

指数性の検定, 分布型の検定

日本アイ・ビー・エム 荻谷 政昭

1. まえがき

「確率分布の特徴づけ」の研究では, 個々の分布の個性を汲み尽くそうとするが, 本報告ではこれに反して, 諸分布型を単一の規準に従って比較するという「管理社会型接近」について述べる。この比較では, 個々の確率分布ではなく分布型を, その裾の軽さ(重さ)によって比べる。

分布型を比較しようとするとき, まず「分布範囲または支持域 (support) が異なるものをどう扱うか」, という問題が生じる。実数軸全体上の分布と, 正の部分の上の分布とを比較することはあまり意味が有いてあろう。連続分布と离散分布とをいっしょに扱うかどうかは議論の分かれ道とで, いっしょに扱いたいが扱い難い, のが実情であろう。离散分布も, たとえば自然数上の分布では「分布型とは何か」, ということも問題となる。

ここでは支持域が $(0, \infty)$ に含まれる分布の族だけを取り上げ、分布型の検定問題を目標として議論する。 $(-\infty, \infty)$ 上の、既知の点に関して対称な分布の族も、この議論が覆うことができる。

2. 分布の裾の比較

分布関数 $G(y)$ をもつ確率変数 Y を観測として、それよりも裾の軽い分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数 X を定義する。次の制限をおいておく。

$$(A) \quad F(0) = G(0) = 0; \quad F(x), G(y) \text{ は連続};$$

$$G(y) > 0, \quad y > 0.$$

また必要に応じて、 X, Y は確率密度 $f(x), g(y)$ をもつものとする。

定義 1

$$(1) \quad X < Y \quad (\mathcal{J}_4)$$

$$\frac{d}{du} f(F^{-1}(u)) / \frac{d}{du} g(G^{-1}(u)), \quad 0 < u < 1,$$

が存在して非減少。ただし分母の導関数は連続であり、

$$\lim_{u \rightarrow 1-0} f(F^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1-0} g(G^{-1}(u)) = 0.$$

$$(2) \quad X < Y \quad (\mathcal{J}_3)$$

$$G^{-1}F(x) \text{ が } 0 < F(x) < 1 \text{ で凸。}$$

$$(3) \quad X \prec Y (\mathcal{J}_2)$$

$G^{-1}F(x)$ は $0 < F(x) < 1$ で星型。

$$(4) \quad X \prec Y (\mathcal{J}_1)$$

$G^{-1}F(x)$ は $0 < F(x) < 1$ で増加法的。

$$(5) \quad X \prec Y (\mathcal{J}_{II})$$

$$(1-F(x)) / \int_x^\infty g(G^{-1}F(x)) dx, \quad 0 < F(x) < 1$$

が存在して非減少。

$$(6) \quad X \prec Y (\mathcal{J}_I)$$

$$\int_x^\infty g(G^{-1}F(x)) dx \leq (1-F(x)) \int_0^\infty g(G^{-1}F(x)) dx, \quad 0 < F(x) < 1.$$

定義について2の説明. a. (2) は $f(F^{-1}(u))/g(G^{-1}(u))$ が存在するとき, これは非減少と...は...と同等である。

b. 関数 $h(x)$ が星型 (starshaped) であるとは, $h(\lambda x) \geq \lambda h(x)$, $0 < \lambda < 1$, すなわち $h(x)/x$ が非減少であることである。また関数 $h(x)$ が増加法的 (superadditive) であるとは $h(x+y) \geq h(x) + h(y)$ であることである。

命題 1 a. $X \prec Y (\mathcal{J}_i) \Rightarrow X \prec Y (\mathcal{J}_j)$ と...命題を簡単に $\mathcal{J}_i \Rightarrow \mathcal{J}_j$ と表わすと, 次の図式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4 &\Rightarrow \mathcal{J}_3 \Rightarrow \mathcal{J}_2 \Rightarrow \mathcal{J}_1 \\ &\quad \Rightarrow \mathcal{J}_{II} \Rightarrow \mathcal{J}_I \end{aligned}$$

しかも, これは以外の関係は一般の G に対しては成立しない。

b. 関係 $X < Y (J_i; i = 1, 2, 3, 4)$ は相対的である。

c. 関係 $X < Y (J_i; i \text{ は任意})$ は X の尺度の変化と, $F(0) = 0$ と...; 範囲での位置の変化に依存しない。つまり

$$X < Y (J_i) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} < Y (J_i) \\ (\forall \mu, \forall \sigma > 0)$$

(X と Y の関係は相対的であるから, Y について相当の変換をしても同様である。)

