Q'_h, Q'_v, Q''_v, \\ \text{初期迎え角: } & \alpha_{m0}, \\ \text{操縦士変数: } & \phi_{ai}, \theta_{el}, \psi_{ru}, e_+ (\rightarrow T', T'_d, T'_\theta), e_- (\rightarrow T'_\psi), \\ & f_+ (\rightarrow H_{\theta ac}), f_- (\rightarrow F_{ac}, F_{as}, H_{\phi ac}, H_{\psi as}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

注釈1で述べたように、初期迎え角は微分方程式の更新の度に变化するが、値として0も取り得る。航空機“定数”も更新の度に变化するが、操縦に必要なのは操縦士変数の決定であり、操縦士変数は航空機定数に数値を代入してから決めるのが普通である。よって、固有値の級数展開では A をパラメータ α_{m0}, e_+, f_+ のみの行列に落として計算する。

A の固有多項式は因子 X を含むので、その因子を除いて $|XI_9 - A|/X = C(X) = X^8 + C_7X^7 + \dots + C_1X + C_0$ とおくと、 $C_7 = L' + 4D' + P'_h + P'_v$, 等々となり、 C_0, C_1, C_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \times \alpha_{m0} Q'_o Q'_h Q'_v \times (\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}) \\ &\quad \times ([T' - D'] D' - \alpha_{m0} L' [\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}] - f_+ F_{ac} D'), \\ C_1 &= \alpha_{m0} Q'_o Q'_h Q'_v \times (T' - 3D' - f_+ F_{ac}) \times (\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}) \\ &\quad + 2 \times Q'_h \times (-[T' - D'] D' + \alpha_{m0} L' [\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}] + f_+ F_{ac} D') \\ &\quad \times (-[T' - D'] Q'_v + [\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}] \times [\alpha_{m0} R' + Q''_v]), \\ C_2 &= -\alpha_{m0} Q'_o Q'_v \times (\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}) \times (2L' D' + 2D'^2 + 2D' P'_h + Q'_h) \\ &\quad - \alpha_{m0} R' Q'_h \times (T' - 3D' - f_+ F_{as}) \times (\alpha_{m0} L' + f_+ F_{ac}) \\ &\quad + Q'_h \times (T'^2 Q'_v - 6T' D' Q'_v + 5D'^2 Q'_v + 10 \text{ terms}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

上記 C_0, C_1 より、 $C(X)$ は $Q'_v = 0$ ならば原点に根を持ち $Q'_h = 0$ ならば2重根を持つ。 $C(X)$ の根の重根近辺での展開級数が Hensel 級数なので、 Q'_h と Q'_v を可変なパラメータと扱えば根の幾つかは Hensel 級数で表されることが分る。実際には Q'_h と Q'_v は航空機の損壊状況に応じて決まる“定数”であり、 $C(X)$ の可変パラメータは α_{m0}, e_+, f_+ である。一方、上記 C_0, C_1 は $(\alpha_{m0}, f_+) = (0, [T' - D']/F_{ac})$ も特異点であることを示す。このとき主翼の揚力が0になるので、特異点という用語がピッタリである。次節では航空機定数を具体的に定めて、 $\alpha_{m0} = 0$ 近辺での Hensel 級数展開を調べる。

4.1 固有多項式の数値的検討

本節では kg, m, s はそれぞれ kilogram, meter, second を表す。重力定数 g と地上での空気密度 ρ_0 は $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ (0°C での値) である。空気密度 ρ は 5500 m 上空では ρ_0 の約半分に減少する。

航空機は、重量 250 トン (胴体 $150 +$ 主翼&燃料 100)、胴体長 50m 、翼幅 (左翼端から右翼端まで) 50m 、胴体直径 6m の大きさとする。他の航空機定数は下記のように定めた； I_ϕ, I_θ, I_ψ は著者らが推定したが、その値には自信がない。

$$\begin{cases} M = 250000 \text{ kg}, S_W = 350, S_B = 1000, S_p = 100 \text{ m}^2, \\ l_W = 12, l_E = 10, l_D = 1.5, l_T = 30, l_v = 6 \text{ m}, \lambda = 30^\circ, \\ I_\phi = 1.8 \times 10^7, I_\theta = 4.0 \times 10^7, I_\psi = 4.8 \times 10^7 \text{ kg m}^2. \end{cases} \quad (4.4)$$

