

一様乱流における速度の 交差独立性と速度分布

国際高等研究所 巽 友正 (Tomomasa Tatsumi)

1. 乱流の速度分布

乱流の統計理論において、最も完全な統計的知識は速度場の分布汎関数によって表わされ、その分布汎関数を支配する方程式は、Hopf (1952) の特性汎関数方程式として与えられていることは、よく知られている。しかし、この汎関数方程式を一般的に解くことは困難であり、速度場の分布汎関数を求めることは、特別の場合を除いては不可能である。このため、実際には、空間または時空間内の一点または数点における速度分布が、有用な統計的情報として用いられる。

有限個の点における速度分布を支配する方程式は、すでに Lundgren (1967) [1] と Monin (1967) [2] によって得られている。しかし、これらの方程式は、常に方程式よりも 1 個だけ多い未知変数を含むために、方程式系として閉じていない。

この種の非完結性は、一般に乱流理論に共通する困難性であるが、モーメントを対象とする理論では、それが運動方程式の非線形項 (慣性項と圧力項) から現れるのに対して、分布関数を対象とする場合には、線形項 (粘性項) から現れる点で事情が異なっている。

これまでのところ、分布方程式を用いた乱流の理論的取扱いはあまり進んでおらず、粘性流体の三次元乱流に関する限り、理論の多くは現象論の域を出ていないように思われる。著者はさきに、分布方程式の完結仮説として、二点における速度の交差独立性、すなわち速度の和と差の独立性を仮定し、これを一点速度分布方程式に導入して、本論文の前半に要約するような理論的結果を得た [3]。本論文の後半においては、同じ仮説を二点速度分布方程式に適用し、その理論的結果の解明を試みる。

時刻 t における、二点 x_1, x_2 での乱流の速度を $u(x_1, t), u(x_2, t)$ で表わせば、一点および二点における速度分布は、それぞれ次のように定義される。

$$f(1) = f(u_1, x_1, t) = \langle \delta(u(x_1, t) - u_1) \rangle \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(1, 2) &= f^{(2)}(u_1, u_2; x_1, x_2; t) \\ &= \langle \delta(u(x_1, t) - u_1) \delta(u(x_2, t) - u_2) \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 u_i ($i=1, 2$) は速度 $u(x_i, t)$ に対応する確率変数、 δ は三次元デルタ関数、そして $\langle \rangle$ は初期分布に対する平均値を表わす。

一様乱流に対しては、(1)、(2) 式はそれぞれ次のように書ける。

$$f(1) = f(u_1, t), \quad (3)$$

$$f^{(2)}(1, 2) = f^{(2)}(u_1, u_2; r, t), \quad (4)$$

ここに、 $r = x_2 - x_1$ は、二点間の距離を表わす。

これらの分布は、次の還元条件を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \int f(1) d^3 u_1 &= 1, \\ \int f^{(2)}(1, 2) d^3 u_2 &= f(1), \quad \int f^{(2)}(1, 2) d^3 u_1 = f(2), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $d^3 u_i = \prod_{j=1}^3 |du_{ij}|$ ($i=1, 2$) は速度空間の体積要素を表わす。

一様乱流においては、平均速度を 0 とおくことができるから、

$$\left. \begin{aligned} \int u_1 f(1) d^3 u_1 &= 0 \\ \int \int u_1 f^{(2)}(1, 2) d^3 u_1 d^3 u_2 &= \int \int u_2 f^{(2)}(1, 2) d^3 u_1 d^3 u_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が成り立つ。

距離 $|r|$ が極めて大きい、極めて小さいかの極限においては、 $f^{(2)}$ と f との間に次のような関係が成り立つ。

$$\text{分離の条件: } \lim_{|r| \rightarrow \infty} f^{(2)}(1, 2) = f(1) f(2) \quad (7)$$

$$\text{一致の条件: } \lim_{|r| \rightarrow 0} f^{(2)}(1, 2) = f(1) \delta(u_2 - u_1) \quad (8)$$

