

## Liouville 方程式の初期値問題の近似計算

東大 理 金田 行雄

### §1. 序

乱流理論における興味を中心は、レイノルズ数  $R$  の大きな、強い乱流ではある。しかし、 $R$  の小さい場合、あるいは、 $R$ -展開についてさえも解決者みとはいえない<sup>[1]</sup>。又、 $R$ -展開が強い乱流に関する何らかをも与えないとも限らない。例えば、ある程度肯定的結果が報告されている<sup>[2]</sup>、Wyld 流のくりこみ、あるいは consolidation の方法は  $R$ -展開を基に作られる<sup>[3]</sup>。どのような consolidation が有効かを調べるためにも、 $R$ -展開をみやすくし、その性質を知る必要がある。

ここでは、Burgers モデル方程式を例にとり、この  $R$ -展開を、Liouville 方程式の初期値問題を基として調べ、二、三の近似について、コメントする。(§3 は読みとばされても良い)

### §2 外力のない場合

Burgers 方程式は，適当な無次元化と，フーリエ成分による表現で，次式のように与えられる。

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -p^2 u_p + (-i)R \sum'_{q,r} \frac{1}{2} p u_q u_r \quad (1)$$

ここで， $p, q, r$  は波数， $\Sigma'$  は  $p = q + r$  を満たす  $q, r$  の和を示めし，以下，波数の離散的，あるいは連続的表現は，ことわらずに適宜使い分けることにする。(1)において，

$u_p = e^{-p^2 t} \cdot \omega_p$  と変換すれば (1) は次式となる。

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = -\frac{1}{2} i R \sum'_{q,r} p e^{2q r t} \omega_q \omega_r \quad (2)$$

この  $\omega \equiv (\dots, \omega_N, \dots, \omega_1, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N, \dots)$  の確率分布函数  $P$  に対する Liouville 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_p \frac{\partial}{\partial \omega_p} (\dot{\omega}_p P) = \tilde{Y}(t) P \quad (3)$$

$$\therefore \tilde{Y}(t) \equiv R \sum_p \sum'_{q,r} M(t) \partial_p \omega_q \omega_r \quad (4)$$

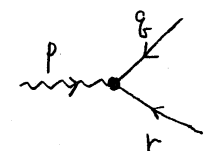
$$M(t) \equiv +\frac{1}{2} i p e^{2q r t}, \quad \partial_p \equiv \frac{\partial}{\partial \omega_p} \quad (5)$$

(3) の解は

$$P(t) = \exp \left\{ \int_0^t \tilde{Y}(t') dt' \right\} P(0) \quad (6)$$

$$= \left[ 1 + \int_0^t \tilde{Y}(t') dt' + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}(t_2) + \dots \right] P(0) \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 $\overleftarrow{f}$  の  $\leftarrow$  は時間の順序づけ演算を意味し、 $t_1 > t_2 > \dots$  のとき  $Y(t_1)Y(t_2)\dots$  とする。 $\rightarrow$  は逆向き。  
図形的に表わすためには、例えば、 $\omega$  を実線、 $\omega$  を波線、 $M$  を点に対応させると、(4) は次のように表わせる。

$$R \sum \sum' M \omega_p \omega_q \omega_r = \text{diagram} \quad , \quad -p+q+r=0 \quad (8)$$


### 例題

例として、初期分布が Gaussian で

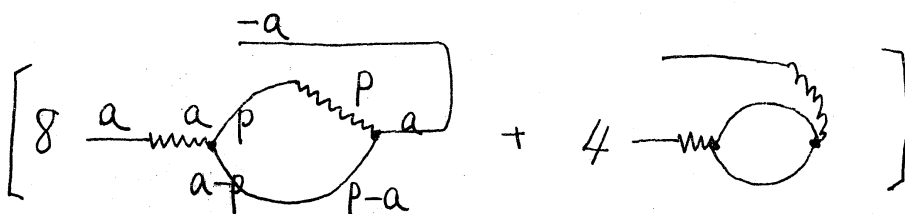
$$P(\underline{u}, 0) \prod d\underline{u} = N \prod \exp\left[-\frac{u_k u_{-k}}{\phi_k}\right] \prod d\underline{u}_k = P(\underline{\omega}, 0) \prod d\underline{\omega}$$

