

単一サーバ待ち行列の全稼働期間に対する拡散近似解析

NTT 電気通信研究所 高橋 敬隆 (Yoshitaka Takahashi)

木村 丈治 (George Kimura)

1. まえがき

単一サーバ待ち行列 ($GI/G/1$) は、通信システムのトラヒック問題に現れる基本的なモデルであり活発に研究されている。従来より、本モデルの種々トラヒック測度を厳密に求めることは困難であるため (例えば, [1], [2]), これ迄に多数の近似式が提案されている。^{[3]~[11]} しかし乍ら、既存近似式はいずれも“待ち時間”を扱っており、“全稼働期間”に関する検討は余りなされていない。全稼働期間は休止時間や割込優先権のある待ち行列の解析に必要である。

全稼働期間に対する厳密解は, Finch^[12], Pakes^[13] により与えられているが 実用的な数値計算は困難である。Ramaswami^[14] は位相法^[15] により $GI/PH/1$ の全稼働期間を解析している。

しかしその方法は、行列演算を含む数値解析を必要とする。近似解析は、おすかに Heyman^[16], Gross-Harris^{[17], [18]} に見ら

れるのみである。Heyman⁽¹⁶⁾は、 $M/G/1$ の全稼働期間分布を拡散近似法により解析している。Gross・Harris⁽¹⁷⁾は到着の無記憶性を仮定して $GI/G/1$ の平均全稼働期間を近似解析している。

本報告は、拡散近似法をもとにして、 $GI/G/1$ における全稼働期間の平均、分散に対する近似式を提案するものである。

2. 対象モデル ($GI/G/1$)

次の条件を仮定する： i) 呼の到着間隔 (A) は、互いに独立で同一 (iid) の一般分布 $A(x)$ に従う。到着間隔の平均、分散をそれぞれ、 λ^{-1} , σ_a^2 とする； ii) 呼の保留時間 (S) は、到着間隔と独立に iid で一般分布 $H(x)$ に従う。保留時間の平均、分散をそれぞれ、 μ^{-1} , σ_s^2 とする； iii) サーバ数は1とする； iv) 待ち室容量は無限大であり、呼のサービスが完了する迄、系内にとどまる； v) サーバが空であるのは、系内に呼が存在しない時に限られる。

以下、到着間隔の変動係数を C_a 、保留時間の変動係数を C_s 、トラヒック密度を $\rho (= \lambda/\mu)$ とする。又、到着間隔分布のラプラス・スティルテス変換 (LST) を $A^*(s)$ とする。

$$A^*(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t).$$

B. 拡散近似

$V(t)$ を時刻 t における残余仕事量とし, t_0 を系が空きの時に保留時間 α_0 を持つ呼が到着した時点とすると,

$B \triangleq$ 全稼働期間 (Busy period)

$$= \inf_{t > 0} \{t : V(t+t_0) = 0\} \quad (1)$$

非マルコフ過程 $\{V(t)\}$ を拡散過程 $\{D(t)\}$ で近似する。この時,

$$p(x_0, x, t) dx$$

$$\triangleq \Pr \{ D(t) > 0, \text{ for } 0 < \tau < t, x < D(t) < x+dx \mid D(t_0) = x_0 \}$$

は, 次の後進方程式を満たす:

$$\frac{1}{2} v \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(x_0, x, t) + m \frac{\partial}{\partial x_0} p(x_0, x, t) = \frac{\partial}{\partial t} p(x_0, x, t). \quad (2)$$

ここで, m, v は, 拡散パラメータで,

$$m(x, t) \triangleq \lim_{h \downarrow 0} E(D(t+h) - D(t) \mid D(t) = x) / h, \quad (3a)$$

$$v(x, t) \triangleq \lim_{h \downarrow 0} \text{Var}(D(t+h) - D(t) \mid D(t) = x) / h. \quad (3b)$$

