

中心極限定理から見た保存系のカオス

— Central limit theorem and kinetic properties of conservative systems —

日本大学 理工学部・量子科学研究所 島田 一平¹

一般的な保存系のカオスは散逸系のそれとはかなり違う。多くの散逸系のカオスでは力学量のゆらぎは中心極限定理にしたがう。これに対して、一般的な保存系のカオスでは中心極限定理は成り立たず、ゆらぎのスケーリング極限は Lévy の安定分布にしたがう。量子古典対応を考える際に、一般的な古典系のカオスのこのような特徴は、どのような効果をもたらすのだろうか。

1 はじめに

何らかの偶然的要因により結果が変動してしまう状況で真の値を推定する方法として、くりかえし観測をし、結果の集まりから標本平均を算出するという事が行なわれる。標本平均が真の値に収束する速さを見積もるために、標本平均と真の値の差を標本数でスケールした量

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}-1}} \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - m \right) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - mN}{N^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (1)$$

を考えると、指数 $\alpha < 2$ の時この量はゼロに収束し $\alpha = 2$ の時ガウス分布するようになる。広い範囲の偶然量に共通したこの性質を中心極限定理という。決定論的カオスがランダムさを持つという時のニュアンスとして、カオスの観測量が中心極限定理を満たすだろうという予想がある。

Ya. G. Sinai [1] は負定曲率リーマン多様体上の測地線流れについて、中心極限定理が成り立つ事を示した。負定曲率リーマン多様体上の測地線流れは双曲的で不安定な保存力学系 (C-System) である。Hénon 写像を含む、必ずしも双曲的ではない散逸系のカオスに対しても、中心極限定理の成立する事を、数値的に確認することができる。ところで、一般の保存力学系の等エネルギー面は複数のエルゴード成分からなり、それらは、1. 多重周期軌道からなるもの、2. ”カオスの海” とよばれる非周期軌道からなるもの、に分類されている。このような系のカオス的エルゴード成分は、上に述べた双曲的な保存系や散逸系のカオスとは異なる性質を持つ事が指摘されている [2]。たとえば、リヤプーノフ指数の収束が遅いこと、リヤプーノフ指数は限りなくゼロに近い値をとる場合があること、力学量の時間相関が巾的な減衰をすること、等々。

本研究では、一般的な保存系のカオス的なエルゴード成分について、中心極限定理が成立するか否かを調べる。例として、複数のエルゴード成分が共存しているという意味で一般的であり、かつ、できるだけ単純なモデルとして standard map をとりあげる。

¹ E-mail: ippei@sakura.email.ne.jp

2 結果

standard map は 2 次元トーラス上の写像 T ;

$$(p, \theta) \xrightarrow{T} \left(p - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta, \theta + p - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta\right), \pmod{1} \quad (2)$$

で、この写像 T のもとで不変な測度 μ を

$$d\mu = dp d\theta \quad (3)$$

なる $p - \theta$ 平面の面積とする。パラメーター K の値は $K = 1.2$ とする。パラメータのこの値では last KAM トーラスは崩壊しており、位相空間はカオス的なエルゴード成分によって運動量 p の方向に大域的に連結されている。また、すべての accelerator モードは不安定になっている。力学変数として運動量 f

$$(p, \theta) \xrightarrow{f} p \quad (4)$$

を考え、 $\bar{\mu}$ を不変測度 μ のカオス的エルゴード成分への制限とすると、中心極限定理が成り立つならば、

$$\bar{\mu} \left\{ x \left| \frac{\sum_{t=1}^N f(T^t x) - mN}{\sigma\sqrt{N}} < y \right. \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (5)$$

なる極限分布（分布密度はガウス分布）へ収束することになる。計算機をもちいたサンプリング（図 1）により、この分布をしらべたところ、 N の増大とともに分布の幅は広がりつづけ、一定の極限分布には収束しないことがわかった。そこで、次に、スケーリング指数 α を $\alpha = 1.8$ とし、

$$F(y) = \bar{\mu} \left\{ x \left| \frac{\sum_{t=1}^N f(T^t x) - mN}{N^{\frac{1}{\alpha}}} < y \right. \right\} \quad (6)$$

