

《九章算術》における分数について

－小学校の分数指導に関わって－

山梨大学教育人間科学部附属小学校

蓮沼 澄子

The Elementary school attached to The Faculty of Education and Human sciences
Yamanashi University

はじめに

分数は2つの数を用いて一つの数を表記するので、整数などの時には容易にできていた四則演算も分数の四則演算となると、子どもたちにとっては理解しにくいものになってしまう傾向が強く見られる。指導の順序について、通常は分数の四則演算では加法・減法から学習を始める。この段階で通分の意味を学習するが、この後に乗法を学習し再び加法・減法を復習すると、分母同士を足したり引いたりする誤答が出てくる。

誤答例: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2}{1} = 2$

このような実態は、真に分数の意味を把握できていないことの一つの表れであろう。乗法の学習と加法・減法の学習との間にしばらくの時間的な経過もあり、分数の乗法の学習時に加法・減法を忘れてしまっていることもある。このような誤答の原因は乗法においての計算法「分母同士、分子同士をかけ合わせる」を加法・減法でも同じように適用してしまうためであると考えられる。つまり通分の意味を忘れてしまい、計算法を「分母同士、分子同士をたし合う(引き合う)」というように考えるのである。さらに減法においては分母が0になったり、引けなくなったりする(つまり分子や分母が負の数になる)など、小学生の子どもたちにとって計算が続けられない状況になってはじめて自分の誤りに気づくような姿も見られる。

指導する側にとっては分数計算で通分することや乗法・除法の計算法の意味は容易にわかる。先に示したような誤答をできるだけ出さないために、どんな点を重視して指導をするのかを探ることで問題の解決につながるのではないかと考えた。その指導法を探るための一つの切り口として、古代の人の方法に焦点を当てた。古代の人がどのように分数を捉えてどのように用いていたかを探ることが子どもたちの理解を深める方法の発見につながるかもしれないと考え、現在我々が用いている数学用語も多く含まれる《九章算術》に焦点を当てることにした。

1. 《九章算術》の分数計算に関する部分

《九章算術》巻第一には多くの分数に関する術が連続して示されている部分がある。

【約分】

【合分】(分数の加法)

【減分】(分数の減法)

【課分】(2つの分数の大小と差)

【平分】(3つの分数の差と平均値)

【経分】(具体的な場面における分数の除法)

【乗分】(田の求積場面における分数の乗法)

【大広田】(田の求積場面における帯分数の乗法)

《九章算術》がもしこの配列順で学習することを基本とした書物であるとする、現在の指導の順番と異なるのが、乗法の前に除法を学習している点である。現在でも分数計算において乗法・除法のどちらを先に学習するかで考えが分かれることはある。しかし多くの場合は前学年までに自然数の範囲で加法→減法→乗法→除法と学習が進められてきていることと同様に、分数の学習でもこの順番で学習が進められることが多い。

(1) 分数計算の術

《九章算術》と今の方法を比べるために、それぞれの術を見ていく¹。

【約分】

$$\frac{12}{18} \qquad \frac{49}{91}$$

術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也²。以等數約之。

(術曰く：半分にできるものは半分する。半分にできないものは分母と分子の数を別に置いて、少ないものを多いものから引き、さらに互いに引き合せて等数を求める。等数でこれを約す。)

【合分】

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \qquad \frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{5}{9} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

術曰：母互乗子，并以爲實。母相乗爲法³。實如法而一。不滿法者，以法命之。其母同者，直相從之。

(術曰：分母の数を互いの分子の数に掛け合わせ、これらをあわせて実とする。分母の数は互いに掛け合わせて法とする。実を法で割る。法に満たないものは、法を用いて一つの分数を命名する。もし分母がもともとと同じ数であれば、直接足せばよい。)

【減分】

$$\frac{8}{9} - \frac{1}{5} \qquad \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$$

術曰；母互乗子，以少減多，餘爲實。母相乗爲法。實如法而一。

(術曰く：分母を互いの分子にかけ、少ないものを多いものから引き、そのあまりを実とする。分母を掛け合わせて法とする。実を法で割る。)