( $N$  は規格化因子)

で与えられた時のエネルギー  $E_a(t) = \langle u_a(t) u_{-a}(t) \rangle$  を考えてみる。(7), (8) から

$$\begin{aligned} E_a(t) &= e^{-2a^2 t} \langle \omega_a(t) \omega_{-a}(t) \rangle = e^{-2a^2 t} \int \prod d\underline{\omega} \omega_a \omega_{-a} P(\underline{\omega}, t) \\ &= e^{-2a^2 t} \int \prod d\underline{\omega} \omega_a \omega_{-a} \left[ 1 + R \text{diagram} + R^2 \text{diagram} + \dots \right] P(0) \end{aligned}$$

となる。ただし、ここで時間積分、波数などの記号は省略した。これから、たとえば  $O(R^2)$  の寄与は

$$R^2 e^{-2a^2 t} \left[ 8 \text{diagram} + 4 \text{diagram} \right] \quad (9)$$


で表現できることがわかる。ここで  $\underline{g}_{mr}$  は  $\langle u_g \partial_r \rangle_0$   
 $= -\delta_{g,r}$ ,  $\underline{g}_{rr}$  は  $\langle u_g u_r \rangle = \delta_{g+r} \phi_g$ ,  $\langle \rangle_0$  は  
 $t=0$  における平均を意味する。  $\langle \partial u \rangle = 0$  に注意。

たとえば (9) の前者を数式で表現すると次のようになる。

$$R^2 e^{-2a^2 t} \oint_P \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (+i\frac{a}{2}) e^{\alpha_1 t_1} (+i\frac{p}{2}) e^{\alpha_2 t_2} \phi(a-p) \phi(a) (-1)^3$$

$$\in \mathbb{C}, \quad \alpha_1 = p(a-p), \quad \alpha_2 = a(p-a)$$

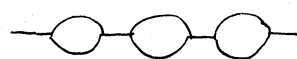
$R$  の高次では, 種々の図形が現われる。まず  $t_1, t_2, \dots, t_n$  の  
時間積分を実行すると, それらは次の型の寄与を与えること  
がわかる。(ひとつひとつの図形について)

$$e^{-2a^2 t} \sum_k e^{2a^2 t - \beta_k t} \left\{ \sum_{g_1} \sum_{g_2} \dots \sum_{g_n} \Phi(g_1, g_2, \dots, g_n) \exp \left[ - \sum_{i=1}^n \gamma_i g_i^2 t \right] \right\}$$

ここで,  $\gamma_i = 0$  または  $1$ ,  $\beta_k$  は適当な定数。これから  $t \rightarrow \infty$   
においては,  $\{ \}$  による特異性が無視できるという仮定のもとで,  
これらのエネルギーへの寄与は, 主要には  $t$  の代数  
函数  $\times \exp \{ -(\min \beta_k) t \}$  となることがわかる。

いくつかの図形について  $-\min \beta_k$  を示す。

$$\begin{array}{ll} \text{Diagram 1: Circle with 2 external wavy lines} \rightarrow -a^2 & \text{Diagram 2: Circle with 2 external wavy lines and 1 internal wavy line} \rightarrow -\frac{3}{2}a^2 \\ \text{Diagram 3: Circle with 2 external wavy lines and 2 internal wavy lines crossing} \rightarrow -\frac{a^2}{2} & \text{Diagram 4: Circle with 2 external wavy lines and 2 internal wavy lines forming a figure-eight} \rightarrow -\frac{a^2}{2} \end{array}$$



$$\text{の型の } O(R^{2m}) \text{ の項} \rightarrow -a^2 \quad (10)$$



$$\text{"} \rightarrow -\frac{2a^2}{m+1} \quad (11)$$

ただし, ここで  $\text{---}\text{---}\text{---}$  は  $\text{---}\text{---}\text{---}$  あるいは  $\text{---}\text{---}\text{---}$  のことと了解されたい。又, (10), (11) では  $\text{---}\text{---}\text{---}$  印を省略した。

