

Free $\mathbb{Z}_m$ -actions on homotopy spheres

東工大 理 北田泰彦

§.0. Introduction

いかなる homotopy sphere Σ が free $\mathbb{Z}_m$ -action を許すかという問題についての解決を与える。 $\mathbb{C}^{n+1}$ の単位球面 S^{2n+1} 上に $\mathbb{Z}_m$ -action : $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\alpha z_0, \alpha^{p_1} z_1, \dots, \alpha^{p_n} z_n)$ (但し $\alpha = \exp(2\pi i/m)$) を考えその商空間を $L^{2n+1}(m; p_1, \dots, p_n)$ で表わすことにする。各 p_i が m と互に素であるときこの商空間は lens space と呼ばれる。2つの lens spaces $L^{2n+1}(m; p_1, \dots, p_n)$ と $L^{2n+1}(m; q_1, \dots, q_n)$ は $p_1 \cdots p_n \equiv q_1 \cdots q_n \pmod{m}$ の成り立つとき homotopy 同値であることが知られている。一方、homotopy sphere Σ^{2n+1} が free $\mathbb{Z}_m$ -action をもつたとき、その商空間 $\Sigma^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ はある lens space $L^{2n+1}(m; p_1, \dots, p_n)$ に homotopy 同値となることが知られている。従って、いま $L_p^{2n+1} = L^{2n+1}(m; p, 1, \dots, 1)$ という記号を用いると、適当

な p に対し、 $\Sigma^{2n+1}/\mathbb{Z}_m \simeq L_p^{2n+1}$ (homotopy 同値) となる。このような時、この free $\mathbb{Z}_m$ -action on Σ を type p の action と呼ぶことにする。我々の目標は homotopy sphere Σ が type p の free $\mathbb{Z}_m$ -action をもつための必要十分条件を与えることである。これまで知られていた結果は次のとおりである：

- i) $m=2$ (free involution) の場合は必要十分条件が Lopez de Medrano [3] (p.67) に与えられている。その証明は Browder の Kervaire invariant に関する結果 [1] によっているが、この方法は m が 8 の倍数である時には使えないことがわかる。従って m が一般の時には全く別な手段を用いねばならない。
- ii) $m = r^k$ (r : odd prime) の場合、任意の $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$ (すなわち、parallelizable manifold を bound する homotopy sphere) は free $\mathbb{Z}_m$ -action を許すということが Orlik [5] によって示された。彼はその例を具体的に Brieskorn sphere を用いて与えた。彼は同じ論文で任意の $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$ は任意の m に対し free $\mathbb{Z}_m$ -action をもつであろうという予想を述べているが、我々はその肯定的解決を含む結果を得た。

我々の結果を述べるため、多少の notations を定めよう。

$$\pi_p : S^{2n+1} \rightarrow L_p^{2n+1} (= L^{2n+1}(m; p, 1, \dots, 1))$$

を自然な射影とする。そのとき次の可換図式(A)を得る。

$$(A) \quad \begin{array}{ccc} h\mathcal{S}^\varepsilon(L_p^{2n+1}) & \xrightarrow{\eta} & [L_p^{2n+1}, G/O] \\ \downarrow u & \circlearrowleft & \downarrow \pi_p^* \\ \Theta_{2n+1} & \xrightarrow{\eta} & \pi_{2n+1}(G/O) \end{array} \quad (\varepsilon = h, s)$$

ここに上段は Wall([6]) の完全系列、下段は Kervaire - Milnor - Levine の完全系列であり、 u は homotopy smoothing $M^{2n+1} \rightarrow L_p^{2n+1}$ に対し、その universal cover $\tilde{M}^{2n+1} (\in \Theta_{2n+1})$ を対応させる写像である。図式(A) から直ちに、 $\Sigma^{2n+1} \in \Theta_{2n+1}$ が type p の free $\mathbb{Z}_m$ -action をもてば $\eta(\Sigma^{2n+1}) \in \text{Image}(\pi_p^* : [L_p^{2n+1}, G/O] \rightarrow \pi_{2n+1}(G/O))$ が成り立つことがわかる。

Main Theorem : Homotopy sphere $\Sigma^{2n+1} (n \geq 3)$ が type p の free $\mathbb{Z}_m$ -action をもつための必要十分条件は $\eta(\Sigma^{2n+1}) \in \text{Image } \pi_p^*$ が成り立つことである。

上の条件が必要条件であることは既に述べた。以下、十分性の証明の概略を述べる。なお Orlik の予想(前述)については $\eta(bP_{2n+2}) = 0$ なることから容易に "Yes" と言える。

§.1. An important example.