$\{D(t)\}$ に, 時間的斉時性^(*)を仮定すると, Whitt⁽¹⁹⁾, 高橋⁽²⁰⁾により, 次式で与えられる:

$$m = \rho - 1, \quad (4a)$$

$$v = \frac{\rho}{\mu} (C_a^2 + C_s^2). \quad (4b)$$

(*) 到着間隔分布が指数分布でない限り, これは成り立たない。

$g(t|x_0)$ を $D(t_0)=x_0$ から始まるという条件下での全稼働期間の確率密度関数とする。Heyman^[16]は、無限小平均、 $-m$ 、無限小分散 v なる拡散過程の初通過時間 (0 から始まって初めて x_0 に入る迄の時間) の分布に対する公式により、 $g(t|x_0)$ を求めているが、ここでは直接的に求めよう。

$$\int_{0+}^{\infty} P(x_0, x, t) dx = P_r\{B > t\} \quad (5)$$

より

$$g(t|x_0) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{0+}^{\infty} P(x_0, x, t) dx. \quad (6)$$

g^* を g の (t に関する) ラプラス変換とする:

$$g^*(s|x_0) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t|x_0) dt. \quad (7)$$

式(2)を x に関して $(0, \infty)$ 上で積分し、 t に関してラプラス変換をとると、 $g^*(s|x_0)$ の (x_0 に関する) 2階常微分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}v \frac{d^2 g^*}{dx_0^2} + m \frac{dg^*}{dx_0} = s g^* \quad (8)$$

式(8)から、 $g^*(s|x_0)$ について解くと (Cox & Miller^[21] p. 211)

$$g^*(s|x_0) = \alpha e^{x_0 \theta_1(s)} + \beta e^{x_0 \theta_2(s)}, \quad (9)$$

where

$$\theta_1(s), \theta_2(s) = \frac{-m \mp \sqrt{m^2 + 2sv}}{v}. \quad (10)$$

式(10)より, $S > 0$ に対し,

$$\theta_1(s) < 0 < \theta_2(s) \quad (11)$$

$m < 0$ 故,

$$\theta_1(0) = \frac{-m - (-m)}{v} = 0; \quad (12a)$$

$$\theta_2(0) = \frac{-m + (-m)}{v} = \frac{-2m}{v}. \quad (12b)$$

さて,

$$g^*(s|x_0) < \int_0^\infty g(t|x_0) dt = 1 \quad (13)$$

より, $g^*(s|x_0)$ は一様有界。よって $x_0 \rightarrow \infty$ とすると

$\beta = 0$ でなければならぬ。一方,

$$g^*(s|x_0) \Big|_{s=0} = 1$$

より $\alpha = 1$. 従って,

$$g^*(s|x_0) = \exp\left(x_0 \cdot \frac{-m - \sqrt{m^2 + 2sv}}{v}\right) \quad (14)$$

これより, x_0 が与えられた条件下の n 次積率:

$$E(B^n | x_0) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} g^*(s|x_0) \Big|_{s=0}$$

が分かる。具体的に,

$$E(B | x_0) = -\frac{x_0}{m}, \quad (15a)$$

$$E(B^2 | x_0) = \frac{-m x_0^2 + x_0 v}{-m^3}. \quad (15b)$$

全稼働期間 B の確率密度関数 $g(t)$ は,

$$g(t) = \int_0^\infty g(t|x_0) dH(x_0) \quad (16)$$

故に,

$$E(B) = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (17a)$$

$$E(B^2) = \frac{\frac{1}{\mu^2} \nu - m \frac{1}{\mu^2} (c_s^2 + 1)}{-m^3} \quad (17b)$$

(注意) ホアソン入力 ($M/G/1$) モデルの時, Heyman^[16] が指摘したように, 式(17)は厳密解に一致する。又, 式(4a), (17a)が“全稼働期間の平均は, 到着間隔分布形に依存していない”ことが分かる。次節で, この点を修正する。

4. 修正

最近, 拡散近似解の発見的な修正が報告されている。^{[22], [23]}

$M/G/1$ では厳密解と一致するため, ここでは, $GI/M/1$ との整合を図る。

4.1 $GI/M/1$ モデル (既存理論)