一点分布 f および二点分布 $f^{(2)}$ に対する方程式は、Lundgren [1] および Monin [2] によって次のように与えられている。

$$\begin{aligned} & [\partial / \partial t + u_1 \cdot \partial / \partial x_1] f(u_1, x_1, t) \\ &= (\partial / \partial u_1) \cdot [(1/4\pi) (\partial / \partial x_1) \int \int (1/|x_2 - x_1|) (u_2 \cdot \partial / \partial x_2)^2 \times \\ & \quad \times f^{(2)}(u_1, u_2; x_1, x_2; t) d^3 x_2 d^3 u_2 \\ & \quad - \nu \lim_{|x_2 - x_1| \rightarrow 0} (\partial / \partial x_2) \cdot (\partial / \partial x_2) \int u_2 f^{(2)}(u_1, u_2; x_1, x_2; t) d^3 u_2] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & [\partial / \partial t + u_1 \cdot \partial / \partial x_1 + u_2 \cdot \partial / \partial x_2] f^{(2)}(u_1, u_2; x_1, x_2; t) \\ &= (\partial / \partial u_1) \cdot [(1/4\pi) (\partial / \partial x_1) \int \int (1/|x_3 - x_1|) (u_3 \cdot \partial / \partial x_3)^2 \times \\ & \quad \times f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; t) d^3 x_3 d^3 u_3 \\ & \quad - \nu \lim_{|x_3 - x_1| \rightarrow 0} (\partial / \partial x_3) \cdot (\partial / \partial x_3) \int u_3 f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; t) d^3 u_3] \\ & \quad + (\partial / \partial u_2) \cdot [(1/4\pi) (\partial / \partial x_2) \int \int (1/|x_3 - x_2|) (u_3 \cdot \partial / \partial x_3)^2 \times \\ & \quad \times f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; t) d^3 x_3 d^3 u_3] \end{aligned}$$

$$- \nu \lim_{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2| \rightarrow 0} (\partial / \partial \mathbf{x}_3) \cdot (\partial / \partial \mathbf{x}_3) \int \mathbf{u}_3 f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; t) d^3 \mathbf{u}_3] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(1, 2, 3) &= f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; t) \\ &= \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{u}_1) \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) - \mathbf{u}_2) \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_3, t) - \mathbf{u}_3) \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $d^3 \mathbf{x}_3 = \prod_{j=1}^3 |(d\mathbf{x}_3)_j|$ 、 $d^3 \mathbf{u}_3 = \prod_{j=1}^3 |(d\mathbf{u}_3)_j|$ で、以下同様。

これらの方程式の非完結性は、(9)、(10)式における高次分布 $f^{(2)}$ 、 $f^{(3)}$ の存在から明らかであろう。上に述べたように、高次分布は、非線形の圧力項のみならず線形の粘性項においても現れている。したがって、完結仮説としては、これらの高次項をより低次の項と関係づけることを試みなければならない。

2. 速度の交差独立性

多点分布をより低次の分布と関係づけるのに最も多く用いられるのは、独立性の仮定であろう。二点分布に対しては、この関係は、

$$f^{(2)}(1, 2) = f(1)f(2) \quad (12)$$

となる。この関係は、 f が正規分布である場合には厳密に成り立つが、そうでなければ、 $|\mathbf{r}|$ が極めて大きい場合にしか成り立たないことは、分離条件(7)との比較からも明らかであろう。このため、有限の距離 $|\mathbf{r}|$ に対しては、 $f^{(2)}$ はしばしば正規関係(12)から出発した準正規近似を用いて表わされる。しかし、この種の近似は、 $|\mathbf{r}|$ が小さい場合に成り立たなくなることは、一致条件(8)との比較からも明らかであろう。

以上の考察から、逆に、一致条件(8)から出発した近似を考えることができる。

一様乱流を対象とし、速度 $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ との和および差、

$$\mathbf{u}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{u}_- = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (13)$$

を分布の新たな変数と考える。ここに、因子 $\frac{1}{2}$ は便宜上用いている。

速度変数 $\mathbf{u}_+$ 、 $\mathbf{u}_-$ の分布は、(1)から(4)式までと同様、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} g_+ &= g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}, t) = g_+(\mathbf{u}_+, -\mathbf{r}, t) = \langle \delta(\mathbf{u}_+(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_+) \rangle \\ g_- &= g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}, t) = g_-(-\mathbf{u}_-, -\mathbf{r}, t) = \langle \delta(\mathbf{u}_-(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_-) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$g^{(2)} = g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-; \mathbf{r}, t) = \langle \delta(\mathbf{u}_+(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_+) \delta(\mathbf{u}_-(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_-) \rangle \quad (15)$$

これらの分布もまた、還元条件、

$$\left. \begin{aligned} \int g_{\pm}(\mathbf{u}_{\pm}, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{u}_{\pm} &= 1 \\ \int g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-; \mathbf{r}) d^3 \mathbf{u}_- &= g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}), \quad \int g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-; \mathbf{r}) d^3 \mathbf{u}_+ = g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

