

三角形セル流の安定性

京大理物理 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1. 序

二次元の周期流及びその安定性は、二次元流におけるパターンや、逆カスケード等を、調べるための一つの理想流としてよく研究されてきた。小さなスケールに加えたフォーシングからどのように大きなスケールの構造が現れるのか、乱流の前段階としての分岐はどのようなものか、が調べられてきた。線形安定性についていうと、これまでに調べられている周期流のほとんど全てが、その臨界モードとして長波長極限を持ち、有限波長の臨界モードに対しては余り調べられていない。いわゆるセル流（本質的に二方向に対し周期的な流れ）には、ある方向に対して一様ということがないので、その固有値方程式は偏微分方程式となる。

最近、後藤・山田「1、2」や Sivashinsky・Yakhot「3」

により、長波長攪乱に対する二次元セル流の安定性がしらべられた。両解析とも長波長極限でその固有関数が定関数となるという仮定の基に、マルチプルスケール展開をしたものである。前者は、菱形セル流の安定性を数値的に解き、この解析と比べた。さらに彼らは、上記の仮定の基に一般のセル流に於ける臨界 Reynolds 数の評価の方法も示している。後者は、負の粘性という考えの基に、Kolmogorov 流（一次元周期流）、正方形セル流、正三角形セル流を調べている。また、薄膜流の実験に於いて二次元ウェイクの相互作用中によく似たパターンがみられる「4」。

本稿では、図 1 に示すようなパラメータ α を含む二等辺三角形形状のセル流の安定性を調べた結果「5」について報告する。この流れは、臨界モードが長波長極限とは限らず、有限波長の場合もある、また、E-, 0-mode と呼ぶ 2 つのモードへの分離が可能等、これまでに報告されている他の周期流とは異なる特性を持つ。

2. 数値計算の方法

二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、流れ関数 Φ を用いて無次元系で、次のように書ける。

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Phi, \Phi)}{\partial(x, y)} - \frac{1}{R} \Delta^2 \Phi = G \quad (1)$$

我々の対象となる定常セル流の流れ関数は、

$$\Phi(x, y) = \sin y \cdot (\cos y + \cos \alpha x) \quad (2)$$

であり、この流れを維持するためのフォーシング項 G は次のようになる。

$$G = \alpha(\alpha^2 - 3) \sin y \sin \alpha x \cos 2y - \frac{1}{R} \sin y \left\{ 16 \cos y + (1 + \alpha^2)^2 \cos \alpha x \right\} \quad (3)$$

この流れの線形安定性を考えるために、無限小の攪乱 $\varphi(x, y, t)$ を加え方程式を線形化する。

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Phi, \varphi)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(\Delta \varphi, \Phi)}{\partial(x, y)} - \frac{1}{R} \Delta^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

この偏微分方程式を、 $\varphi(\pm \infty, y, t) < \infty$ と $\varphi(x, \pm \infty, t) < \infty$ の境界条件の

基に解かなければならない。ここで、この方程式中の φ の係数関数が Φ と同じ周期性を持つので、Floquet 定理が使え、

$$\varphi(x, y, t) = \exp(\sigma t + i\mu\alpha x + i\nu y) \cdot F(\alpha x, y) \quad (5)$$

とできる。ここに μ, ν は、Floquet パラメータであり、関数 F は、 x -, y -方向に Φ と同様の周期を持つ。

周期関数 と は、Fourier 展開できるので、次のように書く。

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} B_{m, n} e^{i(m\alpha x + ny)} \quad (6)$$

$$F(x, y) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a_{m, n} e^{i(m\alpha x + ny)}$$

これらを代入して、 $a_{m, n}$ に対する無限大の次元を持つ同次方程式が得られる。

$$-\sigma \Delta_{\tilde{m}, \tilde{n}} a_{m, n} = \frac{1}{R} \Delta_{\tilde{m}, \tilde{n}}^2 a_{m, n} \quad (7)$$

$$+ \sum_{r, s} \alpha (\lambda \cdot \tilde{m} - r \tilde{n}) \cdot (\Delta_{\tilde{m}-r, \tilde{n}-s} - \Delta_{r, s}) B_{r, s} a_{m-r, n-s}$$

ここに、 $\Delta_{m,n} = \alpha^2 m^2 + n^2$ 、 $\tilde{m} = m + \mu$ 、 $\tilde{n} = n + \nu$ である。この式は、行列を用いて $\sigma a_{m,n} = M a_{m,n}$ と書けるので、結局 σ は、行列 M の固有値を求める問題となる。