航空機は、 $\rho = 0.5 \text{ kg/m}^3$ の高空を時速 900 キロ (秒速 250m) で水平飛行しているとする。 C_p の値が不明なので $C_p = C_L$ と仮定し、(2.13) の航空機定数を次のように定める。まず、 $L'_d = 0$ より $\alpha_m \tilde{L}_0 = gM \simeq 2.45 \times 10^6 \text{ kg m/s}^2$ 。教科書 [1] によると、 α と β に対する揚力係数の増加率は 1° 当たり約 0.11 なので、主翼と尾翼の揚力増加率はそれぞれ 1 radian 当たり $6.90 \times 10^7, 1.97 \times 10^7 \text{ (kg m/s}^2)$ である。これより、 $\alpha_m \simeq 0.0355 \text{ rad} = 2.035 \text{ deg}$ となる。 $T'_d = 0$ より $T = D_0 \simeq L_0/10 \Rightarrow D_0 \simeq 2.45 \times 10^5 \text{ kg m/s}^2$ 。また、 $\tilde{P}_{h0} = \tilde{P}_{v0} = (S_p/S_W) \tilde{L}_0 \simeq 1.97 \times 10^7 \text{ kg m/s}^2$ 。以上より、 $L' \simeq 1.10/\text{s}$, $T' = D' \simeq 0.00392/\text{s}$, $P'_h = P'_v \simeq 0.315/\text{s}$, $A' \simeq 26.5/\text{s}^2$, $Q'_0 \simeq 8.83/\text{s}^2$, $Q'_h \simeq 14.8/\text{s}^2$, $Q'_v \simeq 12.3/\text{s}^2$, $Q''_v \simeq 6.57/\text{s}^2$ と定まる。

フラップ (左+右)、補助翼 (左+右)、昇降舵 (左+右)、方向舵に関するパラメータは

$$\begin{cases} \text{面積: } 50 \text{ (flap), } 10 \text{ (aileron), } 20 \text{ (elevator), } 20 \text{ (rudder) m}^2, \\ \alpha_F = 0.30 \text{ rad. (17.20}^\circ), l_F = 10 \text{ m}, l_B = 4 \text{ m}, l_{ai} = 20 \text{ m}, \end{cases} \quad (4.5)$$

とする； l_{ai} は補助翼中心と機軸との距離である。 F_* は、フラップを最大限に引き出したときその表面に生じる力で、 $F_* = \alpha_F \tilde{L}_0 (S_F/S_W) \simeq 1.48 \times 10^6 \text{ kg m/s}$ である。これより $F_{ac} \simeq 0.023/\text{s}$, $F_{as} \simeq 0.0067/\text{s}$ と定まる。 b に現れるパラメータは以下では使用しない。

行列 A の固有多項式に航空機定数として、 $L' = 1.10$, $D' = 0.0039$, $T'_2 = 0.0020$, $P'_h = 0.315$, $P'_v = 0.315$, $A' = 26.5$, $Q'_0 = 8.83$, $Q'_h = 14.8$, $Q'_v = 12.3$, $Q''_v = 6.57$, $F_{ac} = 0.023$, $F_{as} = 0.0067$, を代入したものを $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+)$ とする。 $\bar{C}$ は $\alpha_{m0} = 0$ に根を持つので、その点の近傍での $\bar{C}$ の Taylor 級数根の振舞いを見てみよう。 $\alpha_{m0} = 0.001$ では $\bar{C}(X, 0.001, 0, 0)$ とその根は次のようになる ($\#(a, b)$ は複素数 $a+bi$ を表す)：

$X^8 + 1.746X^7 + 27.57X^6 + 22.39X^5 + 182.2X^4 + 1.491X^3 - 0.000784X^2 - 1.35e-5X - 2.9e-9$,
 $\#(-0.7095, \pm 3.781)$, $\#(-0.1592, \pm 3.504)$, -0.007481 , -0.003371 , 0.002881 , 0.0002192 .
 -0.003371 , 0.002881 に対する級数根は発散するが (前者に対する級数を以下に示す),
 -0.007481 に対するものは収束・発散が微妙で, 0.0002192 に対する級数根は収束する。

$$\begin{aligned} & -0.003371 - 0.03914f_+ + 0.001079e_+ \\ & + 0.1677f_+^2 + 0.001148f_+e_+ - 0.000159e_+^2 \\ & - 1.769f_+^3 - 0.007892f_+^2e_+ + 0.001705f_+e_+^2 - 3.97e-6e_+^3, \end{aligned}$$