一般化利用率を ω とする。すなわち ω は, 関数方程式:

$$\omega = A^*(\mu(1-\omega)) \quad (18)$$

の $[0, 1]$ 内における唯一の根である。^[2] 全稼働期間の 1, 2 次積率は次式で与えられる。^[2]

$$E(B) = \frac{1}{1-w} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (19a)$$

$$E(B^2) = \frac{2}{(1-w)^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{1}{1 + \mu \left[\frac{dA^+(s)}{ds} \right]_{s=\mu(1-w)}} \quad (19b)$$

4.2 一般化利用率の近似式

木村・高橋^[24]により提案された近似式を用いる。

$$w_1 \triangleq \frac{\rho(C_a^2+1)}{\rho(C_a^2+1) + 2(1-\rho)} \quad (20a)$$

$$w_2 \triangleq \frac{\rho(C_a^2+1)}{\rho(C_a^2+1) + 2(1-\rho) \exp\left\{ \frac{2(1-\rho)}{3\rho} (1-C_a^2)^2 \right\}} \quad (20b)$$

$$w_3 \triangleq \frac{\rho(C_a^2+1)}{\rho(C_a^2+1) + 2(1-\rho) \exp\left\{ (1-\rho) \log \frac{(C_a^2+1)^2}{4C_a^2} \right\}} \quad (20c)$$

$$w_4 \triangleq \frac{\rho(C_a^2+1)}{\rho(C_a^2+1) + 2(1-\rho) \exp\left\{ \frac{2(1-\rho)(1-C_a^2)}{3\rho(C_a^2+1)} \right\}} \quad (20d)$$

この時、次式右边で一般化利用率 w を近似する：

$C_a \geq 1$ ならば、

$$w \cong 1 - C_a(1-\rho)w_1 + C_a(1-\rho)w_3 \quad \text{for } \rho \geq \frac{C_a-1}{C_a} \quad (21a)$$

$$w \cong w_3 \quad \text{for } \rho \leq \frac{C_a-1}{C_a} \quad (21b)$$

$C_a \leq 1$ ならば、

$$w \cong [1 - C_a(1-\rho)]w_4 + C_a(1-\rho)w_2. \quad (21c)$$

4.3 GI/M/1 との整合

$C_a \geq 1$ のとき, 2 次の対称形超指数分布, $C_a \leq 1$ のとき, Shifted した指数 (単位分布と指数分布の重畳) 分布をあてはめる^(*). 修正拡散パラメータとして次式を提案する (付録).

$$\tilde{m} = \omega - 1 \quad (22a)$$

$$\tilde{v} = K \frac{\omega}{\mu} (C_a^2 + C_s^2) \quad (22b)$$

$$K \triangleq \frac{2}{C_a^2 + 1} \cdot \frac{1 - \omega}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{L} - 1 \right) \quad (22c)$$

$$L \triangleq \begin{cases} 1 - \exp \left[- \frac{1 - C_a}{\rho} (1 - \omega) \right] \frac{\rho}{C_a(1 - \omega) + \rho} \left\{ \frac{1 - C_a}{\rho} + \frac{C_a}{C_a(1 - \omega) + \rho} \right\}, & \text{for } C_a \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{(1 + r)^2}{(1 - \omega + (1 + r)\rho)^2} + \frac{(1 - r)^2}{(1 - \omega + (1 - r)\rho)^2} \right\}, & \text{for } C_a \geq 1 \end{cases} \quad (22d)$$

$$r \triangleq \sqrt{1 - \frac{2}{1 + C_a^2}} \quad \text{for } C_a \geq 1$$

式 (22) を用いて, 全稼働期間の平均, 分散は次式で与えられる:

$$E(B) = - \frac{1}{\tilde{m}} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (23a)$$

$$\text{Var}(B) = \frac{\frac{1}{\mu} \tilde{v} - \tilde{m} \frac{1}{\mu^2} C_s^2}{-\tilde{m}^3} \quad (23b)$$

(*) 式 (19b) の $A^*(\cdot)$ に, それぞれの分布の LST を代入する. (付録参照)

5. 数値例

5.1 M/G/1 モデル

ポアソン入力 ($\lambda^2 \sigma_a^2 = c_a^2 = 1$) の時, $w_i = \rho$ ($1 \leq i \leq 4$)
より, $w = \rho$. 式 (22) より, $K = 1$ となるから, 式 (23) は,

$$E(B) = \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{\mu},$$

$$\text{Var}(B) = \frac{c_s^2 + 1}{(1-\rho)^3 \mu^2} - \frac{1}{(1-\rho)^2 \mu^2}.$$