いま考えている基本流の場合、Fourier係数 $B_{i,j}$ は、 $B_{0,2} = -B_{0,2} = B_{1,-1} = B_{-1,-1} = -B_{1,1} = -B_{-1,1} = i/4$ となり、他の流れと異なり Complex になる。更に面白いことに、図 2 に示すように $m+n=\text{odd}(\text{even})$ だけがカップリングし、相互にはしない。後での便宜のためそれぞれ 0-mode (E-mode) と呼ぶことにする。今までの流れは、 $a_{0,0} \neq 0$ という意味で E-mode に似ている。また、 F の周期性により、一般性を失うことなく、 $-0.5 < \mu, \nu \leq 0.5$ とできる。更に、変換 $\mu \rightarrow -\mu$ と $\nu \rightarrow -\nu$ を考えると、結局 $0 \leq \mu, \nu \leq 0.5$ の範囲だけを考えればよいことがわかる。

求めるべき固有値方程式は、無限大の自由度を持つので、有限の波数で打ち切ることを考える、つまり、行列 M を M_N で近似する。但し、行列 M_N は、その要素が、 $-N \leq m, n, k, l \leq N$ $a_{m,n,k,l}$ から成るものである。この行列 M_N の固有値を、Two-Step-QR 法により解いた。我々は、主に $N=5$ を用い、 $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ の範囲を調べた。収束は、 $N=6, 7$ とすることにより確かめた。

3. 数値計算の結課

図3に、 $Re[\sigma]$ の μ, ν 平面内での分布の代表的な例を、二次元の等高線を用いて示した。(a)はよく知られた長波長不安定の場合であり、(b)はこの流れ特有の有限波長不安定の場合である。 μ, ν に関する固有値方程式の対称性から、これらの等高線が $\mu-, \nu$ -軸を垂直に横切らなければならないが、これはほぼ満たされている。調べられた全ての場合に於いて、 $\mu-, \nu$ -軸から不安定になった。

各角度に対する臨界 Reynolds 数を、図4に示した。この臨界曲線は、六つの部分からなり、それぞれ a, a', b, c, d, d' と呼ぶことにする。 a, a', c は0-mode、 b, d はE-modeであり、 a', c は有限波長が臨界を与えるのに対し、他の部分は長波長である。また、 d は、 ν -軸から不安定となるのに対し、他の部分は全て μ -軸からなる。

3.1. 臨界曲線の構造

臨界曲線の構造を、より詳しく見る為に、モードカップリングの分離を利用し、0-, E-modeの固有値を別々に計算した。更に、'内部'での変化を見る為に、各固定した Floquet パラメータの臨界曲線を書いた。前述のように臨界は、各々 μ, ν -

軸上から起こるので、パラメータ値として $0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.5, 0.001$ の 6 個を選び、 μ, ν -軸上のみ調べた。これらは、4 つに分けて図 5 に示した。

有限波長が臨界を与える曲線 a', c は、色々な $\mu (\nu)$ の包絡線であり、そこで各 μ に対する曲線が入れ替わっていることがわかる。また、0-, E-mode 共に α が小さく (大きく) なるにつれ、 $\nu - (\mu -)$ 軸上で Reynolds 数が発散に向かうこともわかる。

4. 臨界 Reynolds 数の評価

ここでは、前の数値計算ではできないような領域での Reynolds 数の漸近値を中心にその評価を考える。

4. 1. マルチブルスケール展開

後藤・山田の方法を、この流れに適応する。前述のようにこの方法では、E-mode に対する臨界 Reynolds は評価できるかも知れないが、0-mode に対しては無理である。 $\varepsilon = i\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ として、 $(F, R, \sigma) = \sum_n (F_n, R_n, \sigma_n) \varepsilon^n$ を固有値方程式 (7) に代入すると、漸化式が得られ、 $F_0 \equiv 1$ の仮定と可解条件により、臨界

Reynolds数を評価する式が得られる。

簡単のため、 $\alpha \ll 1, \alpha \gg 1$ の場合を表にまとめる。

	$\alpha \rightarrow 0$	$\alpha \rightarrow \infty$
$\mu = \varepsilon, \nu = 0$	$R_c = \frac{2\sqrt{6}}{3}$	∞
$\mu = 0, \nu = \varepsilon$	∞	$R_c = 2$
$\mu = \varepsilon, \nu = \varepsilon$	∞	∞

