

Hilbert modular群のEisenstein級数について

北海道大学 三宅 敏恒 (Toshitsune Miyake)

正則な保型形式の空間が cusp 形式と Eisenstein 級数によって生成されることは classical によく知られている. この事実は, Hilbert modular群については, 正則でない保型形式についてもなりたつ ([Shimura], [Shimizu], [Miyake]). 以下においてはこのことを主として [Shimura] に従って述べる. 特に 3 節で述べる cyclopean form は L 関数の零点と関係し重要である.

1. F を n 次の総実な代数体とし R を F の整数環とする. F の無限素点の集合を $V = \{v\}$ と書く. 一般に集合 X に対して X^V で X の copy の n 個の積を表す. $x = (x_v)_v$, $c = (c_v)_v$ が C^V の元であるとき,

$$x^c = \prod_v x_v^{c_v}, \quad c \cdot x = \sum_v c_v x_v$$

とおく (右辺が意味をもつとき). また $u = (1, \dots, 1) \in C^V$ とおくと共に

$$x^u = \prod_v x_v, \quad u \cdot x = \sum_v x_v.$$

$SL_2(F)$ の合同部分群: F のイデアル I にたいし,

$$\Gamma(I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(R) \mid a-1, b, c \in I \right\}$$

とおく. $SL_2(F)$ の部分群 Γ が合同部分群とは Γ がある $\Gamma(I)$ を指数有限の部分群としてふくむときにいう.

weight: $\sigma \in Q^V$ が weight であるとは, つぎの (1) または (2) のいずれかのときにいう.

(1) $\sigma \in \mathbb{Z}^V$ (σ はintegral weight という),

(2) $\sigma \in (1/2)\mathbb{Z}^V$ (σ はhalf integral weight という).

群の作用: H は上半平面とする. $z \in H$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$

に対して

$$\alpha z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad j(\alpha, z) = cz+d$$

とおく. $SL_2(\mathbb{R})$ は $z \rightarrow \alpha z$ により H に作用する. よって, $\alpha = (\alpha_v) \in SL_2(\mathbb{R})^V$, $z = (z_v) \in H^V$ とすると $z \rightarrow \alpha z = (\alpha_v z_v)$ により,

$SL_2(\mathbb{R})^V$ は H^V に作用する. $SL_2(\mathbb{F})$ は $SL_2(\mathbb{R})^V$ に自然に埋め込まれるから, $SL_2(\mathbb{F})$ は H^V に作用する. $z \in H^V$, $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})^V$, $\sigma \in \mathbb{Z}^V$ に対して

$$j(\alpha, z) = (j(\alpha_v, z_v))_v,$$

$$j(\alpha, z)^\sigma = \prod j(\alpha_v, z_v)^{\sigma_v}$$

とおく.

微分作用素: $z = (z_v) \in H^V$, $z_v = x_v + i y_v$ としたとき, H^V の微分作用素 L_v^σ ($\sigma = \text{weight}$) を次のように定義する.

$$L_v^\sigma = -y_v(\partial^2/\partial x_v^2 + \partial^2/\partial y_v^2) + 2i\sigma_v y_v \partial/\partial \bar{z}_v.$$

metaplectic group: weight σ に対して metaplectic group $G = G_\sigma$ を

$$G = \{(\alpha, l(z)) \mid \alpha \in SL_2(\mathbb{F}), l(z)^2 = t j(\alpha, z)^{2\sigma}, t \in \mathbb{C}, |t| = 1\}$$

と定義する. G は次のように積を定義すると, 群になる.

$$(\alpha, l(z))(\alpha', l'(z)) = (\alpha\alpha', l(\alpha' z)l'(z)).$$

G から $SL_2(\mathbb{F})$ への写像 $(\alpha, l) \rightarrow \alpha$ を pr で表す. さて,

$$\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{R}} e(m^2 z / 2), \quad e(*) = \exp(2\pi i *)$$

とおき, $h(\alpha, z) = \theta(\alpha z) / \theta(z)$ とすると、 I が十分大きければ、

$$h(\alpha, z)^2 = t j(\alpha, z)^u, \quad |t| = 1, \alpha \in \Gamma(I).$$

embedding Λ : $SL_2(F)$ 又は $\Gamma(I)$ から G への embedding Λ を次のように定義する.