なる分布 $F(y)$ をしらべ、結果を図 2 に示した。 N の増大とともに一定の分布に収束していったことがわかる。分布のテール $F(-y)$, ($y < 0$) と $1 - F(y)$, ($y > 0$) は $\sim |y|^{-\alpha}$, ($|y| \gg 1$) なる巾的な減衰を示していて、極限分布 $G(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y)$ は

$$G(y) = \int_{-\infty}^y \rho(x) dx \quad (7)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-c|k|^{\alpha}) \exp(ikx) dk \quad (8)$$

なる Lévy の安定分布にはほかならない。この事は Kolmogorov 検定により確認してある。

3 まとめ

standard map という典型的な保存系のカオスに対して、中心極限定理が破綻していること、そして、力学量のゆらぎのスケーリング極限が指数 $\alpha = 1.8$ の安定分布にしたがう事が明確になった。もちろん、数値計算を用いたサンプリングに基づく結果ではあるが、同様の計算を Hénon 写像で行なえばガウス分布密度が確認されるのであり、両者の間には数値的に区別できる差異が存

在する、ということである。指数 $\alpha = 1.8$ の安定分布の性質として、ゆらぎの 1 次モーメントは収束するが 2 次モーメントは発散する。この事は力学量のゆらぎの統計的振舞に対して、ガウス分布密度が成り立つノーマルな場合の常識が通用しない事を意味する。関連した疑問として、以下の事を挙げておく。

- 輸送係数を決める相関関数は本質的に 2 次モーメントと関連している。観測時間が有限である事との兼ね合いを注意深く解析する必要がある。
- 自由度が大きくなると、このようなゆらぎのアブノーマルな性質は回復していくのであろうか。
- 量子古典対応の問題を考える際に、古典系のエルゴード成分のこのような性質が量子系にどのような効果をもたらすのだろうか。

