

$V(n)$ について

高大理

戸田 宏

Spectrum $V(n)$ については, Topology 10 (1971) pp. 53-65 に, その存在について若干の結果をのべた. またその attaching map としてえられる写像 ~~(ホモトピー)~~ (ホモトピー-類) α, β, γ 等の性質については高大理の最近号に議論したところである. β から定義される β -series $\{\beta_t \in {}^p\pi_{(t+p-t-1)q-2}\}$ が $p \geq 5$ で 0 でないことは, L. Smith によって証明されている.

以上のような背景の下に, 現在持っている話題としては次のようなものがある.

- (i) γ -series について, 特に $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$.
- (ii) $V(n)$ を利用して, 五面体のホモトピー-群の p -成分 ${}^p\pi_*$ を決定すること. 特に (i) の結果が本質的な役割を果たして $* \leq 2p^2q$ 付近まで求めることができる.
- (iii) $V(n)$ に似た spectrum.

今回は主として (iii) の話題についてのべる

$V(n)$ は

$$H^*(V(n), \mathbb{Z}_p) = \wedge(Q_0, Q_1, \dots, Q_n), \quad Q_{i+1} = [p^{p^i}, Q_i]$$

で規定されるものであるが、その存在は $V(1)$ については $p \geq 3$ のとき、 $V(2)$ については $p \geq 5$ 、 $V(3)$ については $p \geq 7$ のときに保証されている。また $p=3$ のときには $V(2)$ は存在せず、 $p=5$ のときは $V(3)$ は多分存在しているであろうと思われる。この $p=3$ のときの $V(2)$ の非存在性は β -series が $p=3$ で定義出来ず L. Smith の結果が適用されないこととして現われると共に、(ii) のように $V(n)$ より $p\pi$ を逆算することにも障碍となつてゐる。そこで $p=3$ のときに $V(2)$ に代るべきものを考えようというのが (iii) の趣意である。

一般に $V(n)$ の特徴として、その ~~ホモトピー~~ ホモトピーあるいはホモトピーが共に比較的簡単であることが挙げられる。たとえば $p \geq 5$, $\deg < p^2q - 3$ ($q = 2p-2$) のとき

$$\pi_*(V(n)) = \{1, h_0, h_1, g_0, g_1, k_0, h_0\} \otimes \mathbb{Z}_p[\beta_1]$$

となる。ここで $\mathbb{Z}_p[\beta_1]$ の項を消去出来ればホモトピー群は更に簡単となる。これは次の様にして実行される。

$$B = S^0 \cup_{\beta_1} p\mathbb{Z}-1$$

80

を β_1 の写像錐とし, $VB(2) = B \wedge V(2)$ とおけば

$$\Sigma^{p\ell-2} V(2) \xrightarrow{\beta_1 \wedge 1} V(2) \longrightarrow VB(2)$$

なる cofiberling の誘導する完全系列

$$\cdots \rightarrow \pi_{*-p\ell+2}(V(2)) \xrightarrow{(\beta_1 \wedge 1)_*} \pi_*(V(2)) \rightarrow \pi_*(VB(2)) \rightarrow \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{において, } (\beta_1 \wedge 1)_*(\xi) &= (\beta_1 \wedge 1) \circ (1 \wedge \xi) = \beta_1 \wedge \xi \\ &= (1 \wedge \xi) \circ (\beta_1 \wedge 1) = \xi \circ \beta_1 \quad \text{すなわち } (\beta_1 \wedge 1)_* = \beta_1^* \end{aligned}$$

となり, 上の $\pi_*(V(2))$ の構造から $\deg < p\ell-3$ のとき

$$\pi_*(VB(2)) = \{1, h_0, h_1, g_0, k_0, k_0 h_0\}$$

となり, H^* は多少複雑となるが, π_* は更に簡単となる. このようことは $VB(3) = B \wedge V(3)$ ($p \geq 7$) でも考えられ この $VB(3)$ のホモトピー-群がわかれば, これから $VB(2), VB(1), VB(0), B, S^0$ の順にホモトピー-群をしらべていくことによって, 球面のホモトピー-群への一つのアプローチが与えられる. $\pi_*(B)$ は $\pi_*(S^0)$ の既知の部分から計算しても, α -series (= 既知部分を除くと可成り簡単であり, また β -series に関する構造は特異なものがある.

さて、今回の第1目標は $(VB(1) = B \wedge V(1))$

定理 $p=3$ のとき次のような $VB(2)$ が存在する

$$(i) \quad H^*(VB(2); \mathbb{Z}_p) = H^*(B; \mathbb{Z}_p) \otimes \wedge(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$$

(ii) cofiber $\Sigma^{16} VB(1) \rightarrow VB(1) \rightarrow VB(2)$ が
ある。

$p=5$ についても同様の性質をもつ $VB(3)$ が存在
する。」

証明の前は次のことを注意する。

(a) $V(1\frac{1}{4})$ が存在する。

(b) B は multiplication をもつ。

実際、(a) については $V(1\frac{1}{2})$ の存在が知られておきの
その skeleton として $V(1\frac{1}{4})$ がえられ、それはある字係

$$\beta_0: S^{16} \rightarrow V(1)$$

の字係鎖である。

次に (b) については、multiplication $\mu: B \wedge B \rightarrow B$
の存在に対する障害は $B \wedge B$ の top cell e^{22} の attaching
map $\alpha_{e^{22}} \in \pi_{21}(B \wedge S^0 \vee S^0 \wedge B)$ の μ による像である。
 μ の誘導する $\bar{\mu}: B \wedge B / S^0 \wedge S^0 \rightarrow B / S^0$ で考えれば
この障害は 0 であることは、一般の偶数-stem の元々の字
係鎖 によって成立することである。従って障害は $\pi_{21}(S^0)$
よりの像となる。 $\pi_{21}(S^0)$ の 3-成分は 0 であるから、 $\alpha_{e^{22}}$