α_{m0} の値をさらに小さくしても, これら 3 根の収束・発散状況は変わらない。

4.2 多項式行列の固有値と固有ベクトルの級数展開

パラメータ α_{m0}, e_+, f_+ に対して全次数変数 τ を導入し, 行列 $\tilde{A}$ を次のように定義する (変数 τ は計算の便宜上導入するもので, 計算が終了すれば 1 とする)。

$$\tilde{A}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} A_{\text{low}} + \tau A_{\text{high}}, \text{ where } A = A_{\text{low}} + A_{\text{high}}, \quad A_{\text{low}} = A(e_+ = f_+ = 0). \quad (4.6)$$

A_{low} は数値行列なので, その固有値と固有ベクトルは簡単に計算できる: $A_{\text{low}} \mathbf{v}_i^{(0)} = \zeta_i \mathbf{v}_i^{(0)}$ ($i=1, \dots, 9$)。 $\tilde{A}(\tau)$ の固有値 $\lambda_i(\tau)$ と固有ベクトル $\mathbf{v}_i(\tau)$ が τ で級数展開できるとする:

$$\lambda_i(\tau) = \zeta_i + \tau \lambda_i^{(1)} + \tau^2 \lambda_i^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{v}_i(\tau) = \mathbf{v}_i^{(0)} + \tau \mathbf{v}_i^{(1)} + \tau^2 \mathbf{v}_i^{(2)} + \dots \quad (4.7)$$

固有値 $\lambda_i(\tau)$ は固有多項式 $\tilde{C}(X, \tau) = |XI_9 - \tilde{A}(\tau)|$ の根なので, $\tilde{C}(\lambda_i(\tau), \tau) \equiv 0 \pmod{\tau^{k+1}}$ を満たすように, $k=1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \dots$ と逐次的に計算する。今の場合 $\tilde{C}(X, \tau)$ は τ の 2 次多項式なので, $\tilde{C}(X, \tau) = \tilde{C}_0(X) + \tau \tilde{C}_1(X) + \tau^2 \tilde{C}_2(X)$ とおく。 $\lambda_i(\tau)$ の計算は簡単だが, 展開級数の特徴を表す表現を得るには文献 [7] のように行くとよい。簡単のため, 本稿では $\zeta_9 = 0$ とし, $\lambda_1(\tau)$ に対する 3 次までの結果式のみを示す。

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau) = & \zeta_1 - \tau R_{1,1} - \tau^2 [R_{2,1} + R_{1,1}(\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{R}_1)] \\ & - \tau^3 [R_{1,1}(\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{R}_2) + R_{2,1}(\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{R}_1) - R_{1,1}^2(\mathbf{q}^2 \cdot \mathbf{R}_1) - R_{1,1}(\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{R}_2)^2]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで, $R_{l,1}$ と $(\mathbf{q}^m \cdot \mathbf{R}_l)$ ($l=1, 2$) は次式で定義される量である。

$$R_{l,i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{C}_l(\zeta_i)}{\tilde{C}'_0(\alpha_i)} \quad (i=1, \dots, 9), \quad \mathbf{R}_l \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(R_{l,2}, \dots, R_{l,9}), \quad (l=1, 2) \quad (4.9)$$

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\zeta_j - \zeta_1} \quad (j=2, \dots, 9), \quad \mathbf{q}^m \stackrel{\text{def}}{=} (q_2^m, \dots, q_9^m) \quad (m=1, 2, \dots), \quad (4.10)$$

$$\text{inner product: } (\mathbf{q}^m \cdot \mathbf{R}_l) \stackrel{\text{def}}{=} q_2^m R_{l,2} + \dots + q_9^m R_{l,9}. \quad (4.11)$$

上記の表現を見ると, 近接固有値がある場合に展開級数の高次項が大きくなる様子が詳細に分る。なお, $R_{1,1}$ と $R_{2,1}$ を $R_{1,1} + \tau R_{2,1}$ とまとめると, より簡潔な表現が得られる。