一般的に,  $\{ \}$  に関する, 同じ仮定のもとに,  $O(R^{2m})$  の項は,  $t \rightarrow \infty$  で  $O(R^{2m} e^{-\frac{2a^2 t}{m+1}})$  となることかわかる。

なお, 等方性, Navier-Stokes, 非圧縮乱流では, 図形の対応は  $\frac{k_i}{k_j} \frac{q_j}{q_i} = D_{ij}(\vec{k}) \phi(k) \delta_{\vec{k}+\vec{q}}$ ,  $\text{---}\text{---}\text{---} = 0$ ,  $\frac{k_i}{k_j} \text{---}\text{---}\text{---} = -D_{ij}(\vec{k}) \delta_{\vec{k}-\vec{q}}$ ,  $D_{ij}(\vec{k}) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ ,  $k \equiv |\vec{k}|$  となり,

たとえば

$$\frac{k_i}{k_j} \text{---}\text{---}\text{---} \text{---}\text{---}\text{---} \text{---}\text{---}\text{---} = -\frac{2}{3} D_{ij}(\vec{k}) \times \left[ \text{Burgers eq. と同じ意味の} \right]$$

となる。

又, Burgers モデルで vertex のくりこみをするとその vertex の波数展開の一次の項はあり得ないのに対し, N-S ではあり得ることを附記しておく。

### §3 外力のある場合

$t \rightarrow \infty$ , あるいは定常での状態を問題とするには, 外力が必要である。 (1) 式に外力の項  $f_p$  を付加すると次式のようになる。

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -p^2 u_p - iR \sum' p u_q u_r + f_p$$

今、Edwards<sup>[4]</sup>に従って  $f_p$  が Gaussian の偶然外力であって、その相関が次のように与えられる特別の場合を考える。

$$\langle f_p(t) f_{p'}(t') \rangle = h_p \delta(p+p') \delta(t-t') \quad (12)$$

( $h_p$  は定数)

この時、 $u$  の確率分布函数  $P$  についての Liouville 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (V + D + Y)P = (X + Y)P \quad (13)$$

ここで

$$V = \sum_p \frac{\partial}{\partial u_p} p^2 u_p, \quad D = \sum_p h_p \frac{\partial}{\partial u_p} \frac{\partial}{\partial u_p}$$

$$Y = +R \sum_p \sum_{q,r} \left( \frac{+ip}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u_p} u_q u_r, \quad X = V + D$$

となる。これは、いわば、無限次元の Fokker-Planck 方程式である。(12) は強い制限ではある。現実的には、 $f$  は (1) 境界条件による制限を受け、(2) 速度場  $u$  に依存し、(3) 履歴効果もあるであろう。(2) の要因を取り入れるのが最も困難と思われる。) ここでは、“思考実験としてあり得る” (12) を考える。

さて (13) の解は

$$P = e^{(X+Y)t} P(0), \quad P(0) \text{ は初期分布.}$$

$$= \exp \left\{ \int_0^t Z(t') dt' \right\} e^{x^t} P(0)$$

$$\therefore Z(t) \equiv e^{tX} Y e^{-tX} = \left( \sum \frac{t^n}{n!} Y_n \right).$$

$$Y_n \equiv [X [X [\dots [X [X, Y]] \dots]] \quad , \quad [X, Y] = XY - YX$$

で与えられる。  $Z(t)$  は  $[\partial_p, u_q] = \partial_p u_q - u_q \partial_p = \delta_{p,q}$  を使  
 う，具体的に表現できる。

$$Y_n = \sum_p \sum_{q,r} \left[ \alpha_n \partial_p u_q u_r + \beta_n \partial_p \partial_q u_r + \gamma_n \partial_p \partial_r u_q + \delta_n \partial_p \partial_q \partial_r \right] R$$