Polynomial function $f: \mathbb{C}^{2k+2} \rightarrow \mathbb{C}$ is

$$f(z_0, z_1, \dots, z_{2k+1}) = z_0^S + z_1^2 + \dots + z_{2k+1}^2$$

且し, $S \equiv \pm 3 \pmod{8}$, $(S, m) = 1$, と定義する。 $\Sigma_S^{4k+1} = f^{-1}(0) \cap S^{4k+3}$ は bP_{4k+2} の generator であることはよく知られている。いま, $\mathbb{C}^{2k+2}$ 上に $\mathbb{Z}_m$ -action を $(z_0, z_1, \dots, z_{2k+1}) \mapsto (\alpha^{2t} z_0, \alpha z_1, \dots, \alpha z_{2k+1})$ で定義する; ここに $\alpha = \exp(2\pi i/m)$, $S \cdot t \equiv 1 \pmod{m}$ とする。この作用は Σ_S^{4k+1} 上に free $\mathbb{Z}_m$ -action を induce することが容易に確かめられる。この action を (Σ_S^{4k+1}, T_S) で表わす。

命題 1. (Σ_S^{4k+1}, T_S) は type t の free $\mathbb{Z}_m$ -action である。(証明略) ■

命題 2. m が偶数のとき $\mathbb{Z}_m$ -action (Σ_S^{4k+1}, T_S) を $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_m$ に制限した $\mathbb{Z}_2$ -action $(\Sigma_S^{4k+1}, T_S|_{\mathbb{Z}_2})$ は non-zero Browder-Livesay invariant をもつ。

[略証] $(\Sigma_S, T_S|_{\mathbb{Z}_2})$ はいわゆる Brieskorn-Hirzebruch involution でありその desuspendability については [1] または [2] を見よ。■

§. 2. Surgeries with $\pi_1 = \mathbb{Z}_m$.

この § の main reference は Wall の本 [6] である。ここでは奇数次元の $\pi_1 = \mathbb{Z}_m$ の surgery について考える。Category は $\varepsilon = k, s$ のいずれでもよく, manifold は Diff. でも PL でもよいが Diff で述べることにする。 m が偶数の時自然な epimorphism $\mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_2$ は Wall 群の homomorphism $d' : L_{4k+3}(\mathbb{Z}_m) \rightarrow L_{4k+3}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ を induce する。

定理 3. X^{2n+1} を oriented closed manifold で $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_m$, $\varphi : X \rightarrow G/O$ を normal map とする。

もし、 n が偶数もしくは m が奇数であれば surgery obstruction $\theta(\varphi) \in L_{2n+1}(\mathbb{Z}_m)$ は常に zero であり、 n が奇数かつ、 m が偶数ならば、 $\theta(\varphi) = 0 \Leftrightarrow d'\theta(\varphi) = 0$ が成り立つ。

[証明の概要] いくつかの step に別ける。

$$1) \Omega_3(K(\mathbb{Z}_m, 1) \times G/O) \xrightarrow{\theta} L_3(\mathbb{Z}_m) \xrightarrow{p} L_5(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m)$$

は zero. p の定義については Wall [6] p. 127 を参照。

$$2) \text{ Lens space について } \theta : [L^5(m; p_1, p_2), G/O] \rightarrow L_5(\mathbb{Z}_m)$$

が 0 になることを示す。

$$3) \theta : \Omega_5(K(\mathbb{Z}_m, 1) \times G/O) \rightarrow L_5(\mathbb{Z}_m) \text{ が } 0 \text{ になるこ}$$

とを示す。この時に § 1 の例についての命題 2 を用いる。

4) 3) を帰納法の first step として Wall [6] 14 E. 4 に類

似の論法で結果を導く。なお Wall の論法は inductive な obstruction から $\text{image}\{L_{2n-1}(\mathbb{Z}) \rightarrow L_{2n-1}(\mathbb{Z}_m)\}$ に入っていることを示していないので 1-st step と 2-nd step (即ち 3次元 $\rightarrow$ 5次元) のつながりが完全ではない。我々は従って帰納法のみ 1 段も 5 次元にもって来た。 ■

§3. $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifolds.

