

hyperbolic geometry, harmonic maps and $\mathbb{CP}^1$ -structures on surfaces

名古屋大学 多元数理 谷川晴美
(Harumi TANIGAWA)

—はじめに— $\mathbb{CP}^1$ -構造とは何か

M を与えられた面とする。 M 上の $\mathbb{CP}^1$ -構造 (もしくは射影構造) とは、 $(\mathbb{CP}^1, \text{Aut}(\mathbb{CP}^1))$ をモデルとする構造、すなわち、局所的には射影空間 $\mathbb{CP}^1$ の部分集合と同視され、張りあわせが、Möbius 変換を行われるような構造である。

$\mathbb{CP}^1$ -構造が与えられたとき、Möbius 変換はとくに正則であるから、 $\mathbb{CP}^1$ -構造の下で複素構造が与えられる。射影的、という概念は、正則よりも強い概念である。

のちに述べるように、 $\mathbb{CP}^1$ -構造は解析的又は代数的な研究対象となることが多く、この方面からの研究が多い。一方、Thurston は、grafting (つぎ木) という、earthquake と名付けた操作により、 $\mathbb{CP}^1$ -構造の理論と双曲幾何とを結びつけた。ここでは、この幾何学的な立場から $\mathbb{CP}^1$ -構造を考察し、次の定理を得る。以下、 Σ_g を種数 $g > 1$ の与えられた閉曲面とする。

定理: Σ_g 上の任意の複素構造の上に、 $\mathbb{CP}^1$ -構造を、そのホロノミー表現が Fuchs 群であるものが無限に存在する。

また、Thurston の幾何学的パラメータについて説明する前に、古典的な解析的パラメータについて思いだしておこう。

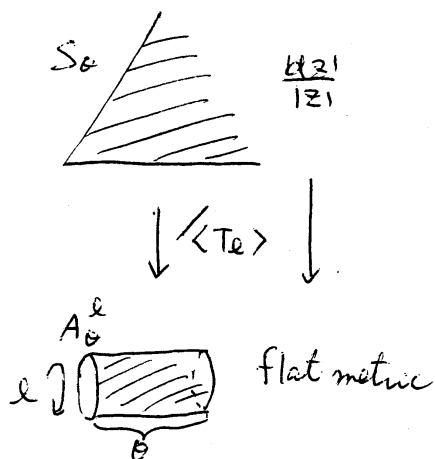
§0. analytic parametrization of $\mathbb{CP}^1$ -manifolds

例1 (双曲構造)

$\forall X \in T_g, \exists \Gamma_X \curvearrowright \mathbb{H}^2$ (Fuchs 群) s.t. $X = \mathbb{H}^2 / \Gamma_X$. ここで $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{CP}^1$ より $\mathbb{H}^2$ には $\mathbb{CP}^1$ -構造が入り、 $\Gamma_X \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ から、 $\mathbb{H}^2$ の射影構造は $\mathbb{H}^2 / \Gamma_X$ の $\mathbb{CP}^1$ -構造におちる。

例2 (flat cylinder)

$\theta > 0, \ell > 0$ とおく。 $S_\theta = \{re^{i\varphi}; r > 0, 0 < \varphi < \theta\}$ とおく。但し、 $\theta > 2\pi$ の場合、 $\mathbb{CP}^1$ 上でかき写る部分は、ちかうシートにのり、というものと解釈する。 S_θ には $\mathbb{CP}^1$ から自然な



$\mathbb{CP}^1$ 構造が入る。 $T_\ell = e^\ell z$

とおくと $\langle T_\ell \rangle \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

により S_θ の $\mathbb{CP}^1$ 構造は、

$A_\theta^\ell = S_\theta / \langle T_\ell \rangle$ の $\mathbb{CP}^1$ 構造にあ

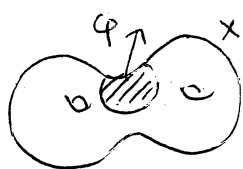
る。なお S_θ には平相計量

$|dz|/|z|$ が入るがこれは A_θ^ℓ に

おろて、その平坦計量により A_0^L は同の長さ L , 高さ H の平坦
シリンダーとなる。

§1. Σ_g 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造

$P_g \Sigma_g$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造全体の空間とある。 $\pi: Q_g \rightarrow T_g$ はリー
マン面上の正則二次微分のなるベクトル束とある。事実から
先にのべると、 P_g は Q_g によりパラメータづけられる。この(古
典的)事実について少し説明をくわえよう。