$$\text{とて, } \alpha_{n+1} = (-p^2 + q^2 + r^2) \alpha_n$$

$$\beta_{n+1} = (-p^2 - q^2 + r^2) \beta_n + 2h(q) \alpha_n$$

$$\gamma_{n+1} = (-p^2 + q^2 - r^2) \gamma_n + 2h(r) \alpha_n$$

$$\delta_{n+1} = (-p^2 - q^2 - r^2) \delta_n + 2(h(r) \beta_n + h(q) \gamma_n)$$

より

$$h(q) \equiv h(q) = 0 \text{ かつ } h(r) \equiv h(r) = 0$$

$$2Z(t) = R \sum \sum \left[ M_u(t) \partial_p u_q u_r + A(t) \partial_p \partial_q u_r + B(t) \partial_p \partial_r u_q + C(t) \partial_p \partial_q \partial_r \right]$$

$$\therefore M_u(t) \equiv +ip e^{2qr t}$$

$$A(t) \equiv h(q) [e^{-2qr t} (1 - e^{-2qr t})] / q^2, \quad B(t) \equiv (A \text{ 中 } p \leftrightarrow q)$$

$$\dot{C}(t) = -(p^2 + q^2 + r^2) C(t) + 2(h(r) A(t) + h(q) B(t)), \quad C(0) = 0.$$

又,  $e^{x^t} P(0)$  も具体的に表現できる。 (5)

§ 2 に類似の，図形による表現ができることは，いうまでもない。ただし，ここでは  $\overline{p \text{ --- } q}$  は  $\delta_{p+q} \phi(q) e^{-2q^2 t}$  に対応させるなどの違いはある。

なお， $R$  の 2 次以上で，みかけ上発散が起こる。(計算に間違いがなければ，/?)。これは，あくまで，みかけ上のことで，実際は各次数で cancel するものと予想される。

#### § 4 二，三の近似について

この節では，二，三の，興味あると思われる近似について，若干のコメントをしたい。

##### (A) くりこみ。consolidation

場の理論や，物性論における“くりこみ”に似たものである。順序としては，いきなり非線型の近似式にしないうでまず，線型近似の，性質を調べるのも，妥当であろう。

##### (1) 線型近似，はしご近似など

たとえば のような，はしご段型の図形だけを，全部加えたもの  $\Phi(a, t) \equiv \text{hatched rectangle}$  は次のように表わせる。

$$\text{hatched rectangle} = \text{---} + 4 R^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (14)$$

即ち，

$$\Phi(a, t) = \phi(a) + R^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (i\alpha_1 - i\alpha) e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} \phi(a-p) \Phi(a, t_2)$$

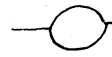
$$E \text{ に対し, } \alpha_1 = \alpha_2 = 2p(a-p)$$

又、たとえば  の型のみを加えると

$$\text{---} \otimes \text{---} = \text{---} + 8R^2 \text{---} \text{---} \text{---} \quad (15)$$

となる。(10)、(11) をみると、(14) のほうが、少なくとも、(15) より、 $t \rightarrow \infty$  では良い近似を与えそうである。

## (2) 高次のくりこみ。

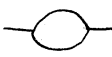
非線型を除外しなければ、更にたくさんの図形を、取り入れることができる。ここでは、一例を示めす。既約な骨格として  型だけに注目して、更に、その一部だけを、取り込んだのが次式である。

$$\text{---} = \text{---} + R^2 \left[ 4 \times \text{---} \otimes \text{---} + 8 \times \text{---} \otimes \text{---} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{即ち、} \quad \Phi(a, t) = & \Phi(a) + R^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int dp \left[ a^2 e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} \Phi(a, t_1) \Phi(a-p, t_2) \right. \\ & \left. + 2a(p-a) e^{\alpha_3 t_1 + \alpha_4 t_2} \Phi(p, t_1) \Phi(a, t_2) \right] \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \alpha_1 = \alpha_2 = 2p(a-p), \quad \alpha_3 = p(a-p), \quad \alpha_4 = a(p-a) \quad [6]$$