固有値が級数展開できれば固有ベクトルが下記のように逐次的に計算できる。まず、

$$(A_{\text{low}} + \tau A_{\text{high}})(\mathbf{v}^{(0)} + \cdots + \tau^j \mathbf{v}^{(j)}) \equiv (\zeta + \cdots + \tau^j \lambda^{(j)}) \cdot (\mathbf{v}^{(0)} + \cdots + \tau^j \mathbf{v}^{(j)}) \pmod{\tau^{j+1}}$$

を満たす固有ベクトルが $j=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow k-1$ と計算できたと仮定する (簡単のため添え字 i を省略)。上式が $j=k \geq 1$ でも成立するには、次の式が成り立てばよい。

$$A_{\text{low}} \mathbf{v}^{(k)} + A_{\text{high}} \mathbf{v}^{(k-1)} = \zeta \mathbf{v}^{(k)} + \lambda^{(1)} \mathbf{v}^{(k-1)} + \cdots + \lambda^{(k-1)} \mathbf{v}^{(1)}. \quad (4.12)$$

仮定より $\lambda^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}$ ($j \geq 1$) は e_+, f_+ の多項式で、上式で未知量は $\mathbf{v}^{(k)}$ だけであり、 $\zeta \in \mathbb{C}$, $A_{\text{low}} \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$ なので、 $\mathbf{v}^{(k)}$ は多項式要素のベクトルとして計算できる。

4.3 Hensel 級数展開の実際

以上の話は A_{low} の孤立固有値に対するものである。重固有値に対しては上記のような Taylor 級数展開は不可能で、近接固有値の場合は展開級数の収束領域が非常に狭くなる。重固有値の場合に有用なのが Hensel 級数展開である。しかし、応用では大きさの異なる係数が混在することが普通で近接固有値も頻繁に現れるので、事態は単純ではない。

Hensel 級数展開では、原点が特異点の場合、項 X^{d+re} (τ は従変数 α_{m0}, e_+, f_+ に対する全次数変数) に対し、 $d+re$ (r は与式から決まる有理数) が一定値以下のものは現れないと仮定する。しかし、浮動小数演算では誤差のみからなる項が残り、近接固有値があれば“微小項”が多く現れて仮定は微妙になる。微小項の判定には与多項式をスケールリングで標準化するのがよい。従変数の組を $\mathbf{u}$ とすれば、スケールリングは次のように行う。

$$\bar{C}(X, \mathbf{u}) = X^n + \bar{C}_{n-1}(\mathbf{u})X^{n-1} + \cdots + \bar{C}_0(\mathbf{u}), \quad \max\{|\bar{C}_{n-j}(\mathbf{0})| \mid j \geq 1\} = 1. \quad (4.13)$$

前節の $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+)$ で Hensel 級数展開の手順を追跡してみよう。まず、特異点を原点に移動する。特異点では $f_+ = [T' - D']/F_{ac}$ なので、 $f_+ \rightarrow f'_+ + [T' - D']/F_{ac}$ と平行移動し (簡単のため、変換後の多項式も $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+)$ と表す)、 $\bar{C}(X, 0, 0, 0)$ が重根を持つように X も平行移動する。筆者らは重根の位置を求めるのに近似無平方分解を利用する。今の場合、近似無平方分解は三つあって、次のようになる。

$$\begin{aligned} & (X + 0.0003703 \cdots)^4 \times (X^4 + 0.33099X^3 + 0.9995X^2 + 0.1532X + 0.2396), \\ & (X - 7.4044e-6)^3 \times (X^5 + 0.3325X^4 + \cdots + 0.1547X^2 + 0.2398X + 0.000356), \\ & (X - 9.4747e-6)^2 \times (X^6 + 0.3325X^5 + \cdots + 0.2398X^2 + 0.000355X - 1.226e-9). \end{aligned}$$

上記の近似無平方分解の許容度はそれぞれ $4.46e-6$, $6.77e-11$, $1.25e-14$ である。最近接した2根を Hensel 級数展開したいが、それら2根を含むクラスタを分離する際に大きな桁落ちが発生することが分っている [12]。したがって、本稿では3根を分離するに止め、3根クラスタの中心へ原点移動する。すると、許容度が $6.77e-11$ なので、 $O(10^{-10})$ 程度の微小項が残るだろうから、 10^{-10} 以下の微小項を棄却する。