これは, よく知られた公式^[2] と一致する。

5.2 Ramaswami・Lucantoni の例^[10]

文献 [10] では, 2つのモデルを挙げ, Gross・Harris の近似式の精度が良くないことを示している。

5.2.1 E_g/M/1 モデル

入力が, 図1で表される, 一般化ア-ラン分布とする。この時, $\lambda^{-1} = \frac{23}{10}$, $c_a^2 = 0.3838$, $\mu = 0.483$ とした時の厳密解^[11] 及び近似解析結果を表1に示す。表中, G-H 近似は, Gross・Harris の近似式の Ramaswami's^[12] による計算結果である。Expon. 近似は, M/M/1 の結果を意味する。

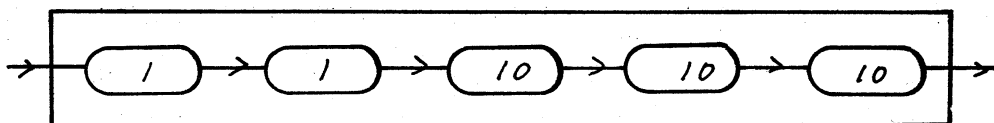


図1. 一般化ア-ラン分布 (Ramaswami's の例)

5.2.2 $H_2/M/1$ モデル

入力が、図2で表される、超指数分布とする。この時、

$$\lambda^{-1} = 37/100, \quad C_a^2 = 3.485.$$

$$\mu = 6 \quad (\rho \doteq 0.45) \quad \text{又は} \quad \mu = 3.003 \quad (\rho \doteq 0.9)$$

の時の厳密解、近似解を表2に示す。

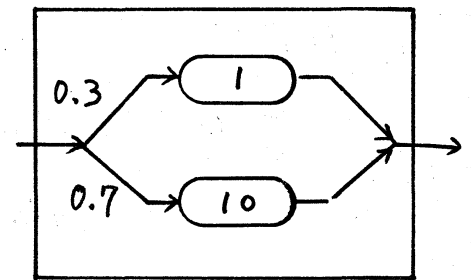


図2. 2-次超指数分布
(Ramaswami の例 [10])

これらの例に対しても、本近似式は良い精度であることが分かる。なお、Gross・Harris の近似式 [17] は再生関数を含ん

表1 $E_2/M/1$ における平均全稼働期間
($C_a^2 = 0.3803$)

ρ	厳密解	本近似	G-H 近似	Expon. 近似
0.9002	14.56	14.57	5.950	20.74

表2 $H_2/M/1$ における平均全稼働期間
($C_a^2 = 3.485$)

ρ	厳密解	本近似	G-H 近似	Expon. 近似
0.4504	0.5570	0.4171	2.2046	0.3031
0.9008	7.388	7.068	-0.5679	3.357

であり、陽に表現されていないことに注意する。

5.3 GI/D/1モデル

$A(x)$ として2次の対称形超指数分布 ($C_a^2 = 1.5$), 指数分布 ($C_a^2 = 1.0$), 2次のアーラン分布 ($C_a^2 = 0.5$) を考える。