まず、 $x \in T_g$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造が与えられた
とある。その局所座標のひとつ φ をとり

それとあうやうな曲線に沿って解析接続す

る。すると、 X 上の多価函数 f で、一点における f の値が
Möbius変換の合成成分にけ異なるものが得られる。この多価函
数 f を developing map, これから得られる群同 $\rho: \pi_1(X) \rightarrow$
 $PSL_2(\mathbb{C})$ をホロノミー表現とよぶ。

さて、この developing map f の Schwarz 微分 $S(f)$ とかく
ことにすると $S(f)$ は X 上の正則二次微分となる。ここで
Schwarz 微分とは、 $S(f) = (f''/f')' - \frac{1}{2} (f''/f')^2$ と与えられる
ものであるが、実は、これは次のような意味をもつ。(Thurston)
各点 $x \in X$ に対して f と同じ 2-jet をもつ osculating Möbius
変換 $M_x^{(2)}(\cdot)$ が存在する。Schwarz 微分とは実は、 $d_x M_x^{(2)}$ に
ほかならない。つまり、 f が "projective" であることからとれ

くらいは分れているかを知り易い量である。つまり、曲率が、多様体の局所的性質を表わすのと、類似の役目をはたす。

このようにして、対応 $P_g \rightarrow Q_g$ が与えられた。逆に各 $g \in Q_g$ ($\exists X \in T_g$ 上の二次微分) に対し $S(f) = g$ なる developing map をもつ X 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造が存在することが知られている。

以上で P_g と Q_g とは同一視できることがわかった。なお、ベクトル束の標準射影 $\pi: Q_g = P_g \rightarrow T_g$ は、 $\mathbb{C}P^1$ -構造から、その下の複素構造への対応であることがわかった。したがって、一点 $X \in T_g$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造の全体は、素数 g -3 次元のベクトル空間でパラメータ付けされることになった。

さて、ここまでに關する話しは、すべて解析的であり、この方面からの研究も多い。

一方、Thurston は grafting という操作により、 $\mathbb{C}P^1$ 構造の理論と双曲幾何とを結びつけた。この grafting を説明するために少々の準備をする。

§2. 長さについて。

$$\begin{aligned} T_g &= \{ \text{marked complex structures on } \Sigma_g \} \\ &= \{ \text{marked conformal structures on } \Sigma_g \} \\ &= \{ \text{marked hyperbolic structures on } \Sigma_g \} \end{aligned}$$

いづれの立場をとるにせよ、与えられた二つの構造を比較するためには、曲線の長さの比較が有効である。

以下、 $\mathcal{S} := \{\Sigma_g \text{ の単純閉曲線のホモトピー-類} \}$ とかくことにする。

○ 定義 $X \in T_g$, $[C] \in \mathcal{S}$ に対し $[C]$ の extremal length ε

$$E_X(C) = \sup_P \frac{(\int_C P(z) |dz|)^2}{\text{Area } X}$$

但し、 $\sup$ は X 上の等角計量 $P(z)|dz|$ 全体についてとる。

○ 記号 $X \in T_g$, $[C] \in \mathcal{S}$ に対し、 $\ell_X(C)$ を X の双曲計量に関する $[C]$ の測線の長さとする

これら与えられた二点 $X, Y \in T_g$ を比較する有用な道具がある。要するに

Y	X	mapping $Y \rightarrow X$	距離の“目やり”	by
conf	conf	extremal g c.	$K = \sup_{C \in \mathcal{S}} \frac{E_X(C)}{E_Y(C)}$	Kewckloff
hyp	hyp	extremal Lipschitz	$L = \sup_{C \in \mathcal{S}} \frac{\ell_X(C)}{\ell_Y(C)}$	Thurston
conf	hyp	harmonic map	$E = \sup_{C \in \mathcal{S}} \frac{\ell_X(C)^2}{E_Y(C)} + O(1)$	Minsky

ここで“sup”と書いたものは、実は $\mathcal{S}$ を含むコムパ

ト空間の中で、最大値が実現される。それが、measured lamination の空間である。

§3. measured lamination and Thurston compactification

M_L Σ measured laminations の空間とする。ここで measured lamination とは、重みつき単純閉曲線の一般化。というにとどめる。正確な定義はしない。以下に必要な事実をのべるにとどめる。

