

### 3 人売り出しのタイミング・ゲーム

近畿大学・経営学部 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

近畿大学・経営学部 林 芳男 (Yoshio Hayashi)

School of Business Administration,  
Kinki University

要旨：本報告では、その価格が期間内で単峰的に変動する財の販売権を持った 3 人のプレーヤの各々がどの時刻で自分が販売権を持つ財を売りに出せば最適となるか、2 人非 0 和ゲームの観点から考察する。ここでは、3 人のプレーヤの市場占有率は対等であり、3 人ともノイジー・プレーヤの場合を扱う。

#### 1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする 3 人非 0 和ゲームである。

3 人のプレーヤ (Player 1,2,3) が、小豆や大豆といった生産物の販売権を占有している。各プレーヤの市場占有率は対等であり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、3 人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、各プレーヤは、何時売りに出すのが最適かのタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、ある時点までは時間の経過に伴って滑らかな上昇し、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期の前には 0 となってしまう。さらに、2 人の誰もが売りに出さない限り、評価額の変動は滑らかであるが、誰か一人が自分の持分を売りに出すと急激に（不連続的に）評価額は下落し、その後はまた時間の経過に伴った滑らかな変動を続ける。このような評価額の滑らかな変動と急激な下落が残り 2 人全員が売りつくすまで繰り返される。3 人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額の変化と、他の 2 人の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあっては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。一般的に  $n$  人ゲームにおいて、 $n$  人の中の誰か一人のプレーヤが自分の持分を売りに出すとその瞬間、そのことが直ちに残り  $n-1$  人のプレーヤに知られてしまう場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤという。逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、情報防護がされており、そのことが残り  $n-1$  人の誰にも知られず、残り  $n-1$  人の誰かが自分の持分を売りに出したとき初めてその時刻までにそのプレーヤが彼の持分を既に売っていたことを知る場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤと呼ばれる。 $n$  人の全てがサイレント・プレーヤであるようなゲームをサイレント・ゲームといい、 $n$  人の全てがノイジー・プレーヤであるゲームを

ノイジー・ゲームと呼ぶことにする。また、 $n$  人の中の  $k$  人 ( $k=1, \dots, n-1$ ) はサイレント・プレーヤーであり、残り  $n-k$  人はノイジー・プレーヤーとなっているゲームをサイレント・ノイジー・ゲームと呼ぶことにする。

サイレント・ゲームに関しては一般的な  $n$  人ゲームまでを、ノイジー・ゲームに関しては 2 人ゲームのみが解かれているので、本報告では、ノイジー・ゲームへの本格的取り組みの第一歩として 3 人ゲームを取り扱う。3 人のどのプレーヤーとも、ゲーム進行の各時点において、他の 2 人のプレーヤーの行動が観測でき、この観測された情報に基づいて、以後の売り出し時刻を計画しなければならない。

## 2. 仮定と記号

問題を見やすくするため、収穫してから評価額が 0 になるまでの期間を単位区間  $[0, 1]$  で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$  :  $n$  人のどのプレーヤーもまだ売りに出していないときの、時刻  $t \in [0, 1]$  における生産物の価値。

微分可能であり

$$v'(t) \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} 0 \quad \text{for} \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq m \\ m < t \leq 1 \end{cases}$$

を仮定する。

$r$  :  $n$  人の誰か 1 人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定する。すなわち、誰か 1 人のプレーヤーが売りに出ると、 $t \in [0, 1]$  での評価額は  $v(t)$  から  $rv(t)$  へ減少する。また、 $k$  人のプレーヤーが売りに出した後は  $r^k v(t)$  へ減少する。ここで、もし  $k$  人のプレーヤーが同時に売り出したときは、各プレーヤーは、その時点  $t \in [0, 1]$  における生産物の評価額  $\hat{v}(t)$  ではなく、減少後の評価額  $r^k \hat{v}(t)$  を受け取るものとする。

## 3. サイレント・ゲームの結果

本報告の目的であるノイジー・ゲームに関する議論を進める前に、3 人のプレーヤー全員がサイレント・プレーヤーである場合の結果を示す[8]。3 人のどのプレーヤーも情報防護がしっかりしており、お互いに各時点でそれまでに何人が売りに出したのか全くわからず、自分が売りに出したとき、その時点の評価額から初めて知ることが出来る。このような状況にあつては、Player  $i$  の純戦略は  $x_i \in [0, 1]$  と定義するのが自然である。また、このゲームにあつては、どのプレーヤーにとっても条件は同じであるから、各プレーヤーにとっては自分の設定時点より誰が先に行動したのかは問題でなく、それまでに何人が行動したのかの問題となってくる。しかしその人数を学習できない。そうすると、Player 1 が純戦略  $x_1 \in [0, 1]$  を取ったときのプレーヤー 1 への期待利得に注目し、他の 2 人の行動時刻を小さい方から順に並べたものを  $y_{(1)} \leq y_{(2)}$  とおくと、Player 1 にとっての

