

Eigenfunctions on a Riemannian symmetric space of the noncompact type with L^p -boundary value

Salem Ben Saïd*

大島利雄 (Toshio Oshima)[†]

示野信一 (Nobukazu Shimeno)[‡]

概要

非コンパクト型の Riemann 対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数の境界値を考え、様々な関数のクラスに対して境界値の収束 (“Fatou 型定理”) と, Poisson 変換の像の特徴付け (“Hardy 空間”) を論じる.

1 Helgason 予想 (復習)

非コンパクト型の Riemann 対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数は境界上の hyperfunction の Poisson 積分で表される. これについて復習する. 詳しくは [8] を参照のこと.

1.1 記号

G を中心有限の連結実半単純 Lie 群, K をその極大コンパクト部分群とする. このとき G/K は非コンパクト型の Riemann 対称空間である. $G = KAN$ を岩澤分解, $g \in G$ に対して $H(g) \in \mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$ を $g \in K \exp H(g)N$ により定まる元とする.

たとえば,

$$G = SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$$K = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha| = 1 \right\}$$

$$G/K \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

*Department of Mathematics, Oklahoma State University, ssaid@math.okstate.edu

[†]東京大学大学院数理解析研究科, oshima@ms.u-tokyo.ac.jp

[‡]岡山理科大学理学部, shimeno@xmath.ous.ac.jp

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\
N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1+ix & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{a} &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である.

$M = Z_K(\mathfrak{a})$ とすると $P = MAN$ は G の極小放物型部分群で $G/P \simeq K/M$ は対称空間 G/K の境界である. $G = SU(1,1)$ の例では, $G/P \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である.

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を制限ルート系, W をその Weyl 群, Σ^+ を正ルートの集合, ρ を重複度をカウントした正ルートの和の半分とする.

1.2 Poisson 変換

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とする.

$$B_\lambda(G/P) = \{f \in \mathcal{B}(G) : f(gman) = a^{\lambda-\rho} f(g) \quad \forall g \in G, m \in M, a \in A, n \in N\}$$

とする. ここで $\mathcal{B}(G)$ は G 上の hyperfunction (佐藤超関数) の空間である. K への制限により $B_\lambda(G/P) \simeq \mathcal{B}(K/M)$ である. Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は

$$\mathcal{P}_\lambda f(gK) = \int_K f(gk) dk, \quad f \in B_\lambda(G/P)$$

により定義される (ここで dk は K 上の正規化された不変測度). これはまた,

$$\mathcal{P}_\lambda f(gK) = \int_K f(k) e^{-\langle \lambda + \rho, H(g^{-1}k) \rangle} dk$$

と書き表すことができる. $P_\lambda(gK, kM) = e^{-\langle \lambda + \rho, H(g^{-1}k) \rangle}$ を Poisson 核という. 1 の Poisson 積分

$$\varphi_\lambda(gK) = \int_K e^{-\langle \lambda + \rho, H(g^{-1}k) \rangle} dk$$

を球関数という.

$\mathbb{D}(G/K)$ を G/K 上の G 不変な微分作用素全体のなす代数とする. $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ 上の symmetric algebra $S(\mathfrak{a})$ の W 不変元全体を $S(\mathfrak{a})^W$ とするとき, Harish-Chandra 同型

$$\gamma : \mathbb{D}(G/K) \simeq S(\mathfrak{a})^W$$

がある. これにより, $\mathbb{D}(G/K)$ から $\mathbb{C}$ への algebra homomorphism は $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ により,

$$\chi_\lambda(D) = \gamma(D)(\lambda), \quad D \in \mathbb{D}(G/K)$$

と表される. また $\chi_{w\lambda} = \chi_\lambda$ ($w \in W$) が成立する.

$$\mathcal{A}_\lambda(G/K) = \{F \in \mathcal{A}(G/K) : DF = \chi_\lambda(D)F, \forall D \in \mathbb{D}(G/K)\}$$

とする. ここで $\mathcal{A}(G/K)$ は G/K 上の実解析関数の空間を表す. $\text{Im}\mathcal{P}_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ が成立する.

$G = S(1, 1)$ の例では, 単位円周 T 上の関数 f に対して,

$$\mathcal{P}_\lambda f(z) = \int_T f(t) \left(\frac{1 - |z|^2}{|t - z|^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{2}} dt$$

であり, $\lambda = 1$ のとき古典的な Poisson 積分になる. また $z = x + iy$ と書くとき, 単位円板上の Laplace-Beltrami 作用素

$$\Delta = (1 - x^2 - y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

により $\mathcal{D}(G/K)$ は生成される. Poisson 変換の像は方程式

$$\Delta F = \frac{\lambda^2 - 1}{4} F$$

を満たす.

次の定理は Helgason により $G = SU(1, 1)$ の場合に証明され, 一般の場合には [3] で証明された.