この結果は、前の数値計算と一致する。

4. 2. 行列式

臨界 Reynolds 数と α の関係を知りたいので、固有値方程式

(7) で $\sigma = 0$ とすると、 $\det M = 0$ という関係式が得られる。

もちろん M は無限大の次元なので、数値計算の場合同様 M_N で近似する。更に M_N の対称性を利用すると計算量は、 $1/4$ で済む。

菱形セル流 $\psi(x, y) = \omega kx + \omega y$ に適応すると、($n=2$ のとき)

$$R_c = \sqrt{\frac{2(k^2+1)^2}{2k^4+k^2+1}} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{2(k^2+1)^2}{k^4+k^2+2}}$$

で、図 6 (a) に示すようになる。これは、後藤・山田の結果とよく一致する。

これを今の三角形セル流に適応すると、数式処理システム Reduceを使って、（表式は長いので略するが）得られ、そのグラフを図6（b）に示めす。但し表式を簡単にするため、 $\nu = 0$ とし、 $\mu \ll 1$ の Leading termをとった。

5. 終わりに

二次元周期流の一つである、三角形セル流の安定性を調べた。この流れは、これまでに調べられた他の周期流と異なり、有限波長が臨界モードとなる場合がある。これには、モードカップリングの分離が大切と思われる。つまり、これまでの流れには、この種の分離が不可能であり、常に成分があった。更に、E-modeでは、この流れに於いても臨界モードは長波長のみであるのに対し、O-modeは両方ともあるからである。しかしながら、Sivashinskyは、Navier-Stokes方程式に摩擦項を加えることにより、Kolmogorov流が有限波長の臨界モードを持つことを示した「6」。この場合と、モードカップリングの分離との関係については、いまカップリング分離する別の流れを扱って調べている「7」。

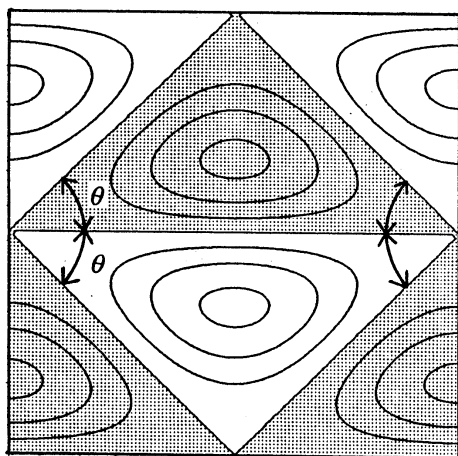
また、臨界 Reynolds 数の評価の方法は、どちらも固有関数が定関数になるとか、長波長不安定になることを前提にして

おり、E-modeに関しては調べられても、0-modeに関しては無理である。を固有関数に、の代わりにに、とかできればよいのであるが、表式が非常に複雑となり実際上使えない。もっと別な方法を考える必要がある。また、有限波長に対する評価や、解釈も必要である。「8」

引用文献

1. K. Gotoh and M. Yamada, J. Phys. Soc. Japan 53(1984)3395
2. K. Gotoh and M. Yamada, Fluid Dyn. Res. 1(1986)165
3. G. Sivashinsky and V. Yakhot, Phys. Fluids 28(1985)
1040
4. Q. Rahaman, A. Alvarez-Toledo, B. Parker, and C. M. Ho,
Phys. Fluids 31(1988)2385
5. M. Takaoka, J. Phys. Soc. Japan (1989)
6. G. I. Sivashinsky, Physica 17D(1985)243
7. M. Takaoka, in preparation for publication
8. M. Takaoka, in preparation for publication

図1、流れ関数 ($\alpha = \tan \theta$)