(1) σ が integral weight のとき $\Lambda: SL_2(F) \rightarrow G$ で

$$\Lambda(\alpha) = (\alpha, j(\alpha, z)^\sigma).$$

(2) σ が half integral weight のとき $\Lambda: \Gamma(I) \rightarrow G$ で

$$\Lambda(\alpha) = (\alpha, h(\alpha, z) j(\alpha, z)^{\sigma - u/2}).$$

G の合同部分群: G の部分群 Δ が合同部分群であるとは、次の (1), (2) をみたすときにいう.

(1) pr は Δ から $SL_2(F)$ の合同部分群への同形写像である.

(2) Δ は十分大きな I に対し, $\Lambda(\Gamma(I))$ を指数有限の部分群として含む.

Δ が G の合同部分群ならば, $\xi \in G$ に対し $\xi^{-1} \Delta \xi$ も合同部分群である.

G の作用: $\xi = (\alpha, l(z)) \in G$ とする. H 上の関数 $f(z)$ に対し, ξ の作用を

$$(f \parallel \xi)(z) = l^{-1}(z) f(\alpha z)$$

と定義する. 以下便宜上 $\alpha = (\alpha, l(z))$ と書く.

automorphic eigen form: Δ が G の合同部分群とする. H^V 上の C^∞ -関数 $f(z)$ が Δ に関する automorphic eigen form であるとは、次の (1), (2), (3) がみたされるときにいう.

$$(1) \quad f \parallel \alpha = f \quad (\alpha \in \Delta),$$

$$(2) \quad L_v^\sigma f = \lambda_v f, \quad \lambda_v \in \mathbb{C}, \quad (v \in V),$$

$$(3) \quad y_v^{\sigma/2} |(f \parallel \xi)(x + iy)| \leq A y^{C u}, \quad y^u > B \quad (\xi \in G).$$

$\lambda = (\lambda_v) \in \mathbb{C}$ を eigen value の system という. $A(\sigma, \lambda; \Delta)$ で λ を eigen value の system にもつ Δ に関する weight σ の automorphic eigen form のなす空間とする. $f(z)$ が $A(\sigma, \lambda, \Delta)$ の元とする.

$$\Delta \supset \Lambda(\Gamma(I)), \quad \Gamma(I) \supset \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid m \in L \right\}, \quad L: \text{lattice}$$

であるから, $f(z)$ は次のような Fourier 展開をもつ.

$$f(z) = b_0(y) + \sum_{h \in L'} b_h(y) e(h \cdot x), \quad L': \text{dual lattice}.$$

この $b_0(y)$ を $f(z)$ の定数項という.

cuspidal form: $f \in A(\sigma, \lambda, \Delta)$ が cuspidal form であるとは, 任意の $\alpha \in G$ に対して $f \parallel \alpha$ の Fourier 展開の定数項 = 0 の時にいう. cuspidal form のなす部分空間を $S(\sigma, \lambda, \Delta)$ とおく. $f \in A(\sigma, \lambda, \Delta)$, $g \in S(\sigma, \lambda, \Delta)$ に対して, 正則な保型形式の場合と同様に Petersson 内積が定義され, この内積に関する $S(\sigma, \lambda, \Delta)$ の直交補空間を $N(\sigma, \lambda, \Delta)$ と書く.