期待利得  $M_1(x_1, x_2, x_3)$  は

$$M_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} v(x_1), & 0 \leq x_1 < y_{(1)} \\ rv(x_1), & y_{(1)} \leq x_1 < y_{(2)} \\ r^2v(x_1), & y_{(2)} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

となる。上記の利得関数を観察し、 $v(x_1)$  が単峰関数であり  $x_1 = m$  (ただし、 $0 < m \leq 1$ ) で最大値をとることから、次のような混合戦略 (cdf)  $F(x)$  を考える：区間  $[0, m]$  内に点  $a$  を選び、区間  $(a, m)$  上の pdf  $f(x) > 0$  のみで構成される cdf とする。すなわち

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \int_a^x f(t)dt, & a \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と置く。

そこで、今 Player 1 は純戦略  $x$  を、他の  $n-1$  人のプレーヤは (2) で与えられる混合戦略  $F(x_i)$  を選んだときの Player 1 への期待利得  $M_1(x, F, F)$  を計算すると

$$M_1(x, F, F) = \begin{cases} v(x), & 0 \leq x < a \\ v(x)[1 - (1-r)F(x)]^2, & a \leq x < m \\ r^2v(x), & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

が得られる。

3人サイレント型タイミング・ゲームに関して、次の2個の結果が得られている[8]。

**結果1.** いま  $v(0) \leq r^2v(m)$  と仮定し、 $a^0$  を方程式  $v(a) = r^2v(m)$  の区間  $[0, m]$  における唯一つの根とする。そこで、次のような cdf で与えられる混合戦略を考える：

$$F^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \{1/(1-r)\}[1 - \{v(a^0)/v(x)\}^{1/2}], & a \leq x < m. \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

そうすると3個の混合戦略の組  $(F^0, F^0, F^0)$  は (1) 式で与えられる  $n$  人非0和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player  $i$  にとっての期待利得は

$$v_i = M_i(F^0, F^0, F^0) = r^2v(m), \quad i = 1, 2, 3$$

で与えられる。

**結果2.** いま、 $v(0) > r^2v(m)$  とする。このとき  $\alpha$  を

$$\alpha = 1 - \{1/(1-r)\}[1 - \{v(0)/v(m)\}^{1/2}] > 0$$

とおき、次のような cdf を考える：

$$F^*(x) = \begin{cases} \{1/(1-\alpha)\}\{1/(1-r)\}[1 - \{v(0)/v(x)\}^{1/2}], & 0 \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

そうすると 2 個の混合戦略の組  $(F^*, F^*, F^*)$  は (1) 式で与えられる  $n$  人非 0 和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player  $i$  にとっての期待利得は

$$v_i = M_i(F^*, F^*, F^*) = \{1/(1-\alpha)\}v(0), \quad i = 1, 2, 3$$

で与えられる。

この結果によると、時点  $m$  における生産物の評価額が時刻 0 でのそれと比較してそれほど大きくないときは  $v(0) > r^2 v(m)$  と考えてよい。このような時は、区間  $(0, m)$  にその微小部分の密度に比例して確率を集中させ、他のプレーヤとの同時行動を避けるように振舞うことが、平衡戦略となることを示している。更に、 $v(x)$  がどのような関数であっても、財の価値  $v(t)$  が増加している区間  $(0, m) \subset [0, 1]$  の中に確率を密度関数の形で分布させ、減少している区間  $[m, 1]$  の上には全く確率を与えないことが平衡に繋がることとなる。

#### 4. ノイジー・ゲームの定式化と主要結果

前節でも書いたように、本報告では、3 人のプレーヤ全員がノイジー・プレーヤである場合を扱う。すなわち 3 人の中の誰か一人のプレーヤが自分の持分を売りに出すとその瞬間、そのことが直ちに残り 2 人のプレーヤに知られ、その情報が他の 2 人に利用されてしまうゲームである。ところで、各プレーヤに与えられた条件は同じであるから、他の 2 人のうち、どちらが先に行動をとったのかは問題ではなく、未だ、行動をとっていないプレーヤの数のみが、自分の戦略や利得に関係してくる。