および、一様乱流における 0 平均値条件、

$$\left. \begin{aligned} \int u_{\pm} g_{\pm}(u_{\pm}, r) d^3 u_{\pm} &= 0 \\ \int \int u_{\pm} g^{(2)}(u_{\pm}, u_{\mp}; r) d^3 u_{\pm} d^3 u_{\mp} &= \int \int u_{\mp} g^{(2)}(u_{\pm}, u_{\mp}; r) d^3 u_{\pm} d^3 u_{\mp} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を満たさなければならない。

二体分布 $g^{(2)}$ は、 $f^{(2)}$ の別表現に他ならないから、

$$f^{(2)}(1, 2) d^3 u_1 d^3 u_2 = f^{(2)}(u_1, u_2; r, t) d^3 u_1 d^3 u_2 = g^{(2)}(u_{+}, u_{-}; r, t) d^3 u_{+} d^3 u_{-} \quad (18)$$

すなわち、

$$f^{(2)}(1, 2) = f^{(2)}(u_1, u_2; r, t) = 2^{-3} g^{(2)}(u_{+}, u_{-}; r, t) \quad (19)$$

となる。

変数 u_{+} 、 u_{-} を用いると、 $f^{(2)}$ と f との独立関係 (12) とは違った関係、

$$g^{(2)}(u_{+}, u_{-}; r, t) = g_{+}(u_{+}, r, t) g_{-}(u_{-}, r, t) \quad (20)$$

を考えることができる。これを、(12) と区別して、**交差独立性**と呼ぶ。

分離および一致の条件は、 $g^{(2)}$ に対しては次のように表わされる。

分離条件: (8) 式は、(19)、(20) を考慮すれば、

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} f^{(2)}(1, 2) = \lim_{|r| \rightarrow \infty} 2^{-3} g_{+}(u_{+}, r) g_{-}(u_{-}, r) = f(1) f(2)$$

すなわち、

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} g_{\pm}(u_{\pm}, r) = 2^{3/2} f(1) = 2^{3/2} f(2) \quad (21)$$

となる。この条件は、 f が正規分布であれば自動的に満たされるが、このことは後に事実であることが示される ((43) 式を参照)。

一致条件: (9) 式は、(19)、(20) を考慮すれば、

$$\lim_{|r| \rightarrow 0} f^{(2)}(1, 2) = \lim_{|r| \rightarrow 0} 2^{-3} g_{+}(u_{+}, r) g_{-}(u_{-}, r) = f(1) \delta(u_2 - u_1)$$

となるが、これは、 g_{+} と g_{-} の定義から明らかな関係、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{|r| \rightarrow 0} g_{+}(u_{+}, r) &= f(1), \\ \lim_{|r| \rightarrow 0} g_{-}(u_{-}, r) &= \delta(u_{-}) = 2^3 \delta(u_2 - u_1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

によって自動的に満たされる。

このようにして、交差独立関係式 (20) は、 $|r| \rightarrow 0$ または $|r| \rightarrow \infty$ の両極限においては、厳密な関係に一致することが分かる。しかし、中間の $|r|$ の領域においては、それは一つの近似にとどまっている。

3. 一点速度分布方程式

一様乱流においては、方程式 (9) は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& [\partial / \partial t + \mathbf{u}_1 \cdot \partial / \partial \mathbf{x}_1] f(\mathbf{u}_1, t) \\
& = (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot [(1/4\pi) (\partial / \partial \mathbf{x}_1) \int \int |\mathbf{r}|^{-1} (\mathbf{u}_2 \cdot \partial / \partial \mathbf{r})^2 \times \\
& \quad \times f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}; t) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{u}_2 \\
& \quad - \nu \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} (\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot (\partial / \partial \mathbf{r}) \int \mathbf{u}_2 f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{u}_2] \quad (23)
\end{aligned}$$

ところが、左辺第二項の移流項は、 f が $\mathbf{x}_1$ に依らないために消える。同様に、右辺第一項の圧力項も、二重積分が $\mathbf{u}_1$ のみの関数で $\mathbf{x}_1$ に依存しないために消えるから、右辺第二項の粘性項だけが、一点分布 f の時間的変化に寄与する。

粘性項は、交差独立仮説(17)を用いると次のように書ける。

$$\begin{aligned}
T_v & = -\nu (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} (\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot (\partial / \partial \mathbf{r}) \int \mathbf{u}_2 f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}) d^3 \mathbf{u}_2 \\
& = -2^{-3} \nu \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \mathbf{r}|^2 \int (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2 g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}) g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{u}_2 \quad (24)
\end{aligned}$$