が 3-成分にあること, 故に $q(\partial e_{22}) = 0$ であることが分かります. $3\beta_1 = 0$ より, top cell の degree が 3 である字族 $S^{11} \rightarrow B$ がある. その約化 $S^{22} \rightarrow B \wedge B$ を考えるとその degree は 9 である. これは $q(\partial e_{22}) = 0$ であることより (b) は証明された.

さて $p = 3$ のとき $V(1)$ は multiplication をもたないが

(c) $VB(1) = B \wedge V(1)$ は multiplication をもつ.

これはつぎの (c') からえられる.

(c') multiplication $V(1) \wedge V(1) \xrightarrow{\mu'} VB(1)$ がある.

$V(1) \wedge V(1) = (V(1) \wedge S^0 \cup S^0 \wedge V(1)) \cup e^2 \cup e_1^6 \cup e_2^6 \cup e_1^9 \cup e_2^9 \cup e^{10} \cup e_1^{11} \cup e_2^{11} \cup e^{12}$ であるから, μ' の存在に対する障害物は $\pi_k(VB(1))$, $k = 1, 5, 6, 9, 10, 11$ にある. 一方 $\deg < 16$ では前の $\pi_k(VB(2))$ ($p \geq 5$) のときと同様に

$$\pi_*(VB(1)) = \{1, h_0, h_1\} \quad \deg h_0 = 3, \deg h_1 = 11$$

が成り立つ. 故に唯一の障害物は h_1 であるが, h_1 が β^3 で detect されることから, μ' が存在しなければ

$V(1) \wedge V(1)$ において $\beta^3 \neq 0$ となる. これは Cartan 公式に反する. よって (c') が証明された. (c) は次のように場合分けを要しない.

$$\begin{aligned} VB(1) \wedge VB(1) &\xrightarrow{(\wedge T \wedge)} B \wedge B \wedge V(1) \wedge V(1) \xrightarrow{\mu_B \wedge \mu} B \wedge B \wedge V(1) \\ &\xrightarrow{\mu_B \wedge 1} B \wedge V(1) = VB(1) \end{aligned}$$

最後に、定理の $VB(2)$ は次の合成の写像として得られる。

$$S^{16} \wedge VB(1) \xrightarrow{\beta_0 \wedge 1} V(1) \wedge VB(1) \subset VB(1) \wedge VB(1) \xrightarrow{\mu} VB(1)$$

定理の性質は容易にたしかめられる。

$p=5$ のときは、 $(a) \in V(2\frac{1}{5})$ の存在に、 $\beta_0 \in \delta_0: S^{248} \rightarrow V(2)$ におきかえる。また $(c), (c')$ では $VB(1), V(1)$ をそれぞれ $VB(2), V(2)$ におきかえる。このとき μ' の存在に対する障害が 0 であることは、単に前述の $\pi_*(VB(2))$ の結果において degree をしるべきことに気づく。

定理が証明された後は、 $VB(2)$ (または $VB(3)$) をどのように利用するかということがあるが、一つは前述のベタホモトピー群の計算である。これには $\pi_*(VB(1))$ を高次元で計算するため Adams のスเปクトル系列の d_2 をうまく求める方法が必要である。もう一つは $p=3$ において存在しなかった β -series に代るものとして、次のような $\bar{\beta}$ -series をしるべきことが面白い。定理の cofiber を

$$\bar{\beta}: \Sigma^{16} VB(1) \rightarrow VB(1)$$

と置き、 $\bar{\beta}_t \in \pi_{16t-6}(B)$ を次の合成で定義する

$$S^{16t} \hookrightarrow \Sigma^{16} VB(1) \xrightarrow{\bar{\beta}^t} VB(1) \xrightarrow{\text{proj.}} \Sigma^6 \beta = S^6 \cup_{\beta_1} e^{17}$$

こゝで、L. Smith の方法で次の予想が証明されることを期待したい。

予想 $\bar{\beta}_t \neq 0$. ($t \geq 2$).

階分面側ではあるが、直接 $\bar{\beta}_t \neq 0$ を $t=2, 3, 4$ でたしかめることができる。 $\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ はともに $\pi_*(S^0)$ からの像で、その原像として β_2, β_3 なる元を尋ねることができる。また $\bar{\beta}_4$ は $\pi_4(S^0)$ からの像ではなく、射影 $B \rightarrow S^1$ によって $\pm \Sigma \beta_i$ なる元へ写されるものである。

以上中途半端な報告であるが、 $p=3$ における β -series が、 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ までは精々で、 β_4 に関する次元では $\pi_4(S^0)$ の 3-成分が 0 であつて β_4 が定数し得る事情を他の側面からたしかめられたように思われる。