¹ ここからの引用はすべて 郭書春匯校「増補版(上) 匯校 九章算術」(2004 遼寧教育出版社 台湾九章出版社) より

² この“等数”とは公約数であり、この方法はユークリッドの互除法と同じ考えものである。

³ 通分では分母の数の最小公倍数をとらず、全ての分母の数をかけ合わせる形で公分母をとっている。答えが既約で示されているため、術には明記されていないが、当然約分が行われた。減法についても同様。

【課⁴分】
 $\frac{5}{8}$ と $\frac{16}{25}$ の大小と差

 $\frac{8}{9}$ と $\frac{6}{7}$ の大小と差

 $\frac{8}{21}$ と $\frac{17}{50}$ の大小と差

術曰；母互乘子，以少減多，餘爲實。母相乗爲法。實如法而一，即相多也。

（術曰く：分母を互いの分子に掛け合わせ，少ないものを多いものから引き，あまりを実とする。分母を掛け合わせて法とする。実を法で割ると，どれだけ多いかがわかる。）

【平分】

 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ のどこからいくつ減らしてどこに加えるといくつで平均値になるか。

 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ のどこからいくつ減らしてどこに加えるといくつで平均値になるか。

術曰；母互乘子，副并爲平實。母相乗爲法。以列數乗未并者各自爲列實。亦以列數乘法。以平實減列實，餘，約之爲所減。并所減以益於少。以法命平實，各得其平。

（術曰く：分母を互いの分子に掛け合わせ，それらを脇で別に併せて平実とする。分母をかけ合わせて法とする。分数の個数をまだ合わせていない分子にそれぞれかけ，各自を列実とする。また分数の個数を法にもかけておく。平実を列実から引き，あまりはこれを約して大きい数から引くべき分数の数とする。これらの引くべき分数の数を合わせて，これを小さい分数の分子に足す。法で平実を割ると各分数の平均値が得られる。）

【経⁵分】
 $8\frac{1}{3}$ 錢を7人で等しく分ける

 $6\frac{1}{3}$ 錢と $\frac{3}{4}$ 錢を $3\frac{1}{3}$ 人で等しく分ける。

術曰；以人數爲法，錢數爲實，實如法而一。有分者通之⁶；重有分者同而通之⁷。

（術曰く：人数を法とし，錢数を実として，実を法で割る。分数があればこれを通じる。実も法も分数であるものも分母を同にしてこれらを通じさせておく。）

【乗分】

横 $\frac{4}{7}$ 步，縦 $\frac{3}{5}$ の田の面積

横 $\frac{7}{9}$ 步，縦 $\frac{9}{11}$ の田の面積

横 $\frac{4}{5}$ 步，縦 $\frac{5}{9}$ の田の面積

術曰；母相乗爲法，子相乗爲實，實如法而一。

⁴ “課”には，審査する・考査するなどの意味がある。（《漢語大字典》p.1795）ここでは分数の大小を考察することを指す

⁵ 郭書春は次のように述べている。「経分の意味について，李籍（いろいろな説があるが唐代の人）の解釈は李淳風と同じで劉熙の《釈名》から引用：“経者，径也。”“経”と“径”は「度量」という同じ意味を持つ漢字である。二人の李の解釈は《九章算術》の意味に合わないように思う。経，分ける，分割する。《周礼・天官冢宰》：“体圀経野”とある。《孟子・滕文公》：“夫仁政必自経界始”とある。これらより，経分とはつまり一つの分数を分割すること，即ち被除数が分数である除法のことである。」郭書春「九章算術」（1998 遼寧教育出版社 p.p.207 注釈⑩）

⁶ 術の前半は一般的な除法についてのもので，“有分者通之”は実または法に分数が含まれる場合には通分することを述べている。

⁷ この部分は2つめの問題のタイプを指している。普通人数は整数で表されるが，身分の差などで人数が分数で表される場合の術であろう。

(術曰く：分母をかけ合わせて法とし，分子をかけ合わせて実とし，実を法で割る。)