X^n を oriented manifold とし、その boundary ∂X の中の submanifold $V^{n-1} \subset \partial X$ 上に orientation preserving な free $\mathbb{Z}_m$ -action T が与えられているとき、この object を $(X^n, V; T)$ で表わす。 $(X^n, V; T)$ に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold $\hat{X}^n$ を $X^n/\sim$ で定義する。ここに $x \sim y \iff x, y \in V$ かつ $T^k(x) = y$ とする。 $\hat{X}^n$ の subset $V^{n-1}/\sim$ を $\partial \hat{X}^n$ で表わし、 $\hat{X}^n$ の boundary $\partial \hat{X}^n$ は $(\partial X - \text{Int } V)/\sim$ で定義する。 $V = \partial X$ であるとき (すなわち $\partial \hat{X} = \emptyset$ となるとき)、 $\hat{X}^n$ を closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold と呼ぶことにする。

例 1. $(D^{2n}, S^{2n-1}; T)$, $T(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = (\alpha z_0, \alpha^{p_1} z_1, \dots, \alpha^{p_{n-1}} z_{n-1})$ (但し, $\alpha = \exp(2\pi i/m)$, $(p_i, m) = 1$) に付随した closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold を $\hat{L}^{2n}(m; p_1, \dots, p_{n-1})$

で表わす. これは lens space $L^{2n+1}(m; p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$ の $2n$ -skeleton と同一視でき, $\delta \hat{L}^{2n}(m; p_1, \dots, p_{n-1})$ は $L^{2n-1}(m; p_1, \dots, p_{n-1})$ と一致する.

例 2. T_0 を oriented manifold M^n 上の free $\mathbb{Z}_m$ -action で向きを保つものとする. そのとき $(W^{n+1}, V; T) = (M^n \times I, M^n \times \{0\}; T_0 \times \text{id})$ に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold $\hat{W}^{n+1}$ は orbit map $M \rightarrow M/T_0$ の mapping cylinder に同相であり $\delta \hat{W} = M/T_0$, $\partial \hat{W} = M$ である.

通常の cobordism theories と同様にして closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifolds の cobordism theory が作れる. Cobordism group を $\Omega_*(\tilde{\mathbb{Z}}_m)$, (空間 Y に対する) bordism group を $\Omega_*(Y; \tilde{\mathbb{Z}}_m)$ で表わすとき次の表示が得られる.

$$\begin{aligned} \text{定理 4. } \Omega_n(\tilde{\mathbb{Z}}_m) &\cong \tilde{\Omega}_{n+1}(K(\mathbb{Z}_m, 1)) \\ \Omega_n(Y; \tilde{\mathbb{Z}}_m) &\cong \tilde{\Omega}_{n+1}(Y^+ \wedge K(\mathbb{Z}_m, 1)). \end{aligned}$$

[証明の概要] Morgan & Sullivan [4] 参照. ■

Remark: $K(\mathbb{Z}_m, 1) = L^\infty$ (無限次元 lens space) の標準的な 2-skeleton $\hat{L}^2$ を考えると, inclusion map $\hat{L}^2 \subset L^\infty$ は Sullivan の $\mathbb{Z}_m$ -manifold cobordism theory から我々の $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold cobordism theory への natural transformation を引き起こす.

§.4 単連結 $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold の surgery.

Object $(X^n, \partial X; T)$ から $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold $\hat{X}^n$ を定義するとする. $\hat{X}^n$ が単連結であるとは $\pi_1(X) = \pi_1(\partial X) = \{1\}$ を意味するものとする. この § では単連結な closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold のみであつた. Surgery theory を構成するにはおよそ次のような step を踏む:

1) $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold 間の map 及びその degree の定義:

$(X_i^n, \partial X_i; T_i)$ ($i=0, 1$) に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold を $\hat{X}_i^n$ とする. $f: X_0^n \rightarrow X_1^n$ が $f(\partial X_0) \subset \partial X_1$ をみたし, $f|_{\partial X_0}$ が $\mathbb{Z}_m$ -equivariant な時 $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -map $\hat{f}: \hat{X}_0^n \rightarrow \hat{X}_1^n$ を induce するといひ, degree $\hat{f}$ を degree $f: (X_0, \partial X_0) \rightarrow (X_1, \partial X_1)$ で定義する.

