

G a r d n e r の 4 分 割 問 題 に つ い て

東京電機大学・理工・情報／一松 信 (Sin Hitotumatu)

Dept. of Information Sciences, Tokyo Denki Univ., Hatoyama Campus; Saitama Pref., Japan 350-03

要旨：表題の問題は平面の直角三角形の面積を、互いに直交する2直線によって4等分することである。ここではその方程式を、いわゆる近似代数計算の考えの下で解くことを試みる。

1. 問題

任意の平面領域 D は、互いに直交する2直線により、面積を4等分することができる。その解は一般的には一意のだが、必ずしもいつでもそうとは限らない。一実際 D が正方形なら解は無数にある。

しかし抽象的な解の存在証明は容易でも、具体的な図形 D に対してそれを現実構成するのは、別の困難な問題である。Martin Gardnerは、Scientific American(1976)に連載した「数学ゲーム」の一つで、図形の分割問題を扱い、その中で三辺の長さの比が3:4:5の直角三角形 D の面積を、直交する2直線で4等分する問題を提出している([1]に再録)。

この問題は既に解決されており、解が一意的なことも証明されている([1]の増補参照)。直角三角形を任意の形に一般化しても、以下に述べるように代数方程式で表現され、標準的な手法で数値的に解ける。しかしそれは必ずしも簡単でない。これには佐々木教授らによる(例えば[2])近似代数計算の考えが有効と思う。

2. 方程式

D を三辺の長さが a, b, c ($a \leq b < c$) である直角三角形とする。前記のような直交4等分線は、もしも $a=b$ ならば図1の形であり、 $a \rightarrow 0$ の極限では図2のような形になる。この両極端の間を連続変形すれば、一般の直角三角形では図3のような形になることがわかる。

図3において、未知数を次のように置く。

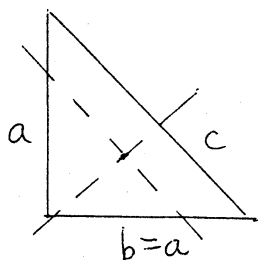


図 1

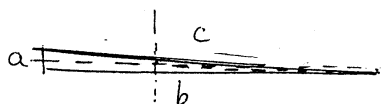


図 2

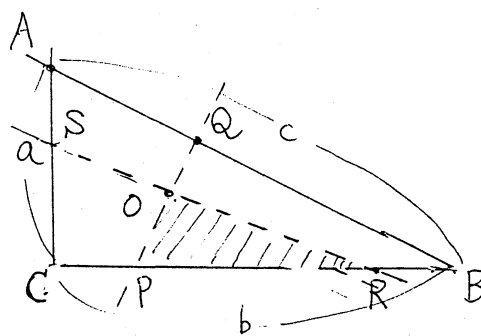


図 3

$$BQ = cu, CS = av, BP = bx, CR = by; \quad 0 < u, v, x, y < 1$$

実際には $\frac{1}{2} < u, v < \frac{\sqrt{2}}{2} < x, y < 1$ である。

直線 PQ, RS が D の面積を 2 等分することから直ちに

$$(1) \quad ux = 1$$

$$(2) \quad vy = 1$$

をうる。次に PQ と RS とが直交するという条件は

$$(av/by) \cdot [au/b(x-u)] = 1$$

であるが、(1)(2)を使うと

$$(3) \quad \frac{2}{y} (4x^2 - 2) = a/b$$

となる。あるいは $\phi(x, y) = y \cdot \sqrt{4x^2 - 2}$ と置くと、次のようになる。

$$(3') \quad \phi(x, y) = a/b.$$

最後に三角形 OPQ の面積を計算して、全体の $\frac{1}{4}$ と置く。それには CB, CA を X, Y-軸とする直角座標を導入すると、直線 PQ, RS の方程式がそれぞれ

$$[X - b(1-x)]/b(x-u) = Y/au \quad \text{及び} \quad X/by + Y/av = 1$$

なので、X を消去して高さ Y を求めると

$$Y = a(x+y-1)/[(x/u)+(y/v)-1]$$

である。したがって

$$\frac{1}{4} = \Delta OPQ / \Delta ABC = (x+y-1)Y/a = (x+y-1)^2 / [(x/u)+(y/v)-1]$$