- $\mathbb{R}_+ \mathcal{S}$ Σ 重みつき単純閉曲線とすると、

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathbb{R}_+ \mathcal{S} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha \in \mathcal{C} & \longmapsto & \alpha \cdot i(\mathcal{C}, \cdot) \quad (\text{幾何学的交点数}) \end{array}$$

- $M_L = \overline{\Phi(\mathbb{R}_+ \mathcal{S})}$
- $\forall \lambda \in \mathcal{C} \quad \forall X$ (双曲構造), $[\lambda]$ の測地的代表元が存在する。
- $\ell_X(\cdot), E_X(\cdot)$ は M_L において連続
- $\ell_X(\theta \cdot \lambda) = \theta \ell_X(\lambda), \quad E_X(\theta \lambda) = \theta^2 E_X(\lambda)$
- $P M_L := \overline{M_L \setminus \{0\}} / \mathbb{R}_+ \cong S^{6g-7}$
 $\mathcal{S}$ dense

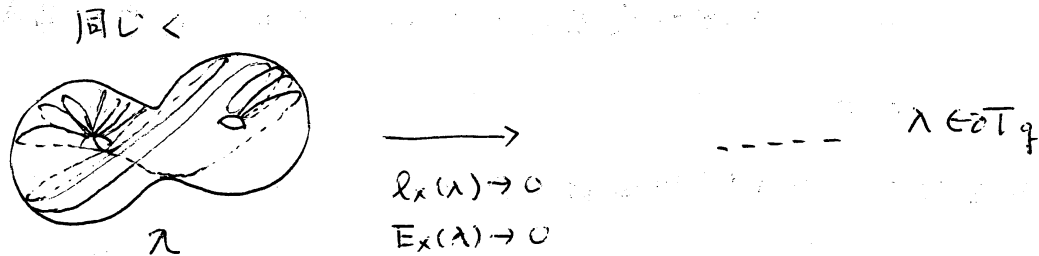
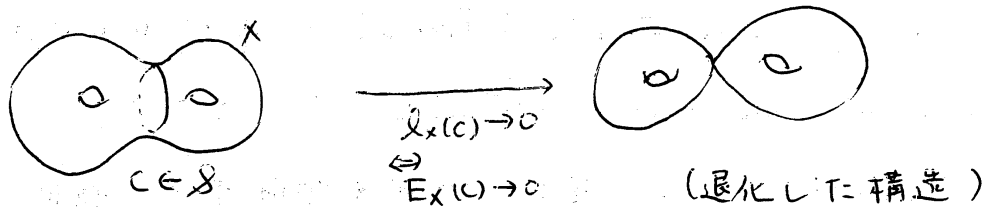
定義 Thurston の T_g の compact 化とは、

$$\begin{array}{ccc} T_g & \hookrightarrow & P \mathbb{R}^g \\ \downarrow & & \\ X & \longmapsto & [\ell_X(\mathcal{C})]_{\mathcal{C} \in \mathcal{S}} \end{array}$$

である埋め込みの中での閉包。

Fact $\partial Tg = Pmd$.

大雑把に言えば、Thurston boundary とは次のように定義される。



§ 4. realization of measured lamination in 3-mfol

N : 双曲的三次多様体

$f: \Sigma_g \rightarrow N$ s.t. $f_* \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(N)$ injective
とある。

定義 $\lambda \in Pmd$ がホモトピー類 $[f]$ において実現可能とは

$\exists X$; 双曲構造 on Σ_g , $\exists g: X \rightarrow N$, $g \sim f$

$\exists \lambda' \supset \lambda$ geodesic lamination on X

◦ $g(\lambda')$ は N の測地線からなる。

◦ $g|_{\lambda'}$ は長さを保つ

◦ $g|_{X - \lambda'}$ は等長的

すなわち、 $g(X)$ は $g(\lambda')$ でありまげられ、他所では、まっ

あぐら面である。このように geodesic lamination に沿って折りまげられた、区分的に totally geodesic な面を pleated surface という。

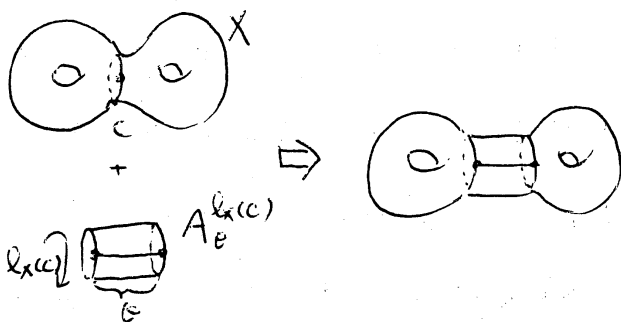
Fact “ほとんどすべての” measured lamination は実現化。