【大廣田】

横 $3\frac{1}{3}$ 歩，縦 $5\frac{2}{5}$ の田の面積。

横 $7\frac{3}{4}$ 歩，縦 $15\frac{5}{9}$ の田の面積。

横 $18\frac{5}{7}$ 歩，縦 $23\frac{6}{11}$ の田の面積。

術曰；分母各乗其全，分子從之，相乗爲實。分母相乗爲法。實如法而一。

(術曰く：分母をその整数部分にそれぞれかけ，分子に従う。かけ合わせて実とする。分母をかけあわせて法とする。実を法で割る。)

巻第一の分数計算の部分について，この配列は非常に考えられたものであり，段階を踏んで次にいけるような配列になっている。

加法と減法の通分では最小公倍数で通分する方法ではなく，分母の数をかけあって公分母とする方法を用いている。加法と減法を学習した後，それらを用いて計算する【課分】【平分】が用意されているが，これらの問題を解くことは分数の加法・減法をマスターするためにとっても有効な練習になると感じる。実際の生活場面においては，規準の量に満たない不ぞろいな端の量を分数で表してこれらの量の多少を調べたり，量をやりとりして不ぞろいな量を同じ量ずつになるように調整したりするような【課分】【平分】の場面はたくさんあっただろう。

また除法については，小学校では逆数を学習して除法を学習するため，《九章算術》の“通分して割る”という方法とは大きく異なる。《九章算術》の方法の良さは通分してしまえば分母は無視できるので分子だけで割り算を行えばよく，整数の除法に帰着できるところにある。“通分する”という手順からすると，加法・減法の次に除法が来るのは自然であると言える。

加法・減法での通分は先にも述べたようにすべての分母の数をかけ合わせる方法をとっていたが，違う方法で通分している部分がある。巻第四「少廣」では，面積1畝の田の面積は一定で，与えられた横の長さから縦の長さを求める計算問題群がある。与えられた横の長さが複数の分数で与えられている。

- ① 今有田廣一步半。求田一畝，問：從幾何？
 - ② 今有田廣一步半，三分歩之一。求田一畝，問：從幾何？
 - ③ 今有田廣一步半，三分歩之一，四分歩之一。求田一畝，問：從幾何？
- …これが⑩まで連続して続いていく。⑫では“十二分之一”までが出てくる。

術を見ると

術曰：置全歩及分母子，以最下分母徧乘諸分子及全歩，各以其母除其子，置之於左⁸；命通分者，又以分母徧乘諸分子及全歩及已通者，皆通而同之，并之爲法。置所求歩數⁹，以全歩積分乘之爲實。實如法而一，得從歩。

(術曰く：整数と分数の分母・分子を置き，最も下にある分母を満遍なく分子及び整数にかけ，

⁸ 漢語大字典によると“左”には「右に対しての左側。左右対称のもので，左側にあるものの通称。附近。」などの意味がある。李格非 主編「漢語大字典」(1996 湖北辞書出版社，四川辞書出版社 p.p.195

⁹ ここでは1畝の田の歩数，つまり240歩²を指す。

それぞれその分母で分子を割り、これを左（脇）に置く；通分するために、再び分母をすべての諸分子、及び通分をしたものに満遍なくかけ、皆通分して同にし、これらを合わせて法とする。求める所の（ものの）歩数を置き、1歩だったものが通分後に変化した歩数をかける。実を法で割ると縦の歩数が得られる。

術の中に“以最下分母偏乗諸分子及全歩、”という部分がある。“最下分母”というのは、一番小さい数を表す分母という意味なのだろうが、“最下”とは算籌の位置を示しているものとも考えられないだろうか。もしそうならばこの問題では最初から分数を算籌で表して計算をしていくことになる。

この術は分母の大きな数からかけていくので、結果的に最小公倍数で通分できる場合もあるが、必ずしも最小公倍数が公分母になるとも限らない。理由は分子分母の数が約分できるようになることも大いにあるはずなのに、計算途中の約分を指示するような術文が無いからである。これらの手順はすべての分数が整数になるまで続けられる。また“置之於左”という部分から、計算の過程で整数になったものから脇に置かれて、分数のものとは区別されていたのではないかということも考えられる。脇に置かれるのは整数を表す算籌であろう。漢数字表記で計算していたのでは、計算の過程で数字がどんどん変化するため、何度も書き直さなければならない。