2) Homotopy smoothing (又は homotopy triangulation)

及びその concordance class の定義: $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -map

$\hat{f}: \hat{X}_0^n \rightarrow \hat{X}_1^n$ が homotopy smoothing であるとは, $\hat{f}$ 及び $\hat{f}|_{\partial \hat{X}_0}: \partial \hat{X}_0 \rightarrow \partial \hat{X}_1$ が homotopy equivalence のときをいふ. Concordance については通常と同様.

3) (Stable) normal bundle の定義と normal map 及びその normal cobordism classes: $\tilde{\mathbb{Z}}_m$ -manifold $\hat{X}^n$ に対し canonical な方法で $(n+1)$ -次元の manifold $\bar{X}^{n+1}$ をそれから $\hat{X}^n$ を含むように作ることが出来る. $\bar{X}^{n+1}$ の stable

normal bundle の $\hat{X}^n$ 上への制限を $\hat{X}^n$ の stable normal bundle とする. ($\bar{X}^{n+1}$ の作り方は略する). Normal map はこの normal bundle の定義と 1) より定義できる. その normal cobordism class は集合 $[\hat{X}^n, G/O]$ と同一視できることが証明できる.

定理 5. $\hat{X}^{2n}$ を単連結 $\mathbb{Z}_m$ -manifold ($n \geq 3$) とする. そのとき次の完全系列が成り立つ

$$h\mathcal{S}^E(\hat{X}^{2n}) \xrightarrow{\eta} [\hat{X}^{2n}, G/O] \xrightarrow{\theta} Q_{2n} \quad (\varepsilon = h, s)$$

但し $Q_{2n} = \mathbb{Z}_2$ (m : 偶数), 0 (m : 奇数) とする.

[証明略] ■

Remark: m が偶数の時, $Q_{2n} = \mathbb{Z}_2$ は本質的には Kervaire invariant で与えられる.

$\hat{L}^{4k} = \hat{L}^{4k}(m; p_1, \dots, p_{2k-1}) \supset L^{4k-1} = L^{4k-1}(m; p_1, \dots, p_{2k-1})$
 $\supset \hat{L}^{4k-2}(m; p_1, \dots, p_{2k-2})$ とするとき, 次の命題が 5.1 の命題 2 を用いて証明される.

命題 6. m が偶数ならば図式

$$\begin{array}{ccc} [\hat{L}^{4k}, G/O] & \searrow \theta & \\ \downarrow & & \\ [L^{4k-1}, G/O] & \xrightarrow{d'\theta} & \mathbb{Z}_2 \\ \downarrow & \nearrow \theta & \\ [\hat{L}^{4k-2}, G/O] & & \end{array}$$

は可換で $\mathbb{Z}_2$ への 3 つの map はいずれも surjective である. ■

§. 5. Main Theorem の証明.

§0 の図式 (A) は次のように拡大される:

$$(B) \quad \begin{array}{ccccccc} L_{2n+2}(\mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\omega} & h\delta(L_p^{2n+1}) & \xrightarrow{\eta} & [L_p^{2n+1}, G/O] & \xrightarrow{\theta'} & \mathbb{Z}_2 \text{ or } 0 \\ \tau \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow u & \circlearrowleft & \downarrow \pi_p^* & & \\ L_{2n+2}(1) & \xrightarrow{\omega} & \Theta_{2n+1} & \xrightarrow{\eta} & \pi_{2n+1}(G/O) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ここに τ は transfer map (cf. Wall [6] 13A), 代数的には $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_m]$ 上の 2 次形式を $\mathbb{Z}$ 上の 2 次形式と見なす写像であり、幾何的には m -fold の universal covering を考える (もしくは $\mathbb{Z}_m$ -action を忘れる) 写像である。 θ' については、 m が偶数かつ n が奇数の場合に $\theta' = d'\theta$ で定義し、その他の場合は $\theta' = 0$ とする。

m が奇数の場合は $\theta' = 0$ 及び τ が surjective であることから Main Theorem は容易に得られる。従って以下ではもっぱら m が偶数 の場合のみを扱う。図式 (B) 及び transfer map $L_{4k}(\mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\tau} L_{4k}(1)$ の surjectivity (Wall) により、我々は次の 2 つの補題を証明すればよいことを知る。