$H(x) = \delta(x-1)$ ($\mu=1$ なる単位分布) の時の全稼働期間の平均, 分散に対する近似解とシミュレーション結果を

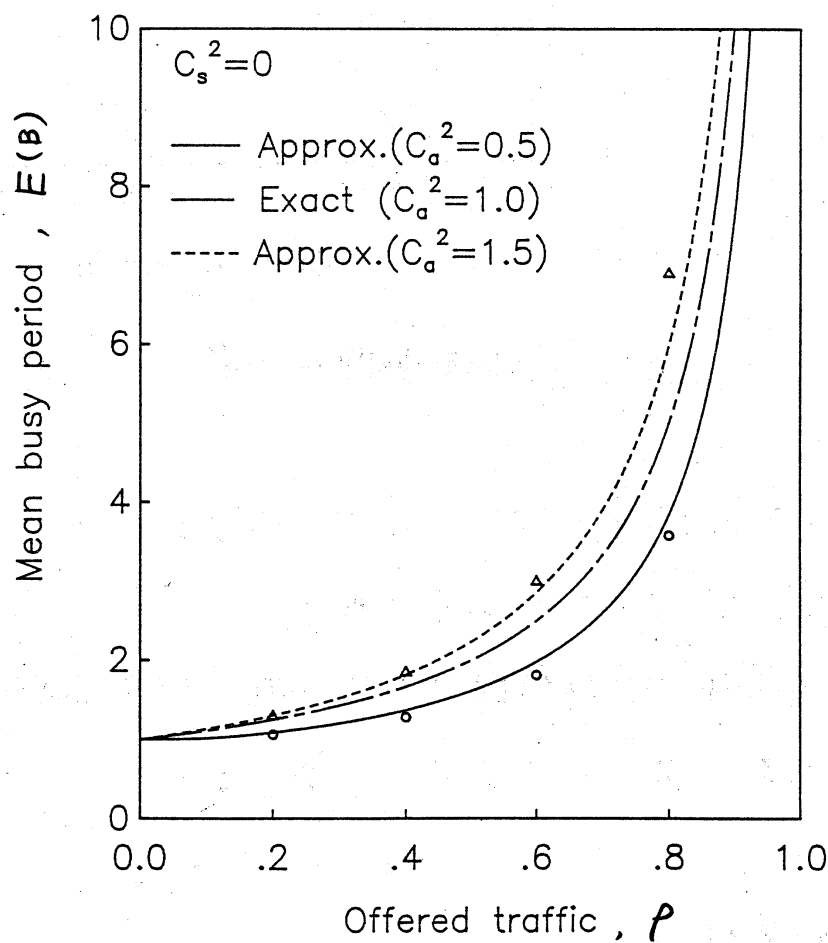


図3. 全稼働期間の平均 vs. ρ (GI/D/1)