これは、いわゆる、0-4次 Cumulant 近似と同じ式である。

 型の全部を、取り入れてはいないこと、時間因子の入りが問題であること、に注意されたい。

$O(R^2)$  までは正確である。

## (B) その他

$R$ -展開の収束半径の有無,  $\text{pade}$  近似にも興味をもたれる。なお, §3 の定常問題の  $R$ -展開で  $O(R^2)$  まで, として,  $\text{pade}$  近似と一種のくりこみを用いると, Edwards と良く似た結果がでる,  $(k^{-5/2})$ 。これを附記しておく。( [4] の記号で  $g_k = (h_k + \mathcal{S}_k) / (\nu k^2 + R_k)$  として  $O(R^2)$  まで同一になるように,  $\mathcal{S} \leftrightarrow \text{---}\bigcirc\text{---}$ ,  $R \leftrightarrow \text{---}\bigcirc\text{---}$  に対応させる。)

[7]

§2, §3 の方法は Hopf 方程式や Novikov 方程式にも同様に適用できる。特性汎函数  $P(s)$  の  $R$ -展開から, その Cumulant  $\Phi(s) \equiv \ln P(s)$  を近似する方法も考えられる。

以上 (A)(B) の方法は, 勿論, それ自体では, なんの正当性も主張しうるものではない。ただ, 多くの近似が, 図形的には, 何らかの意味で  $\text{---}\bigcirc\text{---}$  型で解釈されるのは, おもしろい。

[8]

## §5. 比較, その他

[4]

[3]

(1) §2, §3 の方法は他の方法 (E) Edwards, (W) Wyld, (D) Deissler [9] ) に比べて, 若干の利点がある。まず, 「初期値問題を具体的に計算するのに簡単か?」という点で,

(E), (W) よりも良い, と思われる。(W) は初期に正規分布でない, 特に, まずいと思われる。 $\bar{u}$  については重ね合わせがまかない。それに反して,  $P(u)$  については重ね合わせがまかくことに注意されたい。又, (D) では図形表現による, 単純化, 外力のある場合の定式化がなされていない, という点で, §2, §3 の方法は (D) より良いと思われる。欠点としては, §3 で少なくともみかけ上の, 発散を招いていること, 時間因子の対称化がされていないこと, が挙げられる。

(2) このでの問題は, 量子論での散乱問題や, 物性論における有限温度の問題と類似の一面をもつ。しかし, 類似は完全ではない。詳細は省略する。不変性, 対称性等の要求を最大限, 利用することも必要である<sup>[1]</sup>。

(3) 最後に, このでの Burgers モデルは, 一般的非線型, 開放, 不可逆系の一つの典型的な, 「純数学的モデル」としての位置づけもあり得ることを, 附記しておきたい。

(その意味では, 一般的に侵えり, 近似技術の開発も望まれる。) 決定論的 "力" と確率論的 "力" の素性や, 決定系における "でたらめ" のおいたち, などに興味をもたれる。

#### Reference

- [1] Ohji, M. 数理研講究録 185 .p112 (1973)

- R.H.Kraichnan, Symp.Dynamics of Fluids and Plasmas.  
Acad.Press, 239 (1967)
- [2] J.B.Morton and S.Corrson, J.Stat.Phys.2 153 (1970)
- [3] H.W.Wyld, Jr.Ann.Phys. (N.Y.) 14, 143 (1961)
- [4] S.F.Edwards, J.F.M. 18, 239 (1964)
- [5] Ming Chen Wang and G.E.Uhlenbeck Noise and Stochastic Processes,ed.by N.Wax,Dover Publications, 113 (1954)
- [6] T.Tatsumi and S.Kida, 数理研講究録 185, 79, (1973)
- [7] K.Yamamoto,T.Nakamura and I.Hosokawa,  
数理研講究録 171, 8, (1973)
- [8] R.Phythian, J.Phys. A2,181 (1969)  
P.C.Martin,E.D.Siggia and H.A.Rose, Phys.Rev. A8,423 (1973)  
D.C.Leslie, Developements in the theory<sup>of</sup> turbulence.  
Clarendon Press, (1973)
- [9] R.G.Deissler, Phys.Fluids, 1,111, (1958)  
R.G.Deissler, Phys.Fluids, 3,176, (1960)