である。ここで再び (1)(2) を使って整理すると、最終的に方程式

$$(4) \quad x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 4y + 5/2 = 0$$

をうる。(1)(2)(3)(4) が解くべき連立代数方程式である。ここでパラメタ a, b が比の形で (3) にのみ現れることと (4) が x, y について対称なことに注意する。

3. 解法の試行錯誤

(i) u, v は (1), (2) で決まるから、 x, y について (3), (4) を解けばよい。これらから y を消去し x に関する 8 次方程式を作って解くことは、標準的な方法でできる。しかしその計算は意外に複雑であり、それからただ一つの解を求める方法は賢明とはいえない。

(ii) (4) は双曲線を表し、次のようにも変形できる。

$$(x-y)^2 = (x+y-1)(3x+3y-5)$$

さてもし (4) の定数項が $1/6$ だけ増えて $5/2$ でなく $8/3$ ならば、(4) は 2 個の 1 次式の積に因数分解できる。そのときの因数は

$$(\alpha x + \alpha^{-1} y - \sqrt{8/3})(\alpha^{-1} x + \alpha y - \sqrt{8/3}) = 0,$$

$$\text{ここに } \alpha = (\sqrt{3} + 1)/\sqrt{2}, \quad \alpha^{-1} = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$$

である。この 2 個の直線は $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ で交わり、(4) の漸近線である。当面必要な (4) の部分は

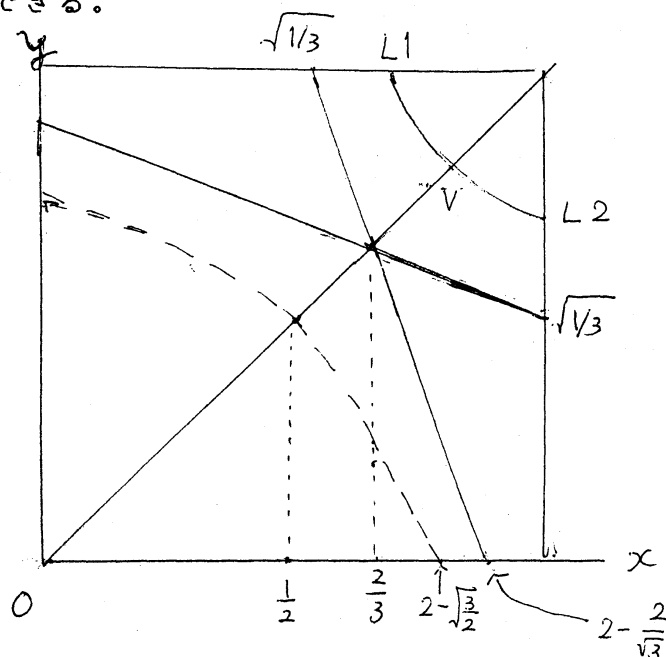
$$V = (5/6, 5/6) \text{ を通る } (\sqrt{1/2}, 1), (1, \sqrt{1/2}) \text{ 間の弧}$$

だけである (図 4)。

(iii) この弧の上で $x+y$ はほぼ 1.7 であり、 xy はほぼ 0.7 である。ゆえに与えられた a, b に対し、(3') から初期値として

$$(5) \quad y_0 = \sqrt{0.98 - (a^2/2b^2)}$$

を取ることができる。



$$\begin{aligned} V &= (5/6, 5/6) \\ L1 &= (\sqrt{1/2}, 1) \\ L2 &= (1, \sqrt{1/2}) \end{aligned}$$

図 4

これから(4)により x を決め、(3)により y を決め、...という逐次近似が可能である。この反復は収束するが、収束は遅くて実用にならない。(5)は初期値の参考に留め、別の反復を考えた方がよい。

(iv) 一般に2次曲線は、媒介変数 t によって有理式(分母・分子が t の2次式)で表される。それにより(3')を

$$\phi(x(t), y(t)) = a/b$$

と変形し (iii)で求めた初期値から t について例えばNewton-Raphson法で解くことができる。しかしこれも式が複雑になりすぎて感心しない。

(v) (4)を媒介変数で近似的に表すには、大域的な式よりも局所的な表現の方がよい。その上の1点 $P : (x_0, y_0)$ における(4)の接線は

$$(6) \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0; \quad A = 2x_0 + 4y_0 - 4, \quad B = 4x_0 + 2y_0 - 4$$