・渦度場

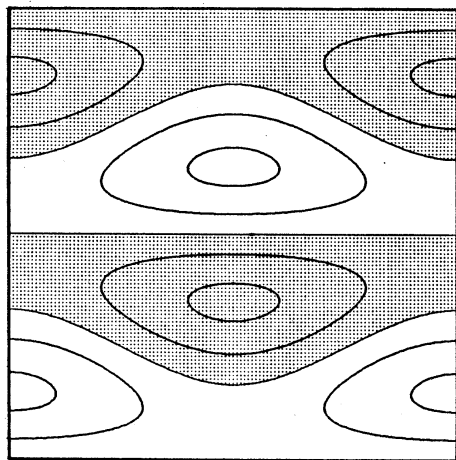


図2、E-, O-mode

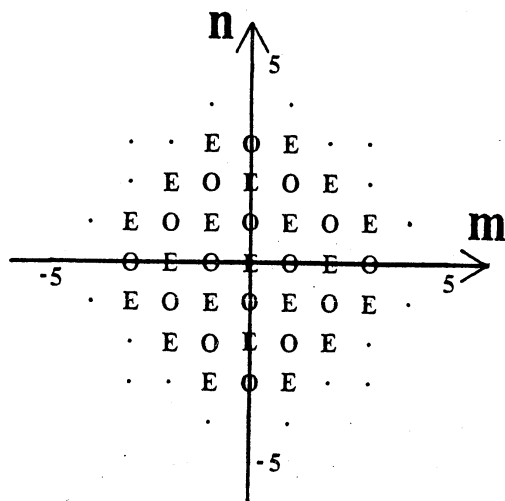


図3(a)、 $\theta = 30^\circ$, $R = 3$

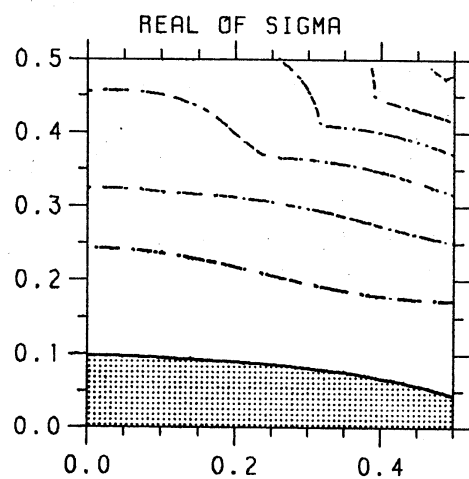


図3(b)、 $\theta = 60^\circ$, $R = 4$

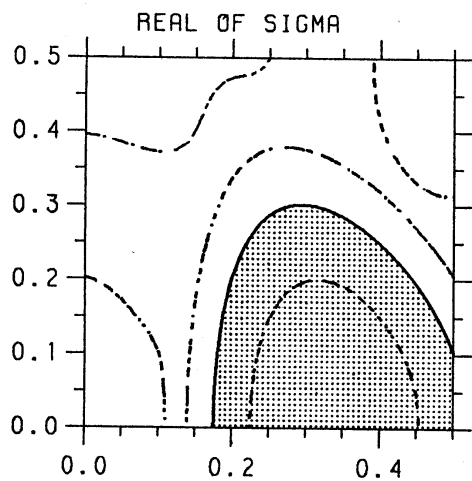
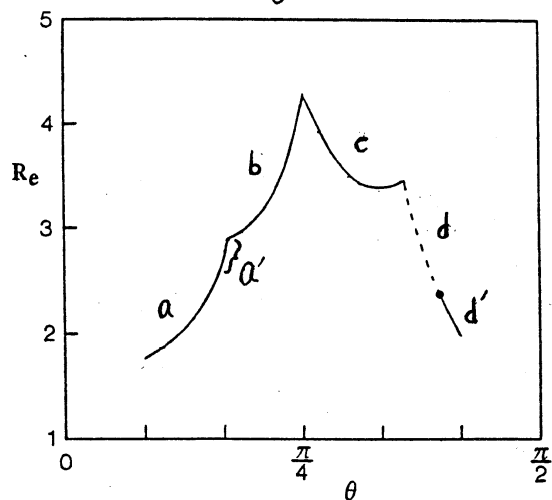


図4、臨界 Reynolds 数



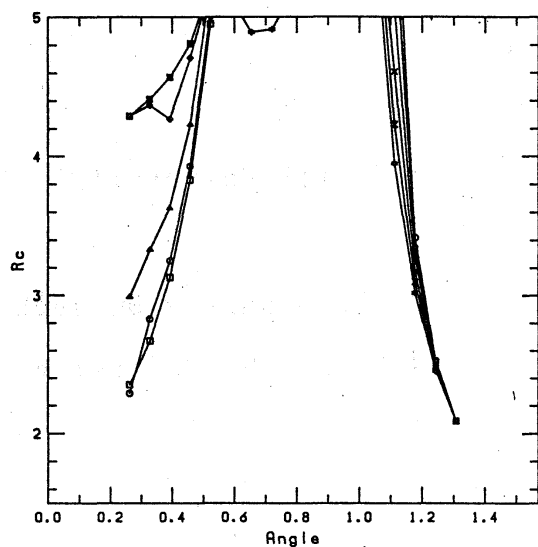
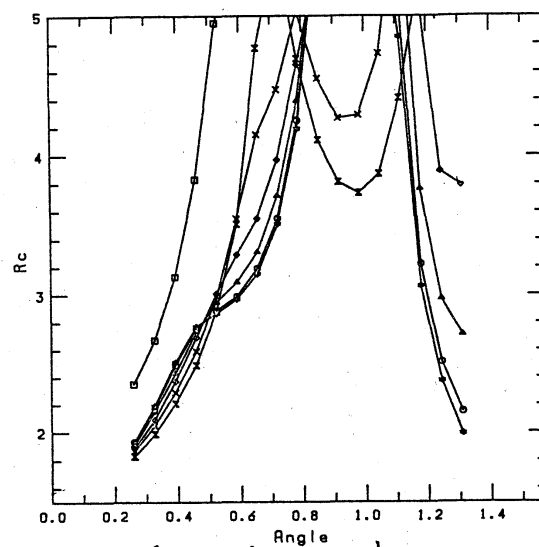