証明 a. $J_4 \Rightarrow J_3$. 次の補助定理による。

補助定理 A. $p(x)/q(x)$ が $-\infty \leq a < x < b \leq \infty$ で存在し
て非減少であるとする。

$$P(x) = \int_a^x p(x) dx + C_p, \quad Q(x) = \int_a^x q(x) dx + C_q$$

とすると, 次の条件の下で $P(x)/Q(x), a < x < b$, に対して非減少である: $q(x)$ が連続で

$$\lim_{x \rightarrow b-0} P(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} Q(x) = 0,$$

$$P(x), Q(x) \geq 0, \quad a < x < b.$$

$J_3 \Rightarrow J_{II}$. これは上の補助定理の変形により証明できる。

$J_{II} \Rightarrow J_I$. J_{II} において $x \rightarrow 0$ の場合との比較をする。

$J_3 \Rightarrow J_2 \Rightarrow J_1$. F, G に関する制約 A の下では, G/F が凸ならば星型, 星型ならば凸である。

$\gamma_2 \neq \gamma_I$ の反例. $G(\gamma) = \gamma^2$ とする. $G^{-1}F(x) = \sqrt{F(x)}$
 $= K(x)$ を次のような星型関数とする.

$$K(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 < x < c, \\ bx^2 + (1-b)x, & c < x < 1, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 < a, 1 > ac \\ b = \frac{1-ac}{1-c} \end{array} \right.$$

パラメータを適当に選ぶ (たとえば $a=9, c=0.1$) とすると γ_I が成り立つ.

他の関係が成り立たないことは G が一様分布, 指数分布の場合について後述べる.

b. γ_4 は比による定義により, $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ は, 凸, 星型, 増加関数という性質の関数の合成について閉じている, つまり, たとえば凸関数の凸関数は凸関数である, ことによる.

c. 定義の各式に σ, τ $F(x)$ を $F((x-\mu)/\sigma)$ と変えることは元の原点と尺度の変換にしか過ぎないことを認めればよい.

§31 定義1に基づいて諸種の分布型の関連を調べると次の通りとなる.

a. 正規 (正部分) $\prec$ ロジスティック (正部分) $\prec$ 指数 $\prec$ パレート (γ_4)

b. ロジスティック (正部分) $\prec$ コーシー (γ_4)

コーシーは指数より裾の重い分布とみられているが, 実際には γ_2 や γ_3 の意味で重いと断言しているが, 誤りで, われわれの定義では γ_1 の意味でも比較不能である. それは, 中

心部分を少し除けばコーシーは確かに裾が重いのであるが、
定義 1 では $(0, \infty)$ 全体での比較と与えるためである。

c. パレート $F_\alpha(x) = 1 - 1/(1+x)^\alpha$, $0 < x < \infty$. α が大きいほど $\mathcal{J}_4$ の意味で裾が軽い。

d. ワイブル $F_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $0 < x < \infty$. α が大きいほど $\mathcal{J}_3$ の意味で裾が軽い。 $\mathcal{J}_4$ の意味ではどのよう $\gamma \alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2$ に対して γ も比較不可能である。

e. バー $F_\alpha(x) = 1 - 1/(1+x^\alpha)$, $0 < x < \infty$, α が大きいほど $\mathcal{J}_4$ の意味で裾が軽い。

3. 一様分布, 指数分布との裾の比較

基準とする分布関数 $G(y)$ として一様分布, 指数分布を逆ぶことは興味深い。まず一様分布をとりあげる。記号 u で一様分布の分布関数または確率変数を表わすことにする。

命題 2 a. 一様分布と $\mathcal{J}_4$ の意味で比較することはできない。 $\mathcal{J}_I, \mathcal{J}_E$ の意味で比較可能であるためには $a = F'(1) < \infty$ であるなければならない。定義 1 は次のようにする。

(2) $X \prec u (\mathcal{J}_3)$ $F(x)$ が凸。 $f(x)$ が存在すれば非減少。

(3) $X \prec u (\mathcal{J}_2)$ $F(x)$ が星型。

(4) $X \prec u (\mathcal{J}_1)$ $F(x)$ が増加凸的。

(5) $X \prec u (\mathcal{J}_I)$ $(1-F(x))/(a-x)$ が非減少。

$$(b) \quad X \sim u(\mathcal{I}_I) \quad F(x) \leq x/a.$$

また $X \sim u(\mathcal{I}_I)$ ならば $F'(1) < \infty$ である。

b. 次の図式の関係が成り立ち、これ以外は成り立たない。

$$\begin{array}{c} \mathcal{I}_3 \Rightarrow \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I}_1 \\ \Downarrow \\ \mathcal{I}_I \Rightarrow \mathcal{I}_I \end{array}$$