この問題群では分数の個数が多すぎるため、【合分】のようなすべての分母を最初から掛け合わせて公分母をとる方法では数が大きくなりすぎてしまう。この計算の途中には約分をするような指示はないため、結局その場にある分母の最大数をすべてにかけ合わせていくという過程を繰り返す点を考えると、最小公倍数で通分しようという考えはなく【合分】と考え方が変わらないように思う。

(2) 分数の発生と分数計算での算籌に関わる予想

小学校の分数の学習では、分数というものを捉えるためにいろいろな具体物を取り挙げて「 m/n は、1つのものを n 等分した m 分を表す」というような学習から始める。 n 等分の1つ分が $1/n$ であることは非常に理解しやすい。このような等分割の結果得られた分数を“分割分数”と呼び、分数を数としてよりも量として捉えることから始める。

どの文明においてもきっと生活に密着して、このような分割分数の考え方はあったはずである。きっと中国の古代数学にもあったと思われるが、《九章算術》からわかる範囲での分数は、もともと割り算の商を表す手段から発生したのではないかと考える。【合分】の術をふりかえる。

術曰：母互乗子，并以爲實。母相乗爲法。實如法而一。不滿法者，以法命之。其母同者，直相從之。

“實如法而一。不滿法者，以法命之。”から、除法の商を表すための分数という捉えがあったことが伺える。当時の計算器具である算籌に着目してわり算での算籌の配置を考える。割り算の計算において、算籌を右図のように配したと川原氏は述べている¹⁰。

$m \div n$ の計算の場合

商	
実	m
法	n

¹⁰ 藪内清ら「科学の名著2 中国天文学・素学習」（1980 朝日出版社）より、川原秀城氏が示

商が整数にならないもの、あまりが出てしまうものに関しては、算籌の配置そのものが答えを示している。分数の除法では、そのまま分数を用いようとすると実や法に分数が来てしまうが、通分してしまえば分母を無視できて整数の除法に帰着することができる。分数の除法ではこの段階で算籌を用いたのではないだろうか。

また術文の書かれ方を見ると、「～して、これを実とする」「～して、これを法とする」というように書かれている。それから“實如法而一。”と続いて答えを求めている。すると、分数計算は最初から算籌を並べ計算を進めたわけではなく、漢数字で書かれたであろう問題の分子分母を操作して準備ができた後、算籌を用いて計算したと考えられる。問題に示されているような数値では、分子分母の操作の段階は九九で充分足りる。

巻第四「少廣」の分数の加法では、最初から算籌を並べていたのではないかと考えられるが、巻第一の分数計算の部分については算籌が必要に応じて基本は乗除の計算でのみ用いられ、分数は漢数字の表記をもとにして考えていったのではないかと思う。

2. 劉徽注《九章算術》の注釈に見られる分数概念

郭書春によると、劉徽は現在の山東省鄒平県出身で、彼の生涯についてはわかっていない。劉徽の《九章算術注》は、魏の景元四年(263 年)に作られ、原本は十巻からなっていたという。前の九巻では全面的に《九章算術》の公式や解法について論証しており、その他様々な原理を補っていて、《九章算術》の不精確であったり間違っていたりする部分を正している¹¹。ここでは主に劉徽の注釈と思われる部分に着目して、分数をどのように捉えていたのか探ってみる。

(1) 【約分】での注釈

按：約分者、物之數量，不可悉全，必以分言之。分之爲數，繁則難用。設有四分之二者，繁而言之，亦可爲八分之四；約而言之，則二分之一也。雖則異辭，至於爲數，亦同歸爾。法實相推¹²，動有參差¹³，故爲術者先治諸分。

(注：約分というものについて、物の数量はすべて整数で表されるとは限らないので、必ず分数で表さなければならない。分数を一つの数とすると、煩瑣な数だと用いにくい。例えば $2/4$ というものは、煩瑣な表し方をすると $4/8$ ともいうことができるし、簡単な表し方をすると $1/2$ である。表し方は異なっても数としては同じところに帰結するのである。法と実は互いに推求しているが、いつもまちまちで不ぞろいな状況にある。故に術を行う者はまず先に各種の分数計算法則を研究しなければならない。)