注). $\forall X \in T_g$, $\exists f \sim f$, $f: X \rightarrow N$ harmonic であるか: measured lamination λ の実現化とは, $\lambda \in \partial T_g$ からの “harmonic map” のアナロジーであるといえる。

② $\lambda \in \partial T_g$ とは, $E_X(\lambda) \rightarrow 0$ する極限である。すなわち, $X \in T_g$ が, $E_X(\lambda)$ が十分短かければ, λ 方向に, 著しいストレッチが生じる。一方, エネルギーは $\int \|df\|^2$ で与えられるので, maximal stretch の方向は, harmonic map に近づいてほとんどまっすぐにうつらねばならない。□

§5. Grafting and Bending

まず, Grafting について考える。双曲面 X とその上の単純



測地線 C を取る。§0

例としてみたように:

平坦シリンダー $A_E^{L_X(C)}$

をとる。そこで X

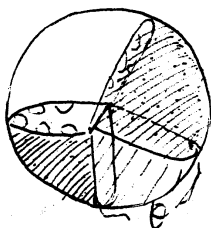
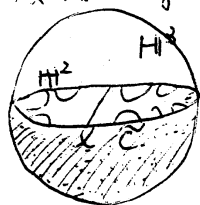
を C に沿って切り、 $A_{\text{loc}}^{(1)}$ をねじれなく C に沿ってつぎ木する。
 $X - C$ の C に沿う $\mathbb{CP}^1$ -構造と、 $A_{\text{loc}}^{(1)}$ のそれとほうまき整合し
 新しい面は X の双曲構造と A の平坦構造をうけつぐ $\mathbb{CP}^1$ -多様
 体となる。この操作を “grafting BC to X ” といい、新しくま
 できたこの $\mathbb{CP}^1$ -構造を、 $\text{Gr}_{\text{loc}} X$ とおくことにする。

定理 (Thurston)

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr} : T_g \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} & \rightarrow & P_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, BC) & \mapsto & \text{Gr}_{\text{loc}} X \end{array}$$

それ、 $\text{Gr} : T_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow P_g$ は、 $\mathcal{E}$ への homeo である。

今度は、grafting と同値な操作、bending について述べる。



$S_0 = \mathbb{CP}^1$ X, T_x, C を、 $\mathcal{E}$ と同じものとする。ま
 す、 H^2 と H^1 に、totally geodesic にうめこ
 む。 C の H^2 への lift $\tilde{C}$ は互いに交わり
 ない測地線からなる。このうち $\tilde{C}$ と
 $\tilde{C}$ の成分 $\tilde{C}_i$ にまず着目する。

H^2 を $\tilde{C}_i$ に沿って ∂T だけありまげると

無限遠球面、あるいは $\mathbb{CP}^1$ 上におくは、はじめ H^2 が張るこ
 いた下半平面に平坦 sector S_0 をつぎ木したことになる。こ
 の操作を $\tilde{C}$ の各成分に対して順次行う。すると、 $\mathbb{CP}^1$ 上には

双曲的部分と平坦部分とからなる単連結 $\mathbb{CP}$ -多様体 $\tilde{\Omega}$ が得られることになる。

さて、 H^2 には最初 Γ が作用していたが、 Γ の操作のたびに Γ を変形していくことにより、 $\tilde{\Omega}$ に作用する $PSL_2(\mathbb{C})$ の部分群が得られることが容易にわかる。

事実から先に述べると、 $\tilde{\Omega}$ は $G_{\Gamma}X$ の "projective" 普遍被覆面で、 Γ_{loc} は $G_{\Gamma}X$ のホロノミー、 $\tilde{\Omega}/\Gamma_{loc} = G_{\Gamma_{loc}}X$ である。

このように、 $H^2 \cong H^2$ でありまげする操作を bending という。上に見たように bending と grafting は同値な操作である。なお、bending は Γ と Γ_{loc} について同変な写像で、 $\tilde{\Omega}$ に沿ってありまげられそれ以外の所では計量を保つ写像で与えられた。このような同変写像を pleated map とよぶことにする。

Γ_{loc} が離散群なら、 $f(H^2)/\Gamma_{loc}$ は H^2/Γ_{loc} の通常の意味での pleated surface である。

上では、簡単のため、 $\mathbb{R}_+$ について考えたが、一般の $\mathbb{R}^d$ のえについても同様に議論することができる。

§6. $\mathbb{CP}^1$ -structures with Fuchsian holonomy.