証明 a. 比較可能の条件は定義より明らかである。 $F(x)$

$\sim u(\mathcal{I}_I)$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $F(x_0) \geq \varepsilon$

なる x_0 が存在すれば $F(x_0/\varepsilon) \geq \varepsilon^{-1} F(x_0) \geq 1$. $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$

の意味により軽いとは有限区間上の分布に限られることとなる。

る。

b. $\mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathcal{I}_I$ は (b) の条件より明らか。

$\mathcal{I}_I \not\Rightarrow \mathcal{I}_1$ は

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} a_1 + a_2 (x - \frac{1}{3}) & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + a_3 (x - \frac{2}{3}) & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$0 < a_2 < a_1 < 1 < a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

とすれば反例である。 $\mathcal{I}_2 \not\Rightarrow \mathcal{I}_I$ は上の反例で $1 < a_1$ とすればよい。

注意 $u \sim X(\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1)$ について上と逆の関係が成

り立つ。つまり $F(x)$ は凹 ($f(x)$ は非増加), $F(x)/x$ は非

増加, $F(x)$ は増加凸的, となる。しかし $u \sim X(\mathcal{I}_I)$ は,

$(1-x) / \int_{g(x)}^{\infty} g^2(y) dy$ は非減少, となる。

指数分布との比較のため, その分布関数または確率変数を e で表わす. $G(x) = 1 - e^{-x}$, $G^{-1}(u) = -\log(1-u)$, $g(G^{-1}(u)) = 1-u$ に注意する

命題 3 a. 指数分布と比較するとき定義 1 の次のようにする.

3.

(1) $X \prec e (J_4)$ Polya type Frequency 2. $-\log f(x)$ が凸,

あるいは $(X-a | X>a) \prec (X-a' | X>a') (R_3)$,

$\forall a > a' > 0$.

(2) $X \prec e (J_3)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate.

$-\log(1-F(x))$ が凸, あるいは

$(X-a | X>a) \prec (X-a' | X>a') (R_1)$, $\forall a > a' > 0$.

(3) $X \prec e (J_2)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate Average.

$-\log(1-F(x))$ が凸型.

(4) $X \prec e (J_1)$ New Better than Used. $-\log(1-F(x))$ が

増加凸的, あるいは $(X-a | X>a) \prec X (R_1)$, $\forall a > 0$.

(5) $X \prec e (J_{II})$ $-\log \int_x^\infty \{1-F(t)\} dt$ が凸. あるいは

$(X-a | X>a) \prec (X-a' | X>a') (R_E)$, $\forall a > a' > 0$.

(6) $X \prec e (J_I)$ $1-F(x) \geq \int_x^\infty (1-F(t)) dt / \int_0^\infty (1-F(t)) dt$

あるいは $(X-a | X>a) \succ X (R_E)$, $\forall a > 0$.

ただし R_3, R_1, R_E は確率的大小関係で, それぞれ密度が非減少, 分布関数がより小, 期待値がより大, を意味する.

b. 次の包含関係が成立し, 二つ以外は成り立たない.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{I}_4 & \Rightarrow & \mathcal{I}_3 & \Rightarrow & \mathcal{I}_2 & \Rightarrow & \mathcal{I}_1 \\ & & & \Rightarrow & & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{I}_{II} & \Rightarrow & \mathcal{I}_I \end{array}$$

証明 a. 確率的大小に関する議論より明らかである.

b. $\mathcal{I}_I \Rightarrow \mathcal{I}_{II}$ は $\mathcal{R}_I \Rightarrow \mathcal{R}_{II}$ より明らかである.

$\mathcal{I}_{II} \not\Rightarrow \mathcal{I}_I$. $1-F(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}$, $\alpha > 1$, とすると

$$\psi(x) = -\log(1-F(x)) = x^\alpha - (\alpha-1)\log x - \log \alpha \text{ が増加函数である}$$

u. 実際, $\psi(2x) - 2\psi(x) < 0$, $x \rightarrow 0+$.