“物之數量，不可悉全，必以分言之。”には、整数に満たない端の数を表す手段として

した除法を参考にした。p.p.68～

¹¹ 第十巻はもとの名を《重差》呼んだ。劉徽が問題を自選して自ら注釈したものであると言われている。後にこの巻は独り歩きして、《海島算経》となる。第一問目に測望問題がありこれが海島の高さや距離についての問題であったため《海島算経》という名になった。郭書春「中国古代数学」(2009 商務印書館出版 p.p.10～)

¹² 漢語大字典によると“推”には「押す、推し進む、遷移する、計算する、推求」などの意味がある。李格非 主編「漢語大字典」(1996 湖北辞書出版社、四川辞書出版社 p.p.888)

¹³ “參差”は「長短、高低が不ぞろい、ばらばら」という意味がある。李格非 主編「漢語大字典」(1996 湖北辞書出版社、四川辞書出版社 p.p.186)

分数を用いることが述べられている。分数計算の重要性について“法實相推，動有參差，故爲術者先治諸分。”と述べている。

(2) 【合分】での注釈

母互乘子；約而言之者，其分麤¹⁴；繁而言之者，其分細。雖則麤細有殊，然其實一也。衆分錯難，非細不會。乘而散之，所以通之。通之則可并也。凡母互乘子謂之齊，羣母相乘謂之同。同者，相與通同共一母也；齊者，子與母齊，勢不可失本數也。方以類聚，物以羣¹⁵分。數同類者無遠；數異類者無近。遠而通體知，雖異位而相從也；近而殊形知，雖同列而相違也。然則齊同之術要矣：錯綜度數，動之斯諧，其猶佩¹⁶觿¹⁷解結，無往而不理焉。乘以散之，約以聚之，齊同以通之，此其筭之綱紀乎。其一術者，可令母除爲率，率乘子爲齊。

（分母の数を互いの分子の数にかけ合わせる；簡約に分数を表すと，その分数は粗くなり，煩瑣に一つの分数を表すと，その分数は細くなる。粗密の違いはあっても本質は同じ数である。各分数が錯雑としているときに細かくしないのなら，それらを理解することはできない。かけることによって分数を細かくし，これによって各分数を通じ合わせる。各分数を互いに通じ合わせることができれば，たすことができる。すべて分母の数を分子にかけ合わせることで，その結果を齊と呼び，もろもろの分母をかけ合わせることでその結果を同と呼ぶ。同というものは諸分子を相互に通じ合わせ，共通の分母を持たせることである。齊というものは，分子と分母を互いに齊しくさせ，本来の数を失わないようにすることである。各種の方法は各自の種類に基づいて寄り集まるものである。数というものは同類であれば遠くはなく；類が異なれば接近していても同じ類になることはない。どんなに離れていても相互に通じているものは，たとえ違う位置にあったとしても互いに関わり合うものである。近くて異なる形態のものは，たとえ同一の列の上にあったとしても互いにくいちがうのである。

すると齊同の術は非常に要となる術である。どんなに錯綜していて複雑な数理・数値であってもこれを用いさえすれば調和がとれ，それはまるで佩の結び目を，觿をつかってほどこようにどんな問題に対しても解決できないものはない。

かけることによって数を散開させ，約すことによって数を集め，齊同で数を互に通じるようにする，これはまさに算法の綱紀ではないか！別の術として，諸分母の積を各々の分母で割ってそれぞれを率とし，その分子に率をかけて齊とする方法もある。）

この注釈の中でいくつか注目したい部分がある。

同者，相與通同共一母也；齊者，子與母齊，勢不可失本數也。

同：諸分子を通じ合わせる共通分母で，齊：分子と分母を互いに齊しくさせて本来の数を失わないようにするものである。分数そのものの性質について述べている部分であり，通分の意

¹⁴ もとの字は「鹿」を3つ合わせて表記する「麤」で，「粗い，粗雑，大きい」などの意味がある。（新漢語林）鹿+鹿+鹿でできている字であるが，鹿の群れは羊のように密集しないところから，遠く離れる，粗いの意味を表す。（2004 新漢語林 大修館書店）