Eisenstein 級数: $P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(F) \mid c = 0 \right\}$ とおき, 更に $Q = \{\alpha \in G \mid \text{pr}(\alpha) \in P\}$ とおく. $Q \backslash G / \Delta$ の各類を cuspidal class とする. $\rho = (\sigma - i\tau)/2 \in \mathbb{C}^V$ (σ : weight, $\alpha \in \mathbb{R}^V$) とする. cuspidal class $Q \xi \Delta$ が ρ -regular であるとは, $y^{-\rho} \parallel \gamma = y^{-\rho}$ が $Q \cap \alpha \Delta \alpha^{-1}$ の任意の元 γ について成り立つときにいう. このとき,

$$E(z, s; \rho, \Delta) = \begin{cases} \sum_{\alpha} y^{\text{su}^{-\rho}} \parallel \alpha & (Q \Delta : \rho\text{-regular}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ここで, α は $Q \cap \Delta \backslash \Delta$ の代表系を動く. 更に cuspidal class $Q \xi \Delta$ に対し,

$$E_{\xi}(z, s; \rho, \Delta) = E(z, s; \rho, \xi \Delta \xi^{-1}) \parallel \xi$$

とおく. $E_{\xi}(z, s; \rho, \Delta)$ を Eisenstein 級数という. E_{ξ} は $\text{Re}(z)$

が十分大きいときに収束し, s に関して全平面に有理型に解析接続される.

$E_{\xi}(z, s; \rho, \Delta)$ で生成される空間を, $\mathbb{E}(\rho, \Delta)$ と書く.

定理 1 $E_{\xi}(z, s; \rho, \Delta)$ が $s = s_0$ で正則ならば,

$$E_{\xi}(z, s; \rho, \Delta) \in A(\sigma, \lambda, \Delta).$$

ここで $\lambda = (\lambda_v)$, $\lambda_v = (s_0 - \rho_v)(1 - s_0 - \bar{\rho}_v)$ である.

$E(\rho, \Delta)$ の元が全て $s = s_0$ で正則であるとき,

$$E(\rho, \Delta)(s_0) = \{f(z, s_0) \mid f(z, s) \in E(\rho, \Delta)\}$$

とおく. λ を定理 1 のように取ると, $E(\rho, \Delta)(s_0)$ は $A(\sigma, \lambda, \Delta)$ の部分空間である.

exponent: 逆に $\lambda \in \mathbb{C}^V$ が与えられたとする. 簡単のために

$$X^2 + (\sigma_v - 1)X - \lambda_v = 0$$

が全ての v について重根を持たないとする (λ は non-critical という).

$\tau \in \mathbb{R}^V$ が admissible とは F の単数群のある指数有限な部分群 U に対して

$$|a|^{i\tau} = 0 \quad (a \in U)$$

のときにいう. λ が non-critical のとき

$$C(\sigma, \lambda) = \left\{ p \in \mathbb{C}^V \mid \begin{array}{l} p \text{ は } X^2 + (\sigma_v - 1)X - \lambda_v = 0 \text{ の根} \\ p = s_p u - (\sigma - i\tau)/2 \\ s_p \in \mathbb{C}, \quad \tau : \text{admissible} \end{array} \right\}$$

とおく. $p = s_p u - (\sigma - i\tau)/2$ のときに

$$\rho_p = (\sigma - i\tau)/2, \quad p' = u - \sigma - p$$

とおく. $C(\sigma, \lambda)$ の元を weight σ , eigen value の system λ に属する exponent という. $C(\sigma, \lambda)$ に $p \sim p' (= u - \sigma - p)$ という同値関係を入れる. この同値関係による $C(\sigma, \lambda)$ の代表系を $C_0(\sigma, \lambda)$ とおくと

$$C(\sigma, \lambda) = C_0(\sigma, \lambda) \cup \{p' \mid p \in C_0\}.$$

さて introduction に述べたように automorphic eigen form の空間の cusp form の空間の直交補空間が Eisenstein 級数で生成されることを 次のように述べることができる.

定理 2 任意の $p \in C_0(\sigma, \lambda)$ に対して, $E(\rho_p, \Delta)$, $E(\bar{\rho}_p, \Delta)$ の元は全て s_p で正則と仮定すると,

$$N(\sigma, \lambda, \Delta) = \bigoplus_{p \in C_0} E(\rho_p, \Delta)(s_p).$$

定理2の条件が成り立たない場合には、右辺を少し修正して、正則でないものについては s における Eisenstein 級数の residue を考えれば同様の主張が成り立つ。定理2は Maass-Selberg の bilinear relation を用いて示される ([Shimura], [Shimizu], [Miyake]).