$\mathcal{I}_2 \not\Rightarrow \mathcal{I}_{II}$. $1-F(x) = e^{-\varphi(x)}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \alpha > 1, x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

とすると,

$$\{1-F(1-\varepsilon)\} / \int_{1-\varepsilon}^{\infty} \{1-F(t)\} dt \cong \alpha \varepsilon / (e^{-1} + \varepsilon) \downarrow (\varepsilon \rightarrow 0)$$

4. 裾の軽さの検定 ($\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_2$)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を $F(x)$ からの確率標本とすると, 検定問題

$$H_0: F = G (\mathcal{I}_3) \quad (\text{すなわち } F \geq G \text{ か } F \leq G (\mathcal{I}_2))$$

$$H_1: F < G (\mathcal{I}_3)$$

を考える. 検定統計量を導く動機として, 変換を考える.

$$H_F^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{F(t)} g[G^{-1}(x)] dx = \int_0^t \frac{g(G^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))} du$$

これにより, 上の検定問題は

$$H_0: H_F(x) \text{ が } 0 < H(x) < 1 \text{ で線形.}$$

$$H_1: H_F(x) \text{ が } 0 < H(x) < 1 \text{ で凸.}$$

とこの問題に変換される。しかも, この変換の利点は,

$K < F < G$ ($\mathcal{J}_3$) という関係があるとき, これは

$$\frac{H_K^{-1}(t)}{H_K^{-1}(1)} \geq \frac{H_F^{-1}(t)}{H_F^{-1}(1)} \geq t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(分母は有限であるとして), この順序的大小関係に移す

ことである。この $H_F^{-1}(t)$ を経験分布関数を用いて近似する

と,

$$H_{F_m}^{-1}(t) = \int_0^{F_m^{-1}(t)} g[G^{-1}F_m(u)] du$$

$$\begin{aligned} H_{F_m}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) &= \sum_{i=1}^j g\left[G^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)\right] (X_{(j)} - X_{(j-1)}) \\ &= n^{-1} \sum_{j=1}^j (n-j+1) (X_{(j)} - X_{(j-1)}) \quad (G(j) = 1 - e^{-j} \text{ として}) \end{aligned}$$

これは, 寿命試験の言葉では, $X_{(j)}$ が表わす j 番の寿命の総和

(total time on test) である。

命題 4 (Barlow + Doksum) $K < F < G$ ($\mathcal{J}_3$) のとき,

す,

$$\frac{H_{K_m}^{-1}(i/n)}{H_{K_m}^{-1}(1)} > \frac{H_{F_m}^{-1}(i/n)}{H_{F_m}^{-1}(1)} > \frac{H_{G_m}^{-1}(i/n)}{H_{G_m}^{-1}(1)} \quad (\mathcal{Q}_1)$$

系 $(W_i \stackrel{\text{def}}{=} H_{F_m}^{-1}(i/n) / H_{F_m}^{-1}(1), i = 1, \dots, n)$ の非減少関数を検定統計量とする検定 ϕ の検出力は $\beta_\phi(K) \geq \beta_\phi(F) \geq \beta_\phi(G)$.

(このような検出力，一様単調性を彼らは isotonic と呼んでいる。)

具体的な検定統計量として，次のようなものを考えよう。

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} J(W_j) \quad J(\cdot) \text{ は } [0, 1] \text{ 上の増加関数.}$$

特に $J(x) = x$ のとき， $\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^j (n-j+1) (X_{(j)} - X_{(j-1)}) / \sum_{j=1}^n (n-j+1) (X_{(j)} - X_{(j-1)})$ は，cumulative total time on test statistic と呼ばれ，これをゴッドフリーで隔てられる対立仮説に關して， J がある regularity condition を満たす範囲内で，漸近的に $\hat{\tau} = \tau$ である。

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} L\left(\frac{j}{n}\right) W_j, \quad L(u) \geq 0.$$

$$(3) \quad \sup |W_j - j/n|.$$

ところで，上記の (1), (2) は和を零に直せば $X_{(j)} / \sum X_{(j)}$ の1次結合として表わすことができる。このような統計量に關しては，実は，より強い命題が成り立つ。

命題 5 $K \prec F \prec G$ (J_2) とすると， G, F, K におけるそれぞれの確率標本の順序統計量 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$; $Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$; $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ に關して

$$\frac{\sum_{j=1}^n c_j Z_{(j)}}{\sum_{j=1}^n c_j Z_{(j)}} \prec \frac{\sum_{j=1}^n c_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^n c_j Y_{(j)}} \prec \frac{\sum_{j=1}^n c_j X_{(j)}}{\sum_{j=1}^n c_j X_{(j)}} \quad (R_1)$$