$|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ の極限において、

$$\mathbf{r} = \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{u}_- = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} \quad (25)$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}) & = g_+(\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) \rightarrow g_+(\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}, 0) \\
& = f(\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}) \rightarrow (1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{u}_1) f(\mathbf{u}_1)
\end{aligned}$$

となるから、(24)は、

$$\begin{aligned}
T_v & = -2^{-3} \nu \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \Delta \mathbf{x}|^2 \times \\
& \quad \times \int (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_1 + \Delta \mathbf{u}) (1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{u}_1) f(\mathbf{u}_1) g_-(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) d^3 \Delta \mathbf{u} \\
& = -\nu \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \Delta \mathbf{x}|^2 \times \\
& \quad \times \int (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_1 + 2\Delta \mathbf{u}) (1 + \Delta \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{u}_1) f(\mathbf{u}_1) g_-(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) d^3 \Delta \mathbf{u}
\end{aligned}$$

と書ける。条件(14)、(15)が任意の $\Delta \mathbf{x}$ において成り立つことを考慮すれば、 $\Delta \mathbf{u}$ に関する 0 次、一次の項が消えて、

$$\begin{aligned}
T_v & = -2 \nu \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \Delta \mathbf{x}|^2 \int (\Delta \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1) g_-(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) d^3 \Delta \mathbf{u} \\
& = -(2/3) \nu |\partial / \partial \mathbf{u}_1|^2 f(\mathbf{u}_1) \times \\
& \quad \times \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \Delta \mathbf{x}|^2 \int |\Delta \mathbf{u}|^2 g_-(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) d^3 \Delta \mathbf{u} \quad (26)
\end{aligned}$$

となる。ここに、この極限における g_- の等方性と、それによる関係、

$$(\Delta \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{u}_1)^2 = (1/3) |\Delta \mathbf{u}|^2 |\partial / \partial \mathbf{u}_1|^2$$

を用いている。(26)は最終的に、

$$T_v = -(2/3) \nu C_v \Delta u_1 f(\mathbf{u}_1, t) \quad (27)$$

のように表わされる。ここに、

$$\begin{aligned}
C_v & = \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} |\partial / \partial \Delta \mathbf{x}|^2 \int |\Delta \mathbf{u}|^2 g_-(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x}) d^3 \Delta \mathbf{u} \\
& = \lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} \Delta \Delta \mathbf{x} \langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle_{g_-} \quad (28)
\end{aligned}$$

は、分布 g -の分散の原点における曲率を表わす。

このようにして、一点速度分布 f に対する方程式は、

$$\partial f(u_1, t) / \partial t = -\alpha^2 \Delta_{u_1} f(u_1, t) \quad (29)$$

$$\alpha^2 = (2/3) \nu C_v \quad (30)$$

となる。(29)式は、負の拡散率をもつ逆拡散方程式である。速度 u_1 を従属変数とする運動方程式においては正の拡散率を与えた粘性率 ν が、 u_1 を独立変数とする分布方程式では負の拡散率として働くことは興味深い。

拡散率 α^2 は定数ではなく、一般に時間とともに変化する。流体の単位質量当たりの運動エネルギーを、

$$E = \frac{1}{2} \langle |u|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle u_i^2 \rangle \quad (31)$$

エネルギー散逸率を、

$$\varepsilon = -dE/dt = \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)^2 \rangle \quad (32)$$

で表わせば、(28)、(30)および(32)から、

$$\alpha^2 \propto \varepsilon \quad (33)$$

となり、 α^2 は ε に比例して時間とともに変化的ことが分かる。

4. 一点速度分布

一様乱流の場合として、外部からのエネルギー供給源をもたない自由減衰乱流を考える。この乱流のエネルギー減衰則として、 $E \propto t^{-1}$ を仮定すれば、(32)から $\varepsilon \propto t^{-2}$ となり、したがって、(33)から

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 t^{-2} \quad (34)$$

となる。ただし、 α_0^2 は正定数である。

この条件の下で、(29)式は、

$$\partial f(u, t) / \partial t = -(\alpha_0^2 / t^2) \Delta f(u, t) \quad (35)$$

と書ける。ここに、 u_1 の添え字は省略し、 $\Delta = |\partial / \partial u|^2$ である。

(35)式は、時間の逆数、

$$\tau = 1/t \quad (36)$$

を変数とすることによって、 $f(u, \tau)$ に対する通常の拡散方程式、

$$\partial f(u, \tau) / \partial \tau = \alpha_0^2 \Delta f(u, \tau) \quad (37)$$