定理 1.1

$$-2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \{1, 2, 3, \dots\} \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$$

ならば, $\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}_\lambda(G/P)$ から $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ の上への同型写像を与える.

$$\langle \text{Re } \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$$

ならば定理の仮定は満たされ, $w \in W$ に対して, $\mathcal{A}_{w\lambda}(G/K) = \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ であるから, $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ のすべての元は Poisson 積分で表される.

2 結果

2.1 λ への仮定

$\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対して

$$W_\lambda = \{w \in W : w\lambda = \lambda\}, \quad W_\lambda^R = \{w \in W : w\text{Re } \lambda = \text{Re } \lambda\}$$

とする。以下では常に $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に次の仮定をおく。

$$\langle \operatorname{Re} \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+, \quad (1)$$

$$W_\lambda = W_\lambda^R. \quad (2)$$

これらの条件は $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, あるいは

$$\langle \operatorname{Re} \lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+ \quad (3)$$

ならば満たされる。

$$\Sigma_\lambda^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ : \langle \lambda, \alpha \rangle = 0\}$$

とする。条件 (1)+(2) は次の条件と同値である。

$$\langle \operatorname{Re} \lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_\lambda^+.$$

2.2 漸近展開

[1, Corollary 16.4] あるいは [5, Theorem 3.6] により, $a \rightarrow \infty$ としたときの Poisson 積分の漸近展開

$$\mathcal{P}_\lambda f(ka) \sim c_0(\lambda) f(k) \Pi_\lambda(\log a) a^{\lambda-\rho}$$

が成立する。ここで,

$$\Pi_\lambda(\log a) = \prod_{\alpha \in \Sigma_\lambda^+} \alpha(\log a)$$

とした。特に

$$\varphi_\lambda(a) \sim c_0(\lambda) \Pi_\lambda(\log a) a^{\lambda-\rho}$$

である。

λ が (3) を満たすとき, $W_\lambda = W_\lambda^R = \{e\}$, $\Pi_\lambda(\log a) = 1$ で, $c_0(\lambda)$ は Harish-Chandra の c -関数 $c(\lambda)$ に他ならない。したがって上式はよく知られた結果

$$\mathcal{P}_\lambda f(ka) \sim c(\lambda) f(k) a^{\lambda-\rho}$$

および

$$\varphi_\lambda(a) \sim c(\lambda) a^{\lambda-\rho}$$

2.3 境界値の収束

$$Q_\lambda(gK, kM) = \varphi_\lambda(g)^{-1} e^{-\langle \lambda + \rho, H(g^{-1}k) \rangle}$$

とおくと、次が成立する。これは [1] でも注意されており、(3) の下では [4] で証明された。証明は 2.2 節の漸近展開を用いる（最後の主張は定理 2.2(i) を用いて証明する）。

命題 2.1

$$\begin{aligned} \int_{K/M} Q_\lambda(gK, kM) dk &= 1, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{K/M} |Q_\lambda(aK, kM)| dk &= \frac{c_0(\operatorname{Re} \lambda)}{|c_0(\lambda)|}, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{K/M-E} |Q_\lambda(aK, kM)| dk &= 0 \quad (E \text{ は } K/M \text{ における } eM \text{ の任意の近傍}). \end{aligned}$$

境界値の収束に関する結果は次の通り：

定理 2.2

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(a)^{-1} \mathcal{P}_\lambda f(ka) = f(k).$$

収束は、

- (i) $f \in \mathcal{C}(K/M)$ に対して一様.
- (ii) $f \in L^p(K/M)$ ($1 \leq p < \infty$) に対して L^p の意味で.
- (iii) $f \in L^\infty(K/M)$ に対しては、 $L^1(K)$ に対する weak* topology で.
- (iv) $f \in \mathcal{C}^*(K/M)$ (K/M 上の finite regular signed measure) に対しては、 $\mathcal{C}(K)$ に対する weak* topology で.
- (v) $f \in \mathcal{F}(K/M)$ に対しては、 $\mathcal{F}(K)$ の自然な強位相で。ただし、 $\mathcal{F}$ は $B, \mathcal{D}', \mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^m$ ($m \geq 1$) のいずれか。

(i) は [1] で証明されている。(3) の下で (i)-(iv) は [4] で証明された。

2.4 Hardy 空間

$1 \leq p < \infty$ に対して、 $\mathcal{H}_\lambda^p(G/K)$ を $F \in \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ で

$$\sup_{a \in A} \varphi_{\operatorname{Re} \lambda}(a)^{-1} \left[\int_K |F(ka)|^p dk \right]^{1/p} < \infty \quad (4)$$

を満たすものの全体とする。 $p = \infty$ に対して、 $\mathcal{H}_\lambda^\infty(G/K)$ を $F \in \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ で

$$\sup_{a \in A} \varphi_{\operatorname{Re} \lambda}(a)^{-1} \left[\int_K |F(ka)|^p dk \right]^{1/p} < \infty \quad (5)$$

を満たすものの全体とする。

命題 2.3 $f \in L^p(K/M)$, $F = \mathcal{P}_\lambda f$ とするとき, $\|f\|_p$ は (4) (または (5)) の左辺に等しい.