最後に、この数値計算は保存力学系に関する私の初めての労作である。これまで経験してきた散逸系とは全く違うという印象を強烈に持った。

本研究はその一部を、文部科学省私立大学学術高度化推進事業、日本大学・学術フロンティア推進事業、「認知・記憶・行動の脳内メカニズム」の援助によっている。

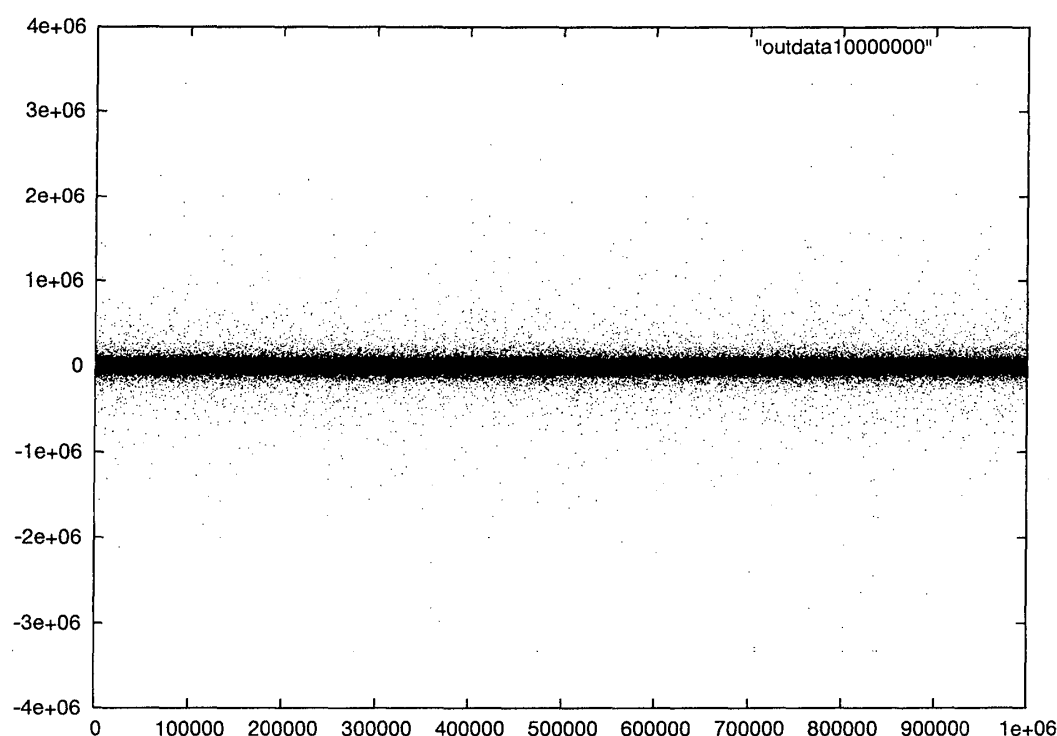


図 1: 運動量 P_t の標本和 $PS_t \equiv \sum_{s=N(t-1)+1}^{Nt} (P_s - \langle P \rangle)$ の時系列 $\{PS_t\}_{t=1 \sim 1000000}$ 。ただし、 $N = 10000000$ である。ゆらぎは統計的に定常であることがわかる。また、大きなゆらぎが起きている事がわかる。

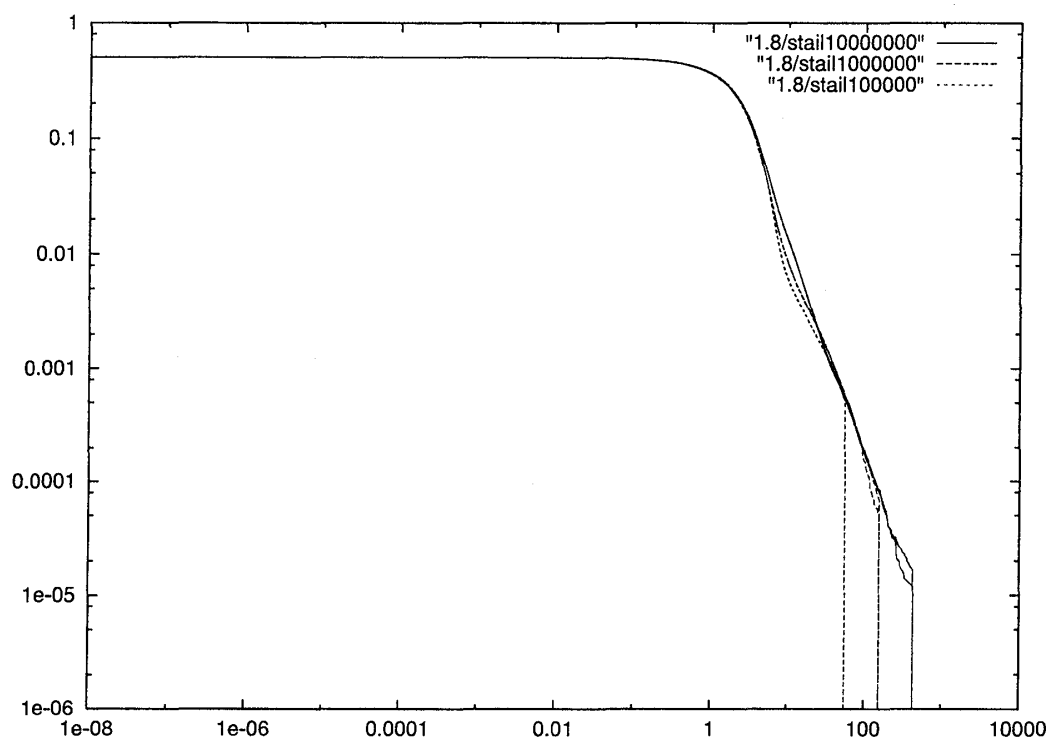


図 2: スケールされた運動量の和 $\frac{\sum_{s=N(t-1)+1}^{Nt} (P_s - \langle P \rangle)}{N^{1/\alpha}}$ の分布 $F(y)$ 。スケール指数は $\alpha = 1.8$ 。図には $F(-y), (y < 0)$ と $1 - F(y), (y > 0)$ の二つのグラフが、 $N = 100000, 1000000, 10000000$ の場合について、それぞれ描かれている。サンプル数は 1000000 。 N が増大するにつれ、分布は収束していく。分布のテールは $\sim |y|^{-\alpha}, (|y| \gg 1)$ なるべき的な減衰を示す。

参考文献

- [1] Ya. G. Sinai, Dokl. Akad. Nauk SSSR. **133-6** (1960), 1303.
- [2] Y. Kikuchi and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **84-4** (1990), 563.
R. Ishizaki, S. Kuroki, H. Tominaga, N. Mori and H. Mori, Prog. Theor. Phys. **109-2** (2003), 169.