例1 $f_+ \rightarrow f_+ + 0.0043478$ と平行移動し、 $X \rightarrow 0.19046X$ とスケール変換し、 $X \rightarrow X + 7.4044e-6$ と原点移動した後の $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+)$ の X^{d+e} -項の係数 $\bar{C}_{d+e}$ ($d+e \leq 2$).

$$\begin{aligned}\bar{C}_0 &= 2.370e-20, \\ \bar{C}_1 &= -1.681e-14 X - 4.272e-17 f_+ + 7.629e-18 e_+ + 6.799e-14 \alpha_{m0}, \\ \bar{C}_2 &= -6.766e-11 X^2 + 3.778e-12 X f_+ - 9.822e-13 X e_+ - 1.135e-8 X \alpha_{m0} \\ &\quad + 7.908e-15 f_+^2 - 3.648e-15 e_+ f_+ + 3.843e-16 e_+^2 \\ &\quad + 1.844e-12 \alpha_{m0} f_+ + 4.246e-12 \alpha_{m0} e_+ + 7.081e-10 \alpha_{m0}^2.\end{aligned}\quad (4.14)$$

全次数が0と1の項は浮動小数の機械イプシロン程度なので、完全誤差項とみなして棄却する。また、強引だが、全次数が2の項も 10^{-10} 未満の項は棄却する。

次の手順は、次式による近接根因子の分離である (多変数 Hensel 構成) :

$$\bar{C}(X, u) \equiv \tilde{C}^{(k)}(X, u) \hat{C}^{(k)}(X, u) \pmod{(X, \tau)^{k+1}}, \quad \hat{C}^{(k)}(X, u) = X^3. \quad (4.15)$$

ここで (4.14) が示すように、 $\bar{C}_0 = \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ なので、 k は必要とする近接根クラスターの全次数より2だけ大きく選ぶ。すると、 $\hat{C}^{(k)}(X, u)$ が3近接根因子を与える。参考までに $\hat{C}^{(k)}(X, u)$ を従変数の全次数2まで記す; 下線部の項に注目。

$$\begin{aligned}X^3 + X^2 \times (&0.1172 \alpha_{m0} + 0.00362 f_+ - 0.000764 e_+ \\ &+ 59.11 \alpha_{m0}^2 + 1.238 \alpha_{m0} f_+ - 0.00685 \alpha_{m0} e_+ \\ &+ 9.68e-6 f_+^2 - 4.59e-6 f_+ e_+ + 9.84e-5 e_+^2 + \dots) \\ + X^1 \times (&\underline{-3.173e-5 \alpha_{m0}} - 0.3514 \alpha_{m0}^2 - 0.00720 \alpha_{m0} f_+ - 3.67e-5 \alpha_{m0} e_+ \\ &+ 3.00e-6 f_+ - 1.38e-6 f_+ e_+ + \dots) \\ + X^0 \times (&\text{only terms of total-degrees} \geq 3).\end{aligned}\quad (4.16)$$

上記下線部の項のため、Hensel 級数は従変数に関して互いに共役な2根 (下記で $\pm\sqrt{\alpha_{m0}}$ に比例するもの) と有理的な1根に分れる。以下に最低次項と次の項を示す。

$$\begin{aligned}\pm\sqrt{\alpha_{m0}} \times \{ &-5.633e-3 - 30.92 \alpha_{m0} - 1.397e-3 e_+ - 0.6481 f_+ \\ &- (1.30e-5 e_+^2 + 5.47e-8 e_+ f_+ + 2.50e-5 f_+^2)/\alpha_{m0}\}, \\ (\text{有理根}) &3.819e-4 e_+ - 1.812e-3 f_+ \\ &- 4.919e-5 e_+^2 - 4.281e-2 e_+ f_+ + 0.145 f_+^2 + \dots.\end{aligned}\quad (4.17)$$

有理根の次の項には $(e_+ \text{ と } f_+ \text{ の多項式})/\alpha_{m0}$ なる有理式が現れる。 α_{m0} に関して有理式になるのは極めて興味深く、多変数代数関数の級数展開の面白さを示している。 $\square$

5 近似代数の応用に関し、本研究で得た教訓

昨年末の数理研集会では操縦士変量の決定法に言及したが、筆者らの最大の関心事は制御モデルの実用化ではなく、Hensel 級数が産業分野の計算で利用できるか否かである。