2. multiple eigen value system: $\#C(\sigma, \lambda)=2$ のとき λ は simple といい, $\#C(\sigma, \lambda)>2$ のとき λ は multiple であるという. Eisenstein 級数の空間の次元を決定するには, $C(\sigma, \lambda)$ の個数が分かればよい. F が実2次体とし, F の無限素点の集合を $\{v, w\}$ とする. ε を F の単数とし $\theta_v \in \mathbb{R}$ を $\varepsilon^{2i\theta_v}=1$ に取り $\theta=(\theta_v, -\theta_v)$ とおく.

$$\begin{aligned} p &= su - (\sigma - im\theta)/2, & s &= (1 + in\theta_v)/2, \\ q &= tu - (\sigma - in\theta)/2, & t &= (1 + im\theta_v)/2 \end{aligned}$$

とおく. さらに,

$$\begin{aligned} \lambda_v &= p_v p'_v = ((1 - \sigma_v)/2)^2 + ((m+n)/2)^2 \theta_v^2, \\ \lambda_w &= p_w p'_w = ((1 - \sigma_w)/2)^2 + ((m-n)/2)^2 \theta_w^2 \end{aligned}$$

とし $\lambda=(\lambda_v, \lambda_w)$ とおく. p, p', q, q' は全て異なり $C(\sigma, \lambda)$ の元である. よってこの λ は multiple である. もう少し一般に, K は上の F を含む総実な体とし, K の無限素点の中で v の拡張を $v_1, \dots, v_n$, w の拡張を $w_1, \dots, w_n$ とする. $\tau \in \mathbb{R}^V$ を

$$\tau_{v_i} = \theta_v, \quad \tau_{w_i} = \theta_w \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおき, 更に

$$\begin{aligned} p &= su - (\sigma - im\tau)/2, & s &= (1 + in\theta_v)/2, \\ q &= tu - (\sigma - in\tau)/2, & t &= (1 + im\theta_v)/2, \\ \lambda_{v_i} &= \lambda_v, & \lambda_{w_i} &= \lambda_w \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

とおくと λ は multiple となり, p, p', q, q' は $C(\sigma, \lambda)$ の元である. multiple な eigen value の system が存在するのは このようにして得られる場合しかないのではないと思われる. 単数群の構造をこのような観点から調べることは興味ぶかい.

3. cycloean form: $f(z) \in A(\sigma, \lambda, \Delta)$ が exponent q の cycloean form であるとは, λ が simple で

$$f \parallel \alpha = b y^\alpha + (\text{non-constant な項}) \quad (\text{for any } \alpha \in G).$$

このとき $q = (1 - s_0) - \overline{\rho}$, $\rho = (\sigma - i\tau)/2$ であり, 更に

$$1/2 > \text{Re}(s_0) > 0 \quad (\sigma : \text{integral}),$$

$$1/2 > \text{Re}(s_0) > 1/4 \quad (\sigma : \text{half integral})$$

のときにいう. cycloean form の存在と, L -関数の零点の存在は次のよう
に關係する.

定理 3 [Shimura] exponent q の cycloean form が存在する必要十分な条件は, 次の (1), (2) をみたす Hecke character ψ が存在することである.

$$(1) \quad \psi_\infty(x) = |x|^{\frac{\pm i\tau}{2}} (x/|x|)^\sigma \quad (x \in F_\infty^\times).$$

$$(2) \quad \begin{aligned} L(2s_0, \psi) &= 0 & (\sigma : \text{integral weight}) \\ L(4s_0 - 1, \psi^2) &= 0 & (\sigma : \text{half integral weight}). \end{aligned}$$

References

- Shimura, G. On the Eisenstein series of Hilbert modular group, *Revista Matemática Iberoamericana*, 1 (1985), 1-42.
- Shimizu, H. The Space of Eisenstein Series in the case of GL_2 , *Advanced Studies in Pure Mathematics* 13 (1988), 585-621.
- Miyake, T. On the Spaces of Eisenstein Series of Hilbert Modular Groups, *Revista Matemática Iberoamericana* 3 (1987).