に帰着する。

方程式(35)の一般解は、直接的に、または(37)式を経由して求められるが、ここで注意すべきことは、(35)式の初期値問題がいわゆる ill-posed な問題であ

り、解が微小攪乱に対して不安定であることである。この不安定性を避けるために、分布が変数 u に関して減衰的であること、すなわち、

$$\text{時間 } t \rightarrow \infty \text{ において、} \quad f(u, t) \rightarrow \delta(u) \quad (38)$$

となることを要求する。このため、分布は自己相似的であるとし、エネルギー減衰則 $E \propto t^{-1}$ を考慮して、

$$f(u, t) = t^{3/2} F(v), \quad v = |v|, \quad v = u t^{1/2} \quad (39)$$

の形に表わす。

(39) を (35) 式に代入すれば、 F に対する次のような常微分方程式が得られる。

$$(d/dv + 2/v)(d/dv + v/2\alpha_0^2)F = 0 \quad (40)$$

(40) 式の一般解は、 A を定数として、

$$F = A \exp(-v^2/4\alpha_0^2) + \int^v v'^{-2} \exp[-(v^2 - v'^2)/4\alpha_0^2] dv', \quad (41)$$

で与えられるが、非同次項は $v=0$ において特異性をもつため、確率分布としての条件を満たさない。したがって、(41) の同次項だけをとれば、分布解は、

$$F(v) = (1/2\alpha_0\sqrt{\pi})^3 \exp(-v^2/4\alpha_0^2) \quad (42)$$

すなわち、

$$f(u, t) = (1/2\alpha_0\sqrt{\pi})^3 t^{3/2} \exp(-|u|^2 t/4\alpha_0^2) \quad (43)$$

で与えられる。ここに、 A の値は条件(5)によって決定されている。解(43)は、3次元正規(ガウス)分布であり、このことは、減衰等方性乱流の自己相似的な分布は一意的に3次元正規分布であることを示している。

解(43)の時間的変化の様態を図1(論文末尾)に示す。初期時刻 $t=0$ は(35)式の特異点であるが、そこでは解は分布密度0の一様分布を表わす。時刻 $t>0$ においては、等方的な3次元正規分布が立ち上がり、時間とともに分布密度が増加し、分散が減少する方向に自己相似的に発展する。時間 $t \rightarrow \infty$ の極限において、解は原点 $|u|=0$ に中心をもつ3次元 δ 関数に漸近するが、これは解の前提条件(38)に合致している。

解(43)から、エネルギー E とその散逸率 ε は、

$$E = E_0/t, \quad \varepsilon = \varepsilon_0/t^2, \quad E_0 = \varepsilon_0 = 3\alpha_0^2 \quad (44)$$

のように得られるが、これは仮定された減衰則 $E \propto t^{-1}$ と合致している。

一様等方性乱流の速度分布については、これまで多くの実験および数値実験の結果が得られているが、いずれも1点分布が極めて正規分布に近いことが示されている。一方、エネルギー減衰則については、多くの実験結果から、 $E \propto t^{-\sigma}$ 、 $\sigma \doteq 1.2$ という数値が得られているが、実験および数値実験ともに乱流領域が有

限である影響を免れないので、決定的な比較はできない。

5. 二点速度分布方程式

一様乱流では、二点速度分布 $f^{(2)}$ を支配する (10) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & [\partial / \partial t + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \partial / \partial \mathbf{r}] f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}, t) \\
 &= (\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot [(1/4\pi)(\partial / \partial \mathbf{x}_1) \int \int |\mathbf{r}'|^{-1} (\mathbf{u}_3 \cdot \partial / \partial \mathbf{r}')^2 \times \\
 &\quad \times f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{u}_3 \\
 &\quad - \nu \lim_{|\mathbf{r}'| \rightarrow 0} (\partial / \partial \mathbf{r}') \cdot (\partial / \partial \mathbf{r}') \times \\
 &\quad \times \int \mathbf{u}_3 f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{u}_3] \\
 &+ (\partial / \partial \mathbf{u}_2) \cdot [(1/4\pi)(\partial / \partial \mathbf{x}_2) \int \int |\mathbf{r}''|^{-1} (\mathbf{u}_3 \cdot \partial / \partial \mathbf{r}'')^2 \times \\
 &\quad \times f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}''; t) d^3 \mathbf{r}'' d^3 \mathbf{u}_3 \\
 &\quad - \nu \lim_{|\mathbf{r}''| \rightarrow 0} (\partial / \partial \mathbf{r}'') \cdot (\partial / \partial \mathbf{r}'') \times \\
 &\quad \times \int \mathbf{u}_3 f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}''; t) d^3 \mathbf{u}_3] \quad (49)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{r}' = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{r}'' = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$ である。