¹⁵ 群の正字。「たくさん，もろもろの，数が多い」などの意味がある。（2004 新漢語林 大修館書店）

¹⁶ 古代の玉（ぎょく）の装身具。おびだま。腰にさげるかざり玉。（2004 新漢語林 大修館書店）（2003 中日辞典 小学館/北京 商務印書館）

¹⁷ 「けい」と読む。くじり，つのぎり。象牙や骨で作り，先を尖らせて角の形にしたもの。古代，成人が常に腰に帯びていて，ひもの結び目などを解くのに用いた。（2004 新漢語林 大修館書店）（2003 中日辞典 小学館/北京 商務印書館）

味を説明している。分数計算ではこの考えが特に要となる。

數同類者無遠；數異類者無近。遠而通體知，雖異位而相從也；近而殊形知，雖同列而相違也。

同じ種類の数にすることで関わりあうことができる、つまり分数に関しては、通分することで足したり引いたりすることができることを抽象的に述べている部分である。

然則齊同之術要矣：錯綜度數，動之斯諧，其猶佩觿解結，無往而不理焉。乘以散之，約以聚之，齊同以通之，此其筭之綱紀乎。

通分の術を“齊同之術”と呼んでいる。その重要性について比喻を用いて計算の要となることを強調している。

このように丁寧に通分の必要性について注釈が加えられていることは、今日の指導に対して大いに参考になる。分数計算では乗除の計算に比べて加減の計算で学力に差が見られることが多く、通分の意味の理解が薄い状態が誤答からも伺える。

(3)【経分】での注釈

母互乘子知，齊其子；母相乗者，同其母；以母通之者，分母乘全内子。乗，散全則爲積分，積分則與分子相通之，故可令相從。凡數相與者謂之率。率知，自相與通。有分則可散，分重疊則約也。等除法實，相與率也。故散分者，必令兩分母相乘法實也。

(分母を分子にかけるというのは、その分子を斉しくするためであり；分母をかけ合わせるといふのは、その分母を同じにするため；分母でこれを通じるといふのは、分母を整数部分にかけて分子に入れるためである。かけるところによって、整数部分は散開し積分となり、積分とは即ち分子と通じ合ったものであるから、故にそれらをたし合わせることができる。すべて互いに関係し合う数量について、これらは率と呼ばれる。率というものは、本来相互に関係し通じ合うものである。もし分数があればそれを散開させることができ、分数の単位が重なっていれば簡約にすることもできる。等数で法と実を割ったものは互いに率を与える。故に分数を散開させるためには、必ず両分母を法と実にかけるのである。)

帯分数を割る計算があるため、帯分数に関する記述がある。帯分数の整数部分に分母をかけたものを“積分”と呼んでいる。もちろん、現在の積分とは違う。“積”には①聚，②累積，…」などの意味がある¹⁸。分数が積み重なったというようなイメージであろうか。この部分の注釈で注目すべきは“率”という言葉である。

凡數相與者謂之率。率知，自相與通。有分則可散，分重疊則約也。等除法實，相與率也。故散分者，必令兩分母相乘法實也

等数で法と実を割ったものは互いに率を与える(相与率になる)、これは割り算の除数と被除数の関係について述べたものである。この部分の分数の割り算では通分してしまうので分母は無視できて分子の数だけに着目すればよく、整数の除法に帰着することができる。

¹⁸李格非 主編「漢語大字典」(1996 湖北辞書出版社，四川辞書出版社 p.p.1217)

分数が割り算の商を表すためにも用いられていることを考えて、分数の分子と分母の関係もまた“率”で捉えることができる。等数で約分した既約分数の分子分母は、分子分母の関係そのものを表す率であるということである。

(4)【乗分】での注釈

凡實不滿法者而有母、子之名。若有分，以乘其實而長之，則亦滿法，之爲全耳。又以子有所乘，故母當報除。報除者，實如法而一也。今子相乘則母各當報除，因令分母相乘而連除也。