ここからホロノミーがフックス群であるような $\mathbb{CP}^1$ -構造について考えよう。 $\forall X \in T_g$, 双曲的構造はもちろん、ホロノミーがフックス群 Γ であるが、双曲的構造以外にホロノミーが

フックス群であるような $\mathbb{C}P^1$ -構造が存在するか、という問題がおこる。この問題に対しては, Maskit がまず、函数論的に例を構成した。また、Hejhal および Goldman がより幾何学的研究をしている。

定理 (Goldman)

$\mathbb{C}P^1$ -構造 $G_{\lambda}X$ が、フックス群をホロノミーとする必要十分条件は、 λ が m 点の格子点であることである。但し、 λ が格子点であるとは、 $\exists C_1, \dots, C_m$ (disjoint union) $\in \mathcal{S}$, $\exists n_1, \dots, n_m$, $\lambda = \sum_{i=1}^m 2n_i \pi C_i$ なる表示をもつことである。

さて、このようにフックス群をホロノミーとする $\mathbb{C}P^1$ -構造の特徴づけが行われたわけであるが、ここからひとつ注意をかける。一般に、 $\mathbb{C}P^1$ -構造 $G_{\lambda}X$ に対し、その下の複素構造を $g_{\lambda}X$ とかくことにすると、 $\lambda \neq 0$ ならば $g_{\lambda}X \neq X$ であり、 $g_{\lambda}X \subset X$ と λ とから計算する方法はない。したがって、次の問題は自明ではない。

Q. どのような複素構造の上に、フックス群をホロノミーとする $\mathbb{C}P^1$ -構造が存在するか？

この問題に対する解答が我々の主定理である。

主定理: 任意の格子点 $\lambda \in \mathcal{M}_L$ に対して, $g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は, 同相写像である。

系. すべての複素構造の上に, フラックス群をホロノミーとする $\mathbb{C}P^1$ -構造が無限個存在する。

主定理を示すためには, 次のことを示せばよい。

- $g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は, 局所的に単射である。
- $g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は, proper map である。

§7. Properness of grafting

定理 7.1. $\forall \lambda \in \mathcal{M}_L$ (必ずしも格子点でない) に対して,

$g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は proper

証明には次の評価式を用いる。

定理 7.2. $X \in T_g, \lambda \in \mathcal{M}_L$ に対し, $Y = g_\lambda X$ とかくことにする。 $\ell: Y \rightarrow X$ を調和写像, $f: Y \rightarrow X$ を grafting の逆操作つまり collapsing-grafted-part-map とし, E を総エネルギーとあらわすことにすると

$$\frac{1}{2} \ell_X(\lambda) \leq \frac{1}{2} \frac{\ell_X(W)^2}{E_Y(\lambda)} \leq E(\ell) \leq E(f) = \frac{1}{2} \ell_X(\lambda) + 4\pi(g-1) \quad \square$$

○ 定理 7.2 $\Rightarrow$ 定理 7.1

$g_n \setminus X_n = Y_n$ とおくことにする。 $\{X_n\} \subset T_g$, $X_n \rightarrow \partial T_g$ のとき、
 $Y_n \rightarrow \partial T_g$ である。必要なら部分列をとる。

(i) $l_{X_n}(\lambda) < \infty$, $\forall n$ or

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{X_n}(\lambda) = \infty$

なる場合を考えればよい。

(i) のとき、もしも $\{Y_n\} \subset T_g$ とすれば、 $X_n \rightarrow \partial T_g$ より、

$\varepsilon(h_n: Y_n \rightarrow X_n) \rightarrow \infty$ である。一方定理 7.2 より $\varepsilon_n(h_n) \leq \frac{1}{2} l_{X_n}(\lambda)$

$+ C$ で (i) の仮定からこれは有界である。矛盾。

(ii) のとき、定理 7.2 から、 $E_{Y_n}(\lambda) \times l_{X_n}(\lambda) \rightarrow \infty$ より、 $Y_n \rightarrow \partial T_g$