一点分布 f に対する (25) 式とは違って、(49) 式の左辺の移流項は一様乱流においても消えない。事実、この項は、二点分布 $f^{(2)}$ の非正規性に寄与していることが分かる。また、右辺の第一、第三項である二つの圧力項は、項の中の二重積分がそれぞれ $\mathbf{x}_1$ および $\mathbf{x}_2$ に依存するために消えない。右辺の第二、第四項である二つの粘性項は、(25) 式の場合と同じ構造をもち、同様に 0 ではない。したがって、右辺の圧力項と粘性項における高次分布 $f^{(3)}$ は、交差独立仮説を用いて低次分布で表わさなければならない。

5.1 粘性項

粘性項における $f^{(3)}$ は、一点分布方程式 (23) の粘性項における $f^{(2)}$ と同じ方法で評価することができる。

第一粘性項において、 $f^{(3)}$ は、 $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ の極限形において現れるため、交差独立性は速度 $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ の組について仮定することができる。このとき、

$$\begin{aligned}
 f^{(3)}(1, 2, 3) d^3 \mathbf{u}_1 d^3 \mathbf{u}_2 d^3 \mathbf{u}_3 &= f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{u}_1 d^3 \mathbf{u}_2 d^3 \mathbf{u}_3 \\
 &= g^{(3)}(\mathbf{u}_+^-, \mathbf{u}_-^-, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{u}_+^- d^3 \mathbf{u}_-^- d^3 \mathbf{u}_2 \quad (50a)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_+^- = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3), \quad \mathbf{u}_-^- = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) \quad (51a)$$

すなわち、

$$f^{(2)}(1, 2, 3) = f^{(3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = 2^{-3} g^{(3)}(\mathbf{u}_+^-, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_-^-; \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (52a)$$

と書けば、交差独立関係は次のように表わされる。

$$g^{(3)}(u_+^{\prime}, u_2, u_-^{\prime}; r, r'; t) = g^{(2)}_+(u_+^{\prime}, u_2; r', r; t) g^{(2)}_-(u_-^{\prime}, r', t) \quad (53a)$$

ここに、 $g^{(2)}_-$ は、 $|r'| \rightarrow 0$ の状況では u_2 に依存しないと仮定している。

同様に、第二粘性項に対しては、 (u_2, u_3) に交差独立性を仮定し、

$$f^{(3)}(1, 2, 3) d^3u_1 d^3u_2 d^3u_3 = g^{(3)}(u_+^{\prime\prime}, u_-^{\prime\prime}, u_1; r^{\prime\prime}, -r; t) d^3u_+^{\prime\prime} d^3u_-^{\prime\prime} d^3u_1 \quad (50b)$$

$$u_+^{\prime\prime} = \frac{1}{2}(u_2 + u_3), \quad u_-^{\prime\prime} = \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \quad (51b)$$

すなわち、

$$f^{(3)}(1, 2, 3) = f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'; t) = 2^{-3} g^{(3)}(u_+^{\prime\prime}, u_-^{\prime\prime}, u_1; r^{\prime\prime}, -r; t) \quad (52b)$$

と書けば、交差独立関係は次のように表わされる。

$$g^{(3)}(u_+^{\prime\prime}, u_-^{\prime\prime}, u_1; r^{\prime\prime}, -r; t) = g^{(2)}_+(u_+^{\prime\prime}, u_1; r^{\prime\prime}, -r; t) g_-(u_-^{\prime\prime}, r^{\prime\prime}; t) \quad (53b)$$