此田有廣從，難以廣論。設有問者曰：馬二十匹，直金十二斤。今賣馬二十匹，三十五人分之，人得幾何？答曰：三十五分斤之十二。其爲之也，當如經分術，以十二斤金爲實，三十五人爲法。設更言馬五匹，直金三斤。今賣四匹，七人分之，人得幾何？答曰：三十五分斤之十二。其爲之也，當齊其金、人之數，皆合初問入於經分矣。然則分子相乘爲實者，猶齊其金也；母相乘爲法者，猶齊其人也。同其母爲二十，馬無事於同，但欲求齊而已。又，馬五匹，直金三斤，完全之率；分而言之，則爲一匹直金五分斤之三。七人賣四馬，一人賣七分馬之四。（分子）〔金〕與人交互相生，所從言之異，而計數則三術同歸也。

（すべて実が法に満たないときには分母・分子の名称を持つ。もし分数があれば、その実に数をかけることによってその数を大きくし、法の数に達すれば整数となる。また分子に数をかけたので、分母はわり算でそれに報いなければならない。わり算で報いるとは、実を法で割ることである。今、分子はかけあわせたので分母はそれぞれに応じて割る、従って分母をかけ合わせていっぺんに割るのである。この田には横と縦があるが、これでさらに多くの方面のものをはっきりと表すことは難しい。ある人が次のように問うたとする：

馬の値段は20匹で金12斤である。もし馬を20匹売ったとして、35人で得た金をわけるとすると、各人はいくらずつ得られるか。答えは $12/35$ 斤である。この問題を処理するには経分術のようにしなければならず、金12斤を実とし、35人を法とする。仮にまた馬5匹の値段は金3斤であると言ったとする。4匹売ったとしてこれを7人で分けると各人はいくらずつ得られるか。答えは一人 $12/35$ 斤を得る。この問題の処理にはその金と人の数を齊しくしなければならず、すべて最初の問題に符合し、経分術に入るのである。では分子をかけあわせて実とするのは、その金の数を齊しくしているようなものであり、分母をかけあわせて法としているのは、その人数を齊しくしているようなものである。その分母は20で同じになり、馬は同じ数になったので役割が無くなり、齊しくなった金と人の数だけをつかって求めればよいのである。また馬5匹の値が金3斤というのは整数の率であり；これを分数で言うと即ち馬1匹の値は金 $3/5$ 斤となる。7人で4匹の馬を売るというのは、1人で $4/7$ 匹の馬を売ることである。金と人は互いに影響し合うもので、それを表すことばは異なっているが、しかし計算で得られる数値について、3種の方法は同様の結果が得られる。）

分数の乗法は術としては非常に覚えやすいものであるが、その意味を捉えることは子ども達が難しいと感じる部分である。劉徽が示した例を整理する。

① 馬は20匹で金12斤

もし馬を20匹売ったとして、35人で得た金を分けると一人分は $\frac{12}{35}$ 斤。

経分術にならい、金12斤を実、35人を法とする。

② 馬 5 匹の値段は金 3 斤

この馬を 4 匹売ったとして、7 人で得た金を分けると一人分は $\frac{12}{35}$ 斤

③ 馬 1 匹の値は金 $\frac{3}{5}$ 斤となる。7 人で 4 匹の馬を売るというのは、1 人で $\frac{4}{7}$ 匹の馬を売ることになる。

分子をかけあわせて実とするのは、その金の数を齊しくしているようなものであり、分母をかけあわせて法としているのは、その人数を齊しくしているようなものである。

馬の数が同じであればそれは無視できて、金と人数だけで考えることができ、経分術になる。②は結局①と同じことである。馬と金を、率を使って「馬 1 匹の値は金 $\frac{3}{5}$ 斤」と表し、馬と人との率を「1 人で $\frac{4}{7}$ 匹の馬を売る」と表して、先ほどの①の問題に戻ると意味がよくわかる。

3. まとめ

巻第一の分数計算に関する部分は、非常に考えられた配列になっていることがわかる。またそれぞれの術は現在用いられているものと同じものが多く、注釈にも分数に関して大切な考え方がいくつも記されていた。その中で、教科指導に取り入れられると感じた点がいくつかある。