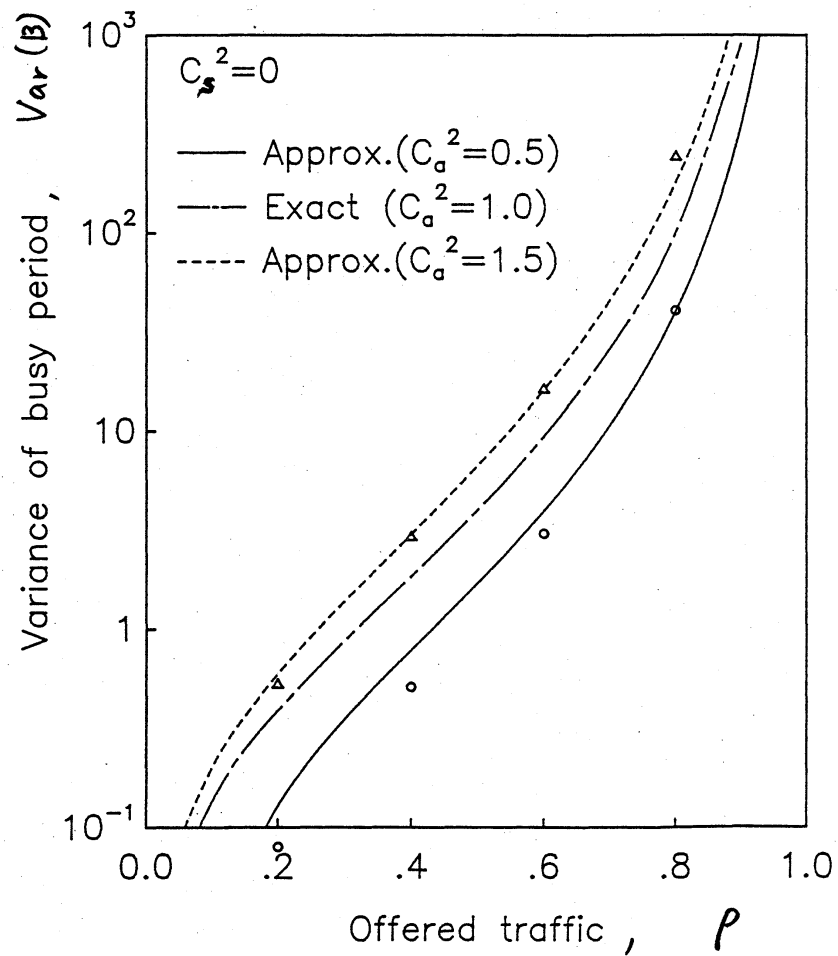


図4. 全稼働期間の分散 vs. ρ ($GI/D/1$)

図3, 4に示す。図中, Δ は H_2 入力, $\circ$ は E_2 入力に対応するシミュレーション値を表す。

到着間隔の変動係数が大きい程, 全稼働期間の平均及び分散は大きくなっていることが分かる。

6. むすび

単一サーバ待ち行列における全稼働期間の平均と分散に対

する近似公式を拡散近似法により導出した。更に、 $GI/M/1$ の結果を用いて拡散パラメータを修正し、精度を向上させた。本近似式は、その作り方より、「到着間隔の変動係数又は保留時間の変動係数が1に近い程、良い精度を持っている」とことが期待される。今後、シミュレーション等により、更に適用域を明らかにしてゆく予定である。

[付録]

修正拡散パラメータ (式(22)) について：

式(4)は、時間的斉時性を仮定している。そこで、修正拡散パラメータ ($\tilde{m}$, $\tilde{\nu}$) を次のようにおく。

$$\tilde{m} = \text{Const}_1 \cdot \rho - 1, \quad \tilde{\nu} = \text{Const}_2 \cdot \frac{\rho}{\mu} (C_a^2 + C_s^2). \quad (A1)$$

$C_s^2 = 1$ ($GI/M/1$) の時、全稼働期間の平均、分散は、次式で与えられる (式(17))：

$$\begin{aligned} E(B_{GI/M/1}) &= -\frac{1}{\tilde{m}} \cdot \frac{1}{\mu}, \\ \text{Var}(B_{GI/M/1}) &= \left(\frac{1}{\mu} \tilde{\nu} - \tilde{m} \frac{1}{\mu^2} \right) / (-\tilde{m})^3. \end{aligned} \quad (A2)$$

一方、式(19)より $GI/M/1$ の全稼働期間の厳密解が知られている：

$$E(B_{GI/M/1}) = \frac{1}{1-w} \frac{1}{\mu},$$

$$\text{Var}(B_{GI/M/1}) = \frac{1}{(1-w)^2 \mu^2} \left(\frac{2}{1 + \mu \frac{d}{d\omega} A^*(\omega) \Big|_{\omega=\mu(1-w)}} - 1 \right). \quad (A3)$$

式(A2)と式(A3)を等しいとおいて、式(A1)を代入すると、

$\text{Const}_1, \text{Const}_2$ が得られ、

$$\text{Const}_1 = \frac{w}{\rho},$$

$$\text{Const}_2 = \frac{2}{c_a^2 + 1} \frac{1-w}{w} \left\{ \left[1 + \mu \frac{d}{d\omega} A^*(\omega) \Big|_{\omega=\mu(1-w)} \right]^{-1} - 1 \right\}. \quad (A4)$$

式(A1)の $\tilde{m}$ に式(A4)を代入して式(22a)が得られる。

式(A4)において現れる $\frac{d}{d\omega} A^*(\mu(1-w))$ を2次モーメント整合法により近似する。

$c_a \geq 1$ のとき、2次の対称形超指数分布で、入力分布をあてはめると、

$$A^*(\lambda) = 2c_1^2 \lambda / (\lambda + 2c_1 \lambda) + 2c_2^2 \lambda / (\lambda + 2c_2 \lambda) \quad (A5a)$$

但し、 $c_1 = (1+r)/2$, $c_2 = (1-r)/2$, $r = \sqrt{1 - 2/(1+c_a^2)}$.