このような状況にあつては、Player 1, 2, 3 の純戦略を、それぞれ、

$$x = (x_2, x_1, x_0), \quad y = (y_2, y_1, y_0), \quad z = (z_2, z_1, z_0)$$

と定義するのが自然であろう。この意味は、Player 1 は予め 3 点  $x_0, x_1, x_2$  を  $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0 \leq 1$  となるように定めておき、ゲームの進行中、他のプレーヤの 2 人共が  $x_2$  まですら行動をとらなければ点  $x_2$  で売りに出し、もし 1 人が行動をとれば点  $x_1$  へ延期、もう 1 人が行動をとらなければその  $x_1$  で行動、もし、もう 1 人も行動をとれば、残りは誰もいないので、点  $x_0$  で行動する計画である。即ち、 $x_k$  はこの時点までに未だ行動をとっていない対立者の人数が  $k$  人のときに Player 1 が行動をとる時点の意味する。Player 2, 3 に関しても全く同様である。

3 人に与えられた条件は全て同じであるから、Player 1 にとっては、自分の設定した時点までに、2 と 3 のどちらが先に行動したかは問題ではなく、それまでに何人行動したか、即ち、何人残っているかが問題となるので、他の 2 人の行動時刻を小さい方から順に並べたものを  $t_{(1)} \leq t_{(2)}$

とおけば、Player 1 への期待利得  $M_1(x, y, z)$  は、下記のようなになる。

$$(1) \quad M_1(x, y, z) = \begin{cases} v(x_2), & 0 \leq x_2 < t_{(1)} \leq x_1 \leq t_{(2)} \leq x_0, \\ rv(x_2), & 0 \leq x_2 = t_{(1)} \leq x_1 \leq t_{(2)} \leq x_0, \\ rv(x_1), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq x_1 < t_{(2)} \leq x_0, \\ r^2v(x_1), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq x_1 = t_{(2)} \leq x_0, \\ r^2v(x_0), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq t_{(2)} < x_1 \leq x_0, \end{cases}$$

上記の利得関数に関して、任意の  $y$  と  $z$  に対して  $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0 = m \leq 1$  となるような  $x$  を  $x^*$  と置くと

$$(2) \quad M_1(x^*, y, z) = \begin{cases} v(x_2), & 0 \leq x_2 < t_{(1)} \leq x_1 \leq t_{(2)} \leq m, \\ rv(x_2), & 0 \leq x_2 = t_{(1)} \leq x_1 \leq t_{(2)} \leq m, \\ rv(x_1), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq x_1 < t_{(2)} \leq m, \\ r^2v(x_1), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq x_1 = t_{(2)} \leq m, \\ r^2v(m) \geq r^2v(x_0), & 0 \leq t_{(1)} < x_2 \leq t_{(2)} < x_1 \leq m, 0 \leq \forall x_0 \leq 1 \end{cases}$$

となるので、以後、 $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0 = m \leq 1$  と仮定して議論を進める。

ここで、 $v(0) \leq r^2v(m)$  と仮定して、 $a_k$  を方程式  $v(a) = r^k v(m)$  の区間  $[0, m]$  における唯一根とする ( $k=0, 1, 2$ )。

次に、 $k=1, 2$  のとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $v(a_k + \delta_k) - v(a_k) < \varepsilon$  を満たす  $\delta_k > 0$  を選び、次のようなcdf :

$$(3) \quad H_{a_k}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a_k < m \\ \int_{a_k}^x (1/\delta) dx, & a_k \leq x < a_k + \delta_k < m \\ 1, & a_k + \delta_k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を考える。そこで  $H$  を

$$(4) \quad H = H_{a_2}(x_2) \times H_{a_1}(x_1), \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

と置く。

そうすると、プレーヤ2と3が上記の混合戦略  $H$  を使い、プレーヤ1は純戦略  $x^*$  を用いたときの、プレーヤ1への期待利得を  $M_1(x^*, H, H)$  とすると、

$$0 \leq x < a_2 \text{ のとき } M_1(x^*, H, H) = v(x) \leq v(a_2) = r^2v(m), \\ a_2 \leq x < a_2 + \delta_2 \text{ に対しては}$$

$$\begin{aligned} M_1(x^*, H, H) &= H_2(x_2)[\{1 - H_2(x_2)\}rv(a_1) + H_2(x_2)r^2v(a_0)] \\ &\quad + \{1 - H_2(x_2)\}[H_2(x_2)rv(a_1) + \{1 - H_2(x_2)\}v(x_2)] \\ &< r^2v(m) + \varepsilon, \end{aligned}$$