補題 7. $\eta_0 \in \text{Image } \pi_p^*$ のとき、 $\eta_1 \in [L_p^{2n+1}, G/O]$ で

$$\pi_p^*(\eta_1) = \eta_0, \quad \theta'(\eta_1) = 0 \quad \text{をみたすものが存在する。}$$

補題 8. Σ_0^{2n+1} が type p の free $\mathbb{Z}_m$ -action をもてば、任意の $\Sigma^{2n+1} \in bP_{2n+2}$ に対し $\Sigma_0 \# \Sigma$ もまた type p の free $\mathbb{Z}_m$ -action をもつ。

[補題 7. の略証] n が偶数の場合は自明. n が奇数 ($n=2k-1$) の場合, $\eta_2 \in [L_p^{2n+1}, G/O]$ で $\pi_p^*(\eta_2)=0$, $\theta'(\eta_2) \neq 0$ とみたすものかといえることを示せばよい. このことは命題 6 から示される. ■

[補題 8. の略証] n が奇数なら (B) において τ が全射が明らか. n を偶数とする. そのとき自然な orbit map $\pi: \Sigma_0^{4k+1} \rightarrow \Sigma_0/\mathbb{Z}_m$ の mapping cylinder $\hat{X}^{4k+2}$ は $\mathbb{Z}_m$ -manifold で $\delta\hat{X} = \Sigma_0/\mathbb{Z}_m$, $\partial\hat{X} = \Sigma_0$ と見なせる. (cf. §3. 例 2). このとき次の可換図式 (横線は完全) が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (C) & & h\mathcal{S}(\hat{X} \text{ rel. } \partial\hat{X}) & \xrightarrow{\eta} & [\hat{X}/\partial\hat{X}, G/O] & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 L_{4k+2}(\mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\omega} & h\mathcal{S}(\Sigma_0/\mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\eta} & [\Sigma_0/\mathbb{Z}_m, G/O] & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \tau & & \downarrow u & & \downarrow \pi^* & & \\
 L_{4k+2}(1) & \xrightarrow{\omega} & h\mathcal{S}(\Sigma_0) & \xrightarrow{\eta} & [\Sigma_0, G/O] & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

命題 6 より, $\varphi \in [\hat{X}/\partial\hat{X}, G/O]$ で $\theta(\varphi) \neq 0$ のものかといえる. 定理 3 より $\varphi|_{\delta\hat{X}}$ は surgery できるから, φ は geometric には normal map $\hat{f}: \hat{M}^{4k+2} \rightarrow \hat{X}^{4k+2}$ で $\hat{f}|_{\delta\hat{M}}$ は homotopy 同値なもので表わされる. ($\hat{f}|_{\partial\hat{M}}$ は diffeo.). $\hat{M}^{4k+2}$ を定める object $(M, V; T)$ を考えると, V は $\delta\hat{M}$ の universal cover, $\partial M = \Sigma_0 \cup V$ (disjoint) であって $\theta(\varphi) \neq 0$ なることより M の Kervaire invariant は non-

zero. 従って V^{4k+1} は $\Sigma_0 \# \Sigma$ と diffeo (但し Σ は bP_{4k+2} の generator) である. ■

REFERENCES

- [1] W. Browder; Cobordism invariants, the Kervaire invariant and fixed point free involutions, Trans. A.M.S., 178 (1973), 193-225.
- [2] C. H. Giffen; Desuspendability of free involutions on Brieskorn spheres, Bull. A.M.S., 75 (1969), 426-429.
- [3] S. Lopez de Medrano; Involutions on manifolds, Springer, 1971.
- [4] J. W. Morgan & D. P. Sullivan; The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory, Ann. of Math., 99 (1974), 463-544.
- [5] P. Orlik; Smooth homotopy lens spaces, Mich. Math. J., 16 (1969), 245-255.
- [6] C. T. C. Wall; Surgery on compact manifolds, Academic Press, 1970.