(1) ほかに波及できる分数の捉え方

① 1 に満たない端を表すためのもの

② 整数で商が得られない場合の割り算の商を表すためのもの

①も②も教科書では学習するが、特に②に関して丁寧にすることで、分数の捉え方が定着することが期待できる。加法・減法ではなぜ通分しなければならないのかを捉えるために、分数の単位についての学習に加え、除法に着目した方法もとることで、「同分母＝除数が同じ、だから分け方が同じなので足し引きできる。」「異分母＝除数が異なる。分け方が異なるのでばらばらな大きさだから足し引きできない。」というようにも捉えられる。自然数の除法は前の学年までの学習であるので、以前の学習に結びつけながら分数を捉えることや、そもそも自然数で加法・減法ができるのも、自然数すべてが 1 という同じ単位でできているためというような理解の仕方も期待できる。

(2) 分数に率の考え方を取り入れる

(1) で述べた「割り算の商を表すための分数」という考えをしっかりとつかむことができれば、「率」についても取り入れることができる。分子と分母の関係を「率」と捉えることができれば、約分や倍分などもただ分子分母の数を公約数で約す操作のみならず、操作の意図を確認しながらできることが期待できる。分子＝被除数、分母＝除数の関係を把握できていれば、「率」の考えは割り算の除数と被除数の関係でもつかむことができる。分数量の段階で率の考え方をしっかり把握することは、速さや割合、濃度の学習においても理解の定着につながることを期待できる。

(3) 【経分】の術と、【乗分】での劉徽の例を活用する

《九章算術》の【経分】では通分して除法を行う計算法を示していた。この方法は教科書では紹介されていないが、考え方の一つとして授業などでぜひ紹介していきたい。乗法を学習した後に除法を考える際、子どもたちから良く出される「分母同士、分子同士を割る」という考えも、通分すると常に用いることができる。

【乗分】において劉徽が示した3つの例はとてもおもしろい例であると思う。教科書では九章算術のような面積図で意味を示して答えを求めているものや、式を操作して答えを求めているものがある。

劉徽の3例を子どもたちがわかりやすいように少し言い換えてみる。これらの問題はすべてが同じ答えになり、結局は3問ともが同じ事を言っているのであるが、演算を決定したり、必要な数値を選んだり、整数で表されているものを分数で表したり、問い方は違っても同じ意味の問題だと気づいたり、学習することができる要素が豊富に含まれている。予想される子どもたちの立式もあわせて考えてみる。

- ① 馬は20匹で金12斤です。もし馬を20匹売ったとして、35人で得た金を分けると、一人分はいくらになるでしょうか？
- ② 馬5匹の値段は金3斤です。この馬を4匹売ったとして、7人で得た金を分けると一人分はいくらになるでしょうか？
- ③ 馬1匹の値は金 $\frac{3}{5}$ 斤です。(1人で) $\frac{4}{7}$ 匹の馬を売ると金はいくらになるでしょうか？

〈予想される子どもたちの立式〉

① 1人分を求めるのはわり算だから、 $12 \div 35 = \frac{12}{35}$

…この問題の解決の際には、20を使うかどうか迷う児童の姿も見られるだろう。

② 馬5匹で金3斤なら、馬1匹あたりの値段は $3 \div 5 = \frac{3}{5}$ 斤。それからまず、馬を4匹売ると

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5} \text{ 斤。これを7人で分けるので、} \frac{12}{5} \div 7 = \frac{12}{35} \text{ 斤が一人分。}$$

…この問題では、順々に計算を進めることができる。

③ 一匹あたり、一人あたりがでているので、かけ算をして $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ 斤。

以上のように予想してみたが、これら3つの問題について子どもたちがどのような考えで解決するか、どのように捉えるかについて、今後検証してみたい。

教育現場に従事する者として、数学史の知識は今日の教育現場にも応用できるものであると考える。応用する際には、用いようとしている古代の人々の考えをできる限り自分で探って用いるようにできればと思う。先人の考え方を知るのはとても興味深く、その中から現在に示唆を与えるものを探したり、活用できるものを見つけたりすることは、数学史研究のひとつの価値になりえると思う。