以上のような交差独立仮説のもとでの $f^{(3)}$ の表現 (52a, b) と (53a, b) を、(49) 式の粘性項に代入すれば、先に (23) 式の粘性項について表式 (27) を導いたのと同じやり方で、第一および第二粘性項を次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} T_v^{(2)'} &= -\nu (\partial / \partial u_1) \cdot \lim_{|r'| \rightarrow 0} \Delta_{r'} \int u_3 f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r') d^3u_3 \\ &= -2^{-3} \nu (\partial / \partial u_1) \cdot \lim_{|r'| \rightarrow 0} \Delta_{r'} \int u_3 g^{(2)}_+(u_+^{\prime}, u_2; r', r) g_-(u_-^{\prime}, r') d^3u_3 \\ &= -(2/3) \nu |\partial / \partial u_1|^2 f^{(2)}(u_1, u_2; r) \times \\ &\quad \times \lim_{|\Delta x'| \rightarrow 0} \Delta_{\Delta x'} \int |\Delta u'|^2 g_-(\Delta u', \Delta x') d^3\Delta u' \quad (52a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_v^{(2)''} &= -\nu (\partial / \partial u_2) \cdot \lim_{|r''| \rightarrow 0} \Delta_{r''} \int u_3 f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'') d^3u_3 \\ &= -2^{-3} \nu (\partial / \partial u_2) \cdot \lim_{|r''| \rightarrow 0} \Delta_{r''} \times \\ &\quad \times \int u_3 g^{(2)}_+(u_+^{\prime\prime}, u_1; r'', -r) g_-(u_-^{\prime\prime}, r'') d^3u_3 \\ &= -(2/3) \nu |\partial / \partial u_2|^2 f^{(2)}(u_2, u_1; -r) \times \\ &\quad \times \lim_{|\Delta x''| \rightarrow 0} \Delta_{\Delta x''} \int |\Delta u''|^2 g_-(\Delta u'', \Delta x'') d^3\Delta u'' \quad (52b) \end{aligned}$$

したがって、全粘性項は (52a, b) の和として、

$$T_v^{(2)} = T_v^{(2)'} + T_v^{(2)''} = -(2/3) \nu C_v (\Delta_{u1} + \Delta_{u2}) f^{(2)}(u_1, u_2; r, t) \quad (53)$$

で表わされる。ここに、 C_v は (30) で定義された定数である。

5.2 圧力項

圧力項における $f^{(3)}$ に対しては、粘性項の場合のような、交差独立性仮説を適用すべき特定の速度の組が存在しない。したがって、二点速度の一致の条件 (8) を三点速度 (u_1, u_2, u_3) に拡張した、次の条件を考える。

三点一致の条件：

$$\begin{aligned}
\lim_{|r'| \rightarrow 0, |r''| \rightarrow 0} f^{(3)}(1, 2, 3) &= \lim_{|r'| \rightarrow 0, |r''| \rightarrow 0} f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'; t) \\
&= f(u_1, t) \delta(u_3 - u_1) \delta(u_3 - u_2) \\
&= f(\frac{1}{2}(u_1 + u_2), t) \delta(u_3 - u_1) \delta(u_3 - u_2)
\end{aligned} \quad (54)$$

この条件を漸近形とする交差独立性は、

$$\begin{aligned}
f^{(3)}(1, 2, 3) d^3u_1 d^3u_2 d^3u_3 &= f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'; t) d^3u_1 d^3u_2 d^3u_3 \\
&= g^{(3)}(u_+, u_-, u_-'; r, r'; t) d^3u_+ d^3u_- d^3u_-'
\end{aligned} \quad (55)$$

すなわち、

$$f^{(3)}(1, 2, 3) = f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'; t) = 4^{-3} g^{(3)}(u_+, u_-, u_-'; r, r'; t) \quad (56)$$

$$g^{(3)}(u_+, u_-, u_-'; r, r'; t) = g_+(u_+, r, t) g_-(u_-, r', t) g_-(u_-', r'', t) \quad (57)$$

のように書くことができる。

(49)式の二つの圧力項は、(56)、(57)を代入すればそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
4\pi T_p^{(2)'} &= (\partial / \partial u_1) \cdot (\partial / \partial x_1) \int \int |r'|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r')^2 \times \\
&\quad \times f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r') d^3r' d^3u_3 \\
&= 4^{-3} (\partial / \partial u_1) \cdot (\partial / \partial x_1) g_+(u_+, r) \times \\
&\quad \times \int \int |r'|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r')^2 g_-(u_-, r') g_-(u_-', r'') d^3r' d^3u_3 \\
&= 2^{-3} (\partial / \partial u_1) \cdot (\partial / \partial x_1) g_+(u_+, r) \times \\
&\quad \times \int \int |r'|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r')^2 g_-(u_-, r') g_-(u_-', r'') d^3r' d^3u_-'
\end{aligned} \quad (56a)$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_p^{(2)''} &= (\partial / \partial u_2) \cdot (\partial / \partial x_2) \int \int |r''|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r'')^2 \times \\
&\quad \times f^{(3)}(u_1, u_2, u_3; r, r'') d^3r'' d^3u_3 \\
&= 4^{-3} (\partial / \partial u_2) \cdot (\partial / \partial x_2) g_+(u_+, r) \times \\
&\quad \times \int \int |r''|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r'')^2 g_-(u_-, r') g_-(u_-', r'') d^3r'' d^3u_3 \\
&= 2^{-3} (\partial / \partial u_2) \cdot (\partial / \partial x_2) g_+(u_+, r) \times \\
&\quad \times \int \int |r''|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r'')^2 g_-(u_-, r') g_-(u_-', r'') d^3r'' d^3u_-'
\end{aligned} \quad (56b)$$