图5. $\uparrow$ E-mode, ν 轴
 $\downarrow$ O-mode, ν 轴



$\uparrow$ E-mode, μ 轴
 $\downarrow$ O-mode, μ 轴

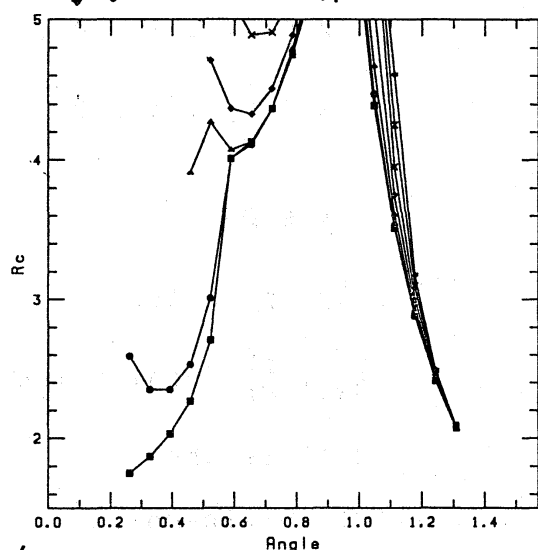
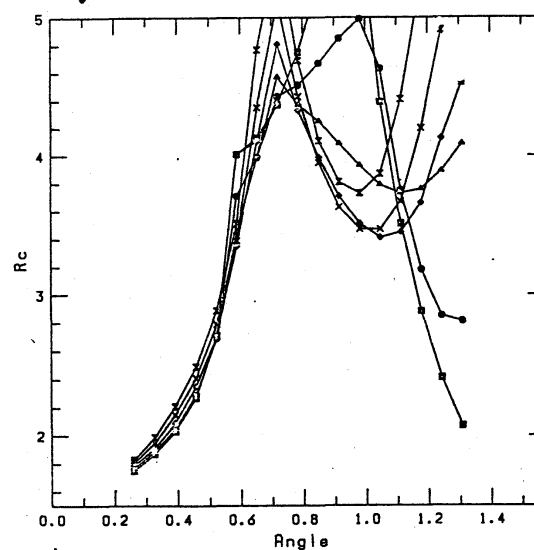
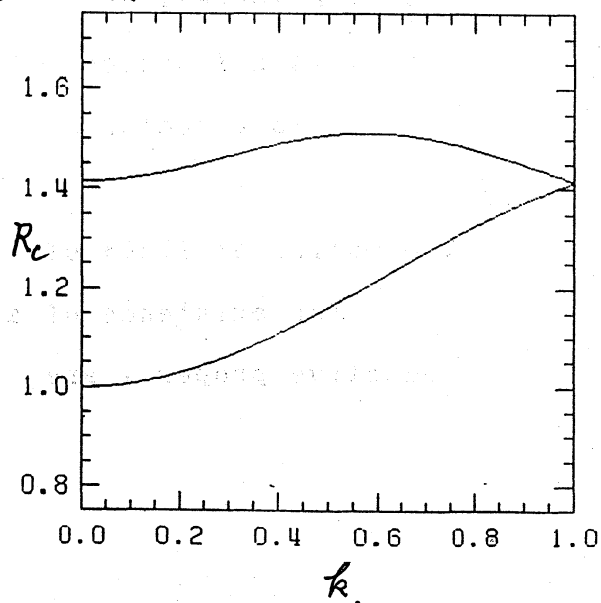


图6(a).



(b)