$c_a \leq 1$ のとき、Shiftedした指数分布をあてはめると、

$$A^*(\lambda) = e^{-\frac{1-c_a}{\lambda}} \lambda \times (\lambda/c_a) / (\lambda + \lambda/c_a) \quad (A5b)$$

式(A5)を λ について微分し、式(A4)に代入すると、式(A1)より、式(22b)~(22d)が得られる。

(付録終)

参考文献

- [1] 菰田、能上、星子：「補助変数法によるGI/G/1待ち行列の解析」信学論，J66-A，5，pp.408-415 (1983).
- [2] Kleinrock, L. (手塚、真田、中西訳)：待ち行列システム理論 (下)，マグロウヒル好学社 (1975).
- [3] Heyman, D.P.: "A diffusion model approximation for the GI/G/1 queues in heavy traffic," Bell Syst. Tech. J., 54, pp.1637-1646 (1975).
- [4] Kobayashi, H.: "Application of the diffusion approximations to queueing networks : Part I - equilibrium queue distributions," J. Assoc. Comput. Mach., 21, pp.316-328 (1974).
- [5] Gelenbe, E.: "On approximate computer system models," J. Assoc. Comput. Mach., 22, pp.261-269 (1975).
- [6] Page, E.: Queueing Theory in OR, Opnl. Res. Series, edited by K.B. Haley (1972).
- [7] Krämer, W. and Lagenbach-Belz, M.: "Approximate formulae for general server systems with single and batch arrival," Angewandte Informatik, 9, pp.396-402 (1978).
- [8] Sakasegawa, H.: "An approximation formula $L_q \simeq \alpha \rho^\beta (1-\rho)$," Ann. Inst. Statist. Math., 29a, pp.67-76 (1977).
- [9] Shanthikumar, J.G. and Buzacott, J.A.: "On the approximations to the single server queue," Int. J. Prod. Res., 18, 6, pp.761-773 (1980).
- [10] Whitt, W.: "The queueing network analyzer," Bell Syst. Tech. J., 62, pp.2779-2815 (1983).
- [11] 馬場裕：「GI/G/1待ち行列の待ち時間の分散の近似式」、日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集，2-C-4 (1984).
- [12] Finch, P.D.: "On the busy period in the queueing system GI/G/1," J. Austral. Math. Soc., pp.217-218 (1961).
- [13] Pakes, A.G.: "On the busy period of the modified GI/G/1 queue, J. Appl. Prob., 10, pp.192-197 (1973).
- [14] Ramaswami, V.: "The busy period of queues which have a matrix geometric steady state probability vector," Opsearch, 19, 4, pp.238-261 (1982).
- [15] Neuts, M.F.: Matrix Geometric Solution in Stochastic Models, - An Algorithmic Approach, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore (1981).
- [16] Heyman, D.P.: "An approximation for the busy period of the M/G/1 queue using a diffusion model," J. Appl. Prob., 11, pp.159-169 (1974).
- [17] Gross, D. and Harris, C.M.: Fundamentals of Queueing Theory, Wiley, New York, Chapter 6, pp.306-308 (1974).

- [18] Ramaswami, V. and Lucantoni, D.M.: "On the merits of an approximation to the busy period of the GI/G/1 queue," *Management Sci.*, 25, 3, pp.285-290 (1979).
- [19] Whitt, W.: "Refining diffusion approximation for queues," *Oper. Res. Letters*, 1, 5, pp.165-169 (1982).
- [20] 高橋敬隆: 「多呼種集団到着単一サーバモデルの拡散近似解析」 *信学論*, J69-A, 3, pp.317-324 (1986).
- [21] Cox, D.R. and Miller, H.D.: *The Theory of Stochastic Processes*, John Wiley, New York (1965).
- [22] Kimura, T.: "Refining diffusion approximations for GI/G/1 queues: A tight discretization method," *Proc. ITC11, Kyoto*, pp.3.1.A2.1-3.1A2.7 (1985).
- [23] Tien, M. and Jansen, V.: "Remarks on the method of diffusion approximation and some further heuristic formulas," *EIK*, 29, pp.382-394 (1984).
- [24] 木村、高橋: 「GI/M/1における一般化利用率近似式」 *日本OR学会春季研究発表会 アブストラクト集* (1986).