したがって、全圧力項は、(56a, b)の和として、

$$\begin{aligned}
4\pi T_p^{(2)} &= 4\pi (T_p^{(2)'} + T_p^{(2)''}) \\
&= 2^{-3} [(\partial / \partial u_1) \cdot (\partial / \partial x_1) + (\partial / \partial u_2) \cdot (\partial / \partial x_2)] g_+(u_+, r, t) \times \\
&\quad \times \int \int |r'|^{-1} (u_3 \cdot \partial / \partial r')^2 g_-(u_-, r', t) g_-(u_-', r'', t) d^3r' d^3u_-'
\end{aligned} \quad (57)$$

で与えられる。

5.3 二点分布方程式

前二項の結果から、二点速度分布 $f^{(2)}$ に対する (49) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& [\partial / \partial t + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \partial / \partial \mathbf{r} + \alpha^2 (\Delta_{u_1} + \Delta_{u_2})] f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{r}, t) \\
& = (1/4\pi) 2^{-3} [(\partial / \partial \mathbf{u}_1) \cdot (\partial / \partial \mathbf{x}_1) + (\partial / \partial \mathbf{u}_2) \cdot (\partial / \partial \mathbf{x}_2)] g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}) \times \\
& \quad \times \int \int |\mathbf{r}'|^{-1} (\mathbf{u}_3 \cdot \partial / \partial \mathbf{r}')^2 g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}') g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{u}_- \quad (58)
\end{aligned}$$

この方程式は、圧力項以外はすべて二点分布 $f^{(2)}$ の形で書かれているが、圧力項だけは、 g_+ 、 g_- の形が残っているので、形式的には閉じていない。しかし、 $f^{(2)}$ は、交差独立仮説 (19)、(20) を用いて g_+ 、 g_- で表わすことができるので、本質的には閉じている。この意味で、圧力項における g_- の積の積分が、畳み込み (convolution) 積分であることは興味深い。(58) 式を具体的に解いて、解の振舞いを調べることは、次の課題である。

引用文献

- [1] Lundgren, T. S. (1967): Phys. Fluids, 10, 969-975.
- [2] Monin, A. S. (1967): PMM J. Appl. Math. Mech. 31, 1057-1068.
- [3] 巽友正 (1997): 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-36, pp. 29-32.

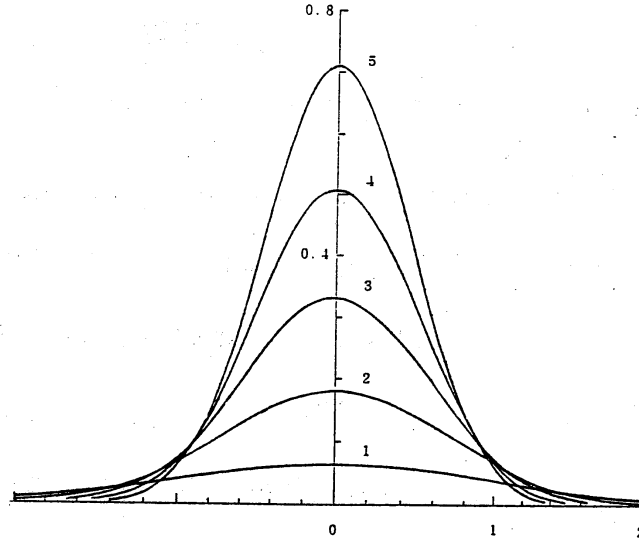


図 1. 一様減衰乱流中の一点における速度分布

速度分布: 三次元正規(ガウス)分布

エネルギー減衰則: $E \propto 1/t$

縦座標は速度分布: $f(\mathbf{u}, t)$

横座標は乱流の速度: $u = |\mathbf{u}|$

パラメターは時間: $t/2\alpha_0^2$