□

定理 7.2 の証明は略すか。ひとつ注意をのべておく。定理 7.2 より、 $l_X(\lambda)$ が大なるとき、 f は harmonic map に近いことがわかる。これは、① X は $G_n X$ の "pleated surface" であること (§5) ② pleated surface は $\lambda \in \partial T_g$ からの harmonic map のアナロジーであること (§4) ③ f も h も λ 方向に多大な stretching を行うこと。等と考えるべきで、自然な現象であるといえる。

§ 8. local injectivity

grafting の局所単射性については、くわしいことは省略する。今のところ、証明できているのは、

定理 8.1 . λ が半格子点のとき, $g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は単射である。

証明には, λ が半格子点のときに $\text{Gr}_\lambda X$ のホロノミーが, $\text{PSL}_2 \mathbb{R}$ で表現できることから, Faltings の $\text{PSL}_2 \mathbb{R}$ 表現に関する定理をつかう。この方法は一般の λ についての証明ができない。

予想 . $\forall \lambda \in \mathcal{M}_d$, $g_\lambda(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は単射である。

注). 最近, McMullen によ, 次のことが示されている。

定理 (McMullen) タイヒミューラー空間が一次元のとき ($T = T_{0,1}$ or $T_{0,4}$), $\forall \lambda \in \mathcal{M}_d$, $g_\lambda(\cdot): T \rightarrow T$ は, 単射である。

REFERENCES

- [B] L. Bers, *Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 73-76.
- [EKK] C. Earle, I. Kra and S. Krushkal, *Holomorphic Motions and Teichmüller spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. ?? (1994), ??.
- [EM] C. Earle and C. McMullen, *Quasiconformal isotopes*, Holomorphic Functions and Moduli II, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris and Tokyo, 1987, pp. 143-154.
- [F] G. Faltings, *Real projective structures on Riemann surfaces*, Compositio Math. **48** (1983), 223-269.
- [EM] D. B. A. Epstein and A. Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan and measured pleated surfaces*, London Mathematical Society Lecture Notes, vol. 111, Cambridge University Press, 1987, pp. 114-253.
- [GGP] D. Gallo, W. Goldman and R. Porter, *Projective structures with monodromy in $PSL(2, R)$* , (preprint).
- [G] W.M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297-326.
- [H] D. Hejhal, *Monodromy groups and linearly polymorphic functions*, Acta math. **135** (1975), 1-55.
- [KT] Y. Kamishima and S. P. Tan, *Deformation spaces on geometric structures*, Aspects of Low Dimensional Manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics 20, Kinokuniya Co., 1992, pp. 263-299.
- [Ka] M. Kapovich, *On monodromy of complex projective structures*, Invent. math. **119** (1995), 243-265.
- [Ke] S. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, Topology **19** (1980), 23-41.
- [Ko] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic mappings*, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.
- [La] F. Labourie, *Surfaces cinvexes dans l'espace hyperbolique et CP^1 -structures*, J. London Math. Soc. ?? (1992), 549-565.
- [L] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris and Tokyo, 1985.
- [Kr1] I. Kra, *A generalization of a theorem of Poincaré*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 299-302.
- [Kr2] ———, *Deformations of Fuchsian groups*, Duke Math. J. **36** (1969), 537-546.
- [Kr3] ———, *Deformations of Fuchsian groups II*, Duke Math. J. **38** (1971).
- [M] B. Maskit, *On a class of Kleinian groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A **442** (1969), 1-8.
- [Mi 1] ———, *Harmonic maps, length, and energy in Teichmüller space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 151-217.
- [Mi 2] Y. Minsky, *Harmonic maps into hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 605-632.
- [Sh] H. Shiga, *Projective structures on Riemann surfaces and Kleinian groups*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 433-438.
- [Su] D. Sullivan, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Annals of Math. Studies 97, Princeton, 1981.
- [ST] H. Shiga and H. Tanigawa, *Projective structures with discontinuous holonomy representations*, (preprint).
- [Ta] H. Tanigawa, *Grafting, harmonic maps and hyperbolic surfaces*, (preprint).
- [Th1] W. Thurston, *Geometry and Topology of 3-manifolds*, Princeton University lecture notes.
- [Th2] W. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, (preprint).
- [Tsp] S.P. Tan, *Complex Fenchel-Nielsen coordinates for quasi-fuchsian structures*, International J. Math. **5** (1994), 234-251.
- [W] M. Wolf, *The Teichmüller theory of harmonic maps*, Trans. J. Diff. Geom. **29** (1989), 449-479.