定理 2.4 $1 \leq p < \infty$ のとき, 任意の $F \in \mathcal{H}_\lambda^p(G/K)$ に対して, $F = \mathcal{P}_\lambda f$ となる $f \in L^p(K/M)$ がただ1つ存在する. $p = \infty$ のとき, 任意の $F \in \mathcal{H}_\lambda^\infty(G/K)$ に対して, $F = \mathcal{P}_\lambda f$ となる $f \in C^*(K/M)$ がただ1つ存在する.

この定理は $\lambda = \rho$ のときは [11] で, (3) の下では [10] で証明されている.

定理の証明は $p = 2$ の場合に帰着される.

2.5 種々の境界の場合

P_Θ を P を含む G の放物型部分群, λ_Θ を P_Θ の指標とする. $\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta)$ が $\mathcal{B}_\lambda(G/P)$ と同様に定義される. 適当な $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ をとると, $\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta) \subset \mathcal{B}_\lambda(G/P)$ となる. Poisson 変換による $\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta)$ の像は $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ の部分空間になるが, この空間はある微分方程式系 $\mathcal{N}_{\lambda_\Theta}$ の解空間 $\mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta})$ として特徴付けられることが知られており, その具体的な形が研究されている ([9], [7], [6]).

$\mathcal{H}_{\lambda_\Theta}^p(G/K) = \mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta}) \cap \mathcal{H}_\lambda^p(G/K)$ と定めると, Poisson 変換

$$\mathcal{P}_{\Theta, \lambda_\Theta} : \mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta})$$

に対して, 定理 2.2 と定理 2.4 の類似が成立する.

2.6 局所的な境界値の収束

$U \subset K/M$ を開集合, $\mathcal{F}$ を $L^p, C^m, C^*, \mathcal{D}'$ のいずれかとする. $\mathcal{BF}(K/M, \bar{U})$ を $f \in \mathcal{B}(K/M)$ で, ある開集合 $V \subset K/M$ があって $\bar{U} \subset V$ かつ $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ となるものの全体の集合とする.

定理 2.5 G/K は階数 1 であると仮定する. $f \in \mathcal{BF}(K/M, \bar{U})$, $k \in \tilde{U} = \{k \in K : kM \in U\}$ とするとき,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(a)^{-1} \mathcal{P}_\lambda f(ka) = f(k).$$

収束は,

- (i) $\mathcal{F} = L^p$ ($1 \leq p < \infty$), $C^m, \mathcal{D}'$ に対して $\mathcal{F}$ の位相で,
- (ii) $\mathcal{F} = L^\infty, C^*$ のとき weak* topology で.

定理 2.6 G/K は階数 1 であると仮定する. $f \in \mathcal{BF}(K/M, \bar{U}) \cap L^1(K/M)$ とするとき, $f|_U \in L^p(U)$ であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} \sup_{a \in A^+} \varphi_{\operatorname{Re} \lambda}(a)^{-1} \left[\int_{\tilde{U}} |\mathcal{P}_\lambda f(ka)|^p dk \right]^{\frac{1}{p}} < \infty & (1 \leq p < \infty \text{ のとき}), \\ \sup_{k \in \tilde{U}, a \in A} \varphi_{\operatorname{Re} \lambda}(ka)^{-1} |\mathcal{P}_\lambda f(ka)| < \infty & (p = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることである.

注意 2.7 我々の結果が成り立つためには, 2.1 節で置いた λ への仮定が本質的である.

参考文献

- [1] E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, *Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on a Riemannian symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. **380** (1987), 108–165.
- [2] S. Ben Saïd, T. Oshima, and N. Shimeno, *Eigenfunctions on a Riemannian symmetric space of the noncompact type with L^p -boundary value*, preprint.
- [3] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and T. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. of Math. **107** (1978), 1–39.
- [4] H. L. Michelson, *Fatou theorems for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 257–274.
- [5] T. Oshima, *Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces*, Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, pp. 561–601, Adv. Stud. Pure Math. **14**, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [6] T. Oshima, *Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras*, UTMS 2001-29, preprint, 2001.
- [7] T. Oshima and N. Shimeno, *Boundary value problems on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, in preparation.
- [8] H. Schlichtkrull, *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1984.
- [9] N. Shimeno, *Boundary value problems for the Shilov boundary of a bounded symmetric domain of tube type*, J. of Funct. Anal. **140** (1996), 124–141.
- [10] P. Sjögren, *Characterizations of Poisson integrals on symmetric spaces*, Math. Scand. **49** (1981), 229–249.
- [11] M. Stoll, *Hardy-type spaces of harmonic functions on symmetric spaces of noncompact type*, J. Reine Angew Math. **271** (1974), 63–76.