が成り立つ。 $c_1, \dots, c_n > 0$ は任意の係数。

証明 τ 命題 4 の証明に従う。 X, Y の関係だけ

証明すれば十分である。 $V_i = G^{-1}F(Y_{(i)})$ とすると, $G^{-1}F$ が異型であるから, $V_i / Y_{(i)}$ が i に依して非減少である。
 分母分子に c_i を乗じて, 補助定理 A に類似の定理を適用すれば,
 $\sum_{j=1}^i c_j V_j / \sum_{j=1}^i c_j Y_{(j)}$ が i に依して非減少となる。

$$\frac{\sum_{j=1}^i c_j V_j}{\sum_{j=1}^i c_j Y_{(j)}} \leq \frac{\sum_{j=1}^m c_j V_j}{\sum_{j=1}^m c_j Y_{(j)}} \quad \text{より} \quad \frac{\sum_{j=1}^i c_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^m c_j Y_{(j)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^i c_j V_j}{\sum_{j=1}^m c_j V_j}$$

$(V_1, \dots, V_m)$ は $(X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$ と同一の分布に従うから上記の結論が得られる。

$c_1 = \dots = c_m = 1$ とし, 上の統計量の 1 次結合を作れば, およそ例 (1), (2) の統計量が得られる。

5. 裾の軽さの検定 ($\mathcal{J}_1$)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を $F(x)$ からの独立標本とすると,
 検定問題

$$H_0: F = G \quad (\mathcal{J}_1) \quad (F \succ G \text{ かつ } F \prec G \text{ } (\mathcal{J}_1))$$

$$H_1: F \prec G \quad (\mathcal{J}_1)$$

を考える。より強い $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ の条件が成り立つならば $\mathcal{J}_1$ の検定を用いる方がより大きな検出力を期待できるから, 右に列を反逆の下では他の検定法を考えねばならない。

検定統計量を導く印模として, G が指数分布の場合を考える

$$3. \quad F \leq c(\mathcal{F}) \iff \bar{F}(x)\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x+y), \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

$$\Rightarrow \iint \{ \bar{F}(x)\bar{F}(y) - \bar{F}(x+y) \} dF(x) dF(y) \\ = \frac{1}{4} - \iint \bar{F}(x+y) dF(x) dF(y) \geq 0$$

したがって、 $\iint \bar{F}_n(x+y) dF_n(x) dF_n(y)$ が小さければ「たいてい」棄却する。この考えから、これを漸近的に同等な統計量として

$$J_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum' \phi(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2} + X_{\alpha_3})$$

$$\phi(a, b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

$$\sum': 1 \leq \alpha_i \leq n, \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq \alpha_3, \alpha_2 < \alpha_3$$

を満たす $n(n-1)(n-2)/2$ 個の 3 -元組 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ についてのみ。

から考えられる。次の命題が容易に証明できる。

命題6 (Hollander + Proschan) $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$

が F, G からの独立標本であり、 $F \leq G(\mathcal{F})$ ならば

$$J_n(X_1, \dots, X_n) \leq J_n(Y_1, \dots, Y_n). \quad (\mathcal{Q}_1)$$

ただし与えられた条件の下で、簡単に示すことができる J_n の数値計算を求めるとき、計算は一般に G に依存し、たとえ n が小さいときにも容易ではない。しかし、 n が少し大きくなり、 F が $G(x)$ の簡易で与えられるような場合、カルロ計算にでも頼らなければならぬ。

6. 代わりに.

残された問題を列挙しておく.

- (1) 諸分布間の裾の重さでさらに比較すること.
- (2) $X < Y$ (J_4) の検定を考えること.
- (3) 正規分布の検定について第4, 5節の議論を考えると, 一般には $(-\infty, \infty)$ にわたる中心未知の対称分布の裾の軽さの (重さの) 検定を考えること.
- (4) 离散分布の分布型の検定. たとえば幾何分布, ポアソン分布.
- (5) 裾の軽さの程度と, 若干の付帯条件による分布型の特徴づける.

以上.

参考文献

- §§ 2-3 柳本武美・渋谷政昭, 確率的又小とノンパラメトリック推論, 分布の裾の重さを中心として, 日本数学会秋季総合分科会, 1973年, 統計数学分科会予稿
- § 4 R. E. Barlow and K. A. Doksum, Isotonic tests for convex orderings, 6th Berkeley Symposium (1972), 293-323.
- これと同内容のもうが次書にあり.

R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner and
H. D. Brunk; *Statistical Inference under Order
Restrictions*, John Wiley, 1972.

§5 M. Hollander and F. Proschan, Testing whether
new is better than used, *Ann. Math. Stat.*, 43
(1972), 1136-1146.

(上記 柳下・法石 の文献も見よ。)