で表される。 (x, y) が十分 (x_0, y_0) に近ければ

$$(7) \quad x = x_0 + B\delta, \quad y = y_0 - A\delta + \epsilon$$

と置くと、 $|\epsilon| \ll |\delta| \ll 1$ である。(6)から $A^2 - 4AB + B^2 = -2$ なので、双曲線(4)

$$\text{は} \quad B\epsilon + (12x_0 - 8)\delta\epsilon + \epsilon^2 = 2\delta^2$$

と変形される。ここで高次の項を無視すれば、近似的に

$$(8) \quad \epsilon = 2\delta^2/B$$

をうる。この方式で準Newton法を使うのが最もよかった。

4. 準Newton法

(3')の ϕ の偏導関数は

$$\partial\phi/\partial x = 4xy/\sqrt{4x^2-2} = 4xy\phi, \quad \partial\phi/\partial y = \sqrt{4x^2-2} = \phi/y$$

である。ゆえに点 (x_0, y_0) の近くで(3')を解くためには

$$\partial\phi/\partial x = 4x_0y_0^2/(a/b), \quad \partial\phi/\partial y = a/by_0$$

と置いてよい。したがって ϕ のTaylor展開と(7)とから、準Newton近似

$$(9) \quad C\delta = (4bBy_0^2/a - aA/by_0)\delta = (a/b) - \phi(x_0, y_0)$$

で δ を、(8)で ϵ を決めることができる。初期値がよければ、数回の反復で満足すべき解がでるし、この計算には普通の電卓で十分である。

実例として、最初の $a:b=3:4$ の場合を考える。このときには図4における双曲線の頂点 $V=(5/6, 5/6)$ が $\phi(x_0, y_0)=0.73493$ であって $3/4$ に極く近い。したがって $x_0=y_0=5/6$ と取ると (6) で $A=B=1$ であり、近似式 (9), (8) は次のようになる。

$$(9') \quad C\delta = 0.75 - \phi(x_0, y_0), \quad C=1771/810=1/0.45737,$$

$$(8') \quad \epsilon = 2\delta^2.$$

逐次の計算値は、次の表の通りになった。この計算は普通の電卓で実行した。

x	y	$\phi(x, y)$	δ	ϵ
0.83333	0.83333	0.01507	0.00689	0.000093
0.84022	0.82653	-0.00023	-0.00010	0.000093
0.84012	0.82663	-0.000007		

この最後の値は、5桁の精度では最良である。このとき他の変数の値は次のようになった。

$$u=0.59515, \quad v=0.60487.$$

5. 結論

以上の計算は、結局単なる逐次近似計算にすぎない。近似代数計算([2])的な考えは、双曲線(4)を近似因数分解したり、 $xy = \text{定数}$ で近似したりして、よい初期値を求めるのに使っただけである。

しかし連立代数方程式を扱うとき、伝統的な消去法(Grobner基底なども)が、唯一でもなく最良とも限らない。数値計算には直接よい初期値を求めて、逐次近似を試みる方が簡単な場合も多いらしい。ここに述べたのはその一例のつもりである。今後同様な手法が有効な実例を探してみたい。

なお本報告を今少し詳しく英文で書いた論文が文献[3]である。

謝辞：本報告は、研究会で発表した内容に、何人かの方々からの御注意を加筆したものである。色々と御教示下さった方々に、失礼ながら一括して感謝の辞を述べたい。

参 考 文 献

- [1] Martin Gardner, Penrose tiles to trap-door ciphers —
... and the return of Dr. Matrix, W.H. Freeman and Co.
1988, Chap. 12, 日本語訳, 丸善より近刊予定.
- [2] T.Sasaki, M.Suzuki, M.Kolar and M.Sasaki, Approximate
factorization of multivariate polynomials and absolute
irreducibility testing, Preprint to IPCR (Riken),
1990, Aug.
- [3] S.Hitotumatu, On a quadri-section problem by M.Gardner,
Report of Tokyo Denki Univ., will appear, 1992.