まず、実際に利用できるかどうかは度外視して Hensel 級数の出現を探った。簡単な解析により、Hensel 級数は“特異な状況” (本稿の場合は揚力がほとんど 0 になる状況) で出現することが分り、多くの産業分野で出現するであろうとの感触を得た。

しかしながら、Hensel 級数に限らず近似代数を産業分野で応用するには、多くの課題を解決する必要があると痛感した。近似グレブナー基底のように項消去に依存する計算では、猛烈な桁落ちを如何に回避するかが最大の課題だった。一方、本稿のように特異点がかからむ課題では、特異点の位置の決定に少しの誤差が入っただけで結果はグチャグチャに崩れる。たとえば、4.3 節で $\bar{C}(X, 0, 0, 0)$ が 4 個の近接根を持つことをみたが、特異点の位置をこれらの近接根クラスタの中心値で近似すれば、計算は完全に失敗する。なお、本稿の例は期せずして、下記の二つの大きな課題を含むものだった。

課題 A 入力行列が大きさの異なるパラメータを含む。

課題 B 特異点のごく近傍に近接根が存在する。

課題 A については、本稿の例で言えば、 α_{m0} の係数は e_+, f_+ の係数より 50 倍くらい大きくなっていることがわかる。一方、種々の理由で“微小項”は棄却せざるをえないが、入力パラメータの大きさが異なれば微小項が不要か否かの判断は簡単ではない。上例では途中結果を見ながら微小項消去を行ったが、自動化すべきである。現在、入力パラメータの係数をなるべく均一化するスケール変換を考慮中である。

課題 B に関しては、初期因子 G_0, H_0 が近接因子を含む場合、計算式 (4.15) で分離した因子は、位数 k が上がる度に係数が B^k 的に増大するか、桁落ち量が B^k 的に増大するかのどちらかである。後者の場合、近似特異点を特異点とみなして拡張 Hensel 構成を行えば桁落ちは起きない [3]。前者の場合、上手に計算する術はまだ知られていないが、上例の計算はこの課題の解決法を示している可能性がある。

なお、今回の研究で近似無平方分解の有用性を実感した。4.3 節で X に関する特異点を近接根から (近似的に) 決める必要が生じた。通常だと、近接根クラスタ中心と特異点の位置との差を未知数とする方程式を解くのだが、近似無平方分解で 3 つの候補が求まり、許容度も決定できた。近似無平方分解算法の提唱者として望外の喜びであった。

参 考 文 献

- [1] 片柳亮二：飛行機設計入門－飛行機はどのように設計するのか－。日刊工業新聞社，東京，2009。
- [2] 鈴木 隆，板宮敬悦：例題で学ぶ現代制御の基礎。森北出版，東京，2011。
- [3] T. Sasaki. Analysis of Cancellation Errors in Newton's Method for Multivariate Polynomial. Preprint of Univ. Tsukuba, 1994 (unpublished).
- [4] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993.

- [5] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **16** (1999), 257-285.
- [6] T. Sasaki and D. Inaba. Hensel construction of $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin* **34** (2000), 9-17.
- [7] T. Sasaki and D. Inaba. Convergence and many-valuedness of Hensel series near the expansion point. *Proc. SNC'09 (Symbolic Numeric Computation)*, 159-167, ACM Press, Aug. 2009.
- [8] T. Sasaki and D. Inaba. Series expansion of multivariate algebraic functions at singular points – nonmonic case –. *Proc. ASCM 2009 (Asian Symposium on Computer Mathematics)*, 177-186, Kyushuu University, 2009.
- [9] T. Sasaki and D. Inaba. A study of Hensel series in general cases. *Proc. SNC'11 (Symbolic Numeric Computation)*, 34-43, ACM Press, Aug. 2011.
- [10] 佐々木建昭, 稲葉大樹. 近似グレブナー基底の二つの応用. RIMS 研究集会「数式処理 – その研究と目指すもの」, 2011 年 12 月; 数理解析研究所講究録 1785, 8-19.
- [11] T. Sasaki and D. Inaba. Approximately singular systems and ill-conditioned polynomial systems. *Proc. CASC2012 (Computer Algebra in Scientific Computing)*: LNCS 7442, 308-320, Springer, Heidelberg, 2012.
- [12] T. Sasaki and T. Yamaguchi. An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic. *Proc. ISSAC 98 (Intn'l Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, 1-8, ACM Press, 1998.