$a_2 + \delta_2 \leq x < a_1$  に対しては  $M_1(x^*, H, H) = rv(x) < rv(a_1) = r^2v(m)$ ,  
 $a_1 \leq x < a_1 + \delta_1$  に対しては

$$\begin{aligned} M_1(x^*, H, H) &= H_1(x_1)[\{1 - H_1(x_1)\}r^2v(a_0) + H_1(x_1)r^2v(a_0)] \\ &\quad + \{1 - H_1(x_1)\}[H_1(x_1)r^2v(a_0) + \{1 - H_1(x_1)\}v(x_1)] \\ &< r^2v(m) + \varepsilon \end{aligned}$$

$a_1 + \delta_1 \leq x < m$  に対しては

$$M_1(x^*, H, H) = r^2v(x) < r^2v(m)$$

が成立する。

以上をまとめて

$$M_1(x^*, H, H) < r^2v(m) + \varepsilon \quad \text{for all } x^*$$

従って、

$$(5) \quad M_1(x, H, H) < r^2v(m) + \varepsilon \quad \text{for all } x$$

が成立する。

さらに、プレーヤ 1 が混合戦略  $H$  を用いたとすると

$$(6) \quad r^2v(m) \leq M_1(H, H, H) < r^2v(m) + \varepsilon$$

が成立することとなる。

以上より、次の定理が成立する。

定理 1.  $v(0) \leq r^2v(m)$  と仮定する。この時、 $k = 1, 2$  に対して、 $a_k$  を区間  $[0, 1]$  における方程式  $v(a) = r^k v(m)$  の唯一つの根とする。そうすると、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $v(a_k + \delta_k) - v(a_k) < \varepsilon$  を満たす  $\delta_k > 0$  を選び、次のような cdf :

$$H_{a_k}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a_k < m \\ \int_{a_k}^x (1/\delta) dx, & a_k \leq x < a_k + \delta_k < m \\ 1, & a_k + \delta_k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を考える。そこで  $H$  を

$$H = H_{a_2}(x_2) \times H_{a_1}(x_1), \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

と置く。そうすると、この 3 人非 0 和ゲームにおいて、上記の混合戦略は

$$M_1(x, H, H) < r^2v(m) + \varepsilon \quad \text{for all } x$$

$$M_2(H, y, H) < r^2v(m) + \varepsilon \quad \text{for all } y$$

$$M_3(H, H, z) < r^2v(m) + \varepsilon \quad \text{for all } z$$

を満足し、混合戦略の組  $(H, H, H)$  に対しては

$$r^2 v(m) \leq M_1(H, H, H) < r^2 v(m) + \varepsilon$$

が成立する。

この定理が意味することは次のようになる。 $v(0) \leq r^2 v(m)$  の場合、各プレーヤは方程式  $v(a) = r^k v(m)$  の根  $a_1, a_2$  を求め、 $a_2$  より前に他の2人が行動を取らなければ、他のプレーヤとの同時刻行動を避けるように、微小区間  $(a_2, a_2 + \delta_2)$  上の一様分布に従って行動し、この間このプレーヤの行動より前に他の2人の内の一人が行動したときは、今度は微小区間  $(a_1, a_1 + \delta_1)$  上の一様分布に従って行動する。そして、もし、残りの一人もこのプレーヤより先に行動を取った場合は、時刻  $m$  で行動を取ることが、極限としての平衡に繋がる。

## 5. これからの問題点

本報告では、その価値が経過時間と共に単峰状に変動する財の売り出しゲームにおいて、初めて、プレーヤの数を3としたノイジー・ゲームを提案して、その最も簡単な場合、即ち  $v(0) \leq r^2 v(m)$  に対して、極限の意味での平衡戦略を求めた。しかし、現実のこの種の売買問題では、 $rv(m) \leq v(0) < r^2 v(m)$  や、 $r^2 v(m) \leq v(0)$  と考えられる場合が多い。2人ゲームと異なり、平衡戦略の予想さえ難しいが、解決されなければならない問題として記しておく。

## 参考文献

1. M. Dresher, Games of Strategy : Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economic and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing, Springer, Berlin, 58-67, 1997.
4. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person games on territory, Game Theory and Applications, Vol. V, Nova Science Publishers, Inc., New York, 134-141, 2000.
5. Y. Teraoka and H. Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Nanzan University, Nagoya, 281-289, 2005.
6. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person silent game on sale, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.63, 237-240, 2006.
7. 寺岡義伸, 北條仁志, 価値が変動する売り出しのノイジー・ゲーム、京都大学数理解析研究所講究録 1548「不確実性を含む意思決定の数理とその応用」, 138-145, 2007.
8. 寺岡義伸, 北條仁志, N人売り出しのサイレント・ゲーム、京都大学数理解析研究所講究録 1559「最適化問題における確率モデルの展開と応用」, 50-55, 2007.