

Fuchs型偏微分方程式に
おけるFrobeniusの方法.

上智大 理工 田原秀敏.

複素領域における常微分方程式論の中で、最も基礎的なものといえは、正則解の存在に関する Cauchy の定理、及び、退化した場合の、確定特異点、不確定特異点の理論等であろう。これ等に対応する結果を、偏微分方程式論の中で捜してみると、正則解の存在に関しては、Cauchy-Kowalevsky の定理があるものの、退化した場合の、確定、不確定特異点の結果に対応するものは、あまり見あたらない。

しかし、常微分方程式の場合に展開された方法、議論は、かなり Natural はものが多く、見る視点を変えて考えると、そのまま偏微分の場合に迄 通用しうるものも 少なくない。

本稿では、確定特異点の場合に、その特異点のまわりでの局所解の構造について、常微分の場合とまったく同様の結果を、いわゆる“Fuchs 型偏微分方程式”の場合に導く。それによつて、常微分方程式も偏微分方程式も、確定特異点

の近傍での局所構造については、大差はないのだ、ということが理解されるであろう。

(なお、不確定特異点の場合については、本稿では、一切とり扱わない。今後に待たれたい。)

§§1. 問題と結果.

m 階の偏微分作用素 $P(t, x, D_t, D_x)$ (正則函数を係数):

$$P(t, x, D_t, D_x) = t^k D_t^m + P_1(t, x, D_x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots \\ + P_k(t, x, D_x) D_t^{m-k} + \dots + P_m(t, x, D_x)$$

で、次の条件を満たすものを考える. $(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$,

$$(A-i) \quad 0 \leq k \leq m$$

$$(A-ii) \quad \text{order } P_j(t, x, D_x) \leq j \quad 1 \leq j \leq m$$

$$(A-iii) \quad \text{order } P_j(0, x, D_x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

条件 (A-iii) より $P_j(0, x, D_x) = a_j(x)$ ($1 \leq j \leq k$) と書ける. この時,

P に対する決定方程式 $\mathcal{C}(\lambda, x)$ を、次で定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\lambda, x) &= \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+1) + a_1(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+2) + \dots \\ &\quad \dots + a_k(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) \\ &= (\lambda)(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) (\lambda-p_1(x)) \cdots (\lambda-p_k(x)). \end{aligned}$$

方程式 $\mathcal{C}(\lambda, x) = 0$ の根, $\lambda = 0, 1, \dots, m-k-1, p_1(x), \dots, p_k(x)$ を P の決定根と呼ぶ。

上の様は作用素を t に関し Weight $(m-k)$ の Fuchs 型偏微分作用素と呼ぶ. 詳しい性質については, Baouendi-Goulaouic (1), 田原 (2) (3) (4) を参照されたい. 特に P は $\{t=0\}$ 上に, 確定特異点をもつ事に注意されたい.

$\tilde{\mathcal{O}} = \{ \text{高々 } \{t=0\} \text{ にのみ特異点をもつ多価正則函数の芽の全体 (原点の近傍)} \}$

[問題] $P(t, x, D_t, D_x) : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ の構造を決定せよ.

[結果]. “ $P_i(0), P_i(0) - P_j(0) \notin \mathbb{Z}, (1 \leq i < j \leq k)$ ” を仮定すると

$$(i) \operatorname{Coker} P \cong 0.$$

$$(ii) \operatorname{Ker} P \cong \mathcal{O}^m$$

但し $\mathcal{O}$ は x のみの正則函数芽全体 (at 原点). 更に (ii) の同型は, 次で与えられる. つまり, 次の (a) ~ (c) を満たす様な正則函数 $K_1(t, x, y), \dots, K_m(t, x, y)$ が存在する.

(a) $K_j(t, x, y)$ は, 次の領域での多価正則函数である.

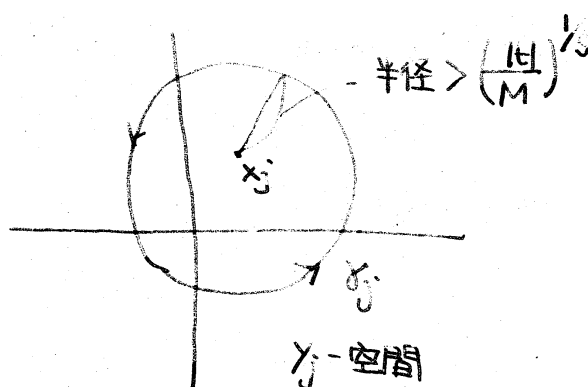
$$U = \{ (t, x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^n ; |t|, |x|, |y| < \varepsilon,$$

$$0 < |t| < M |x_i - y_i|^s \ (i=1, \dots, n), \text{ 但し } s = \min(m, k+1) \}$$

(i) 任意の $\varphi_j(x) \in \mathcal{O}$ に対して, $u(t, x)$ を次の様におく.

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m \int_{\partial x \cdot x \partial n} K_j(t, x, y) \varphi_j(y) dy.$$

但し積分は右図の様は
途にもって線積分を行
はう.



この時 $u \in \mathcal{Q}$ で、かつ $P(x, D_x)u(x) = 0$ が成立つ.

(2) 逆に、 $u \in \mathcal{Q}$, $Pu = 0$ はらば、適当な $(\varphi_j)_{j=1}^m \in \mathcal{Q}^m$ によつて (1) の積分の形にかける.

(3) (1) の表わし方は、一意的である.

この (1) ~ (3) より (ii) の同型は得られる. 今別の $H_j(x, y)$, $(1 \leq j \leq m)$ で (1) ~ (3) を満たすものをとるとする. この時、条件 (2) (3) より、任意の解 $u \in \mathcal{Q}$, $Pu = 0$ は、

$$u = \sum_{j=1}^m \oint K_j(x, y) \varphi_j(y) dy = \sum_{j=1}^m \oint H_j(x, y) \psi_j(y) dy$$

とかける.

この時、 (φ_j) と (ψ_j) とは、適当な微分作用素 (無限階) を成分とする可逆行列 $G(x, D_x)$ (K と H のみに依存) によつて、

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = G(x, D_x) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \quad \text{と表わされる.}$$

従つて、上の (1) ~ (3) をみたす $\{K_j\}$ を、 $\mathcal{Q}$ -解の基本系と呼んでさしつかえない. 基本系の標準的な構成法は、次の

様は Frobenius の方法の拡張した方法によって得られる。

(Frobenius の方法による具体的解の構成法)。

① 決定根 $\lambda = 0, 1, 2, \dots, m-k-1$ に対する解の構成。

これは定数だから、どんな方法でもよい。常微分方程式の場合の整数差が表われる場合の Frobenius の方法を適用しても良いし、或いは Baouendi-Goulaouic [1] の様に Cauchy 問題として考えても良い。後者の方法で述べると次の様になる。

$$K(t, x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(x, y) t^j$$

と Taylor 級数におく。作用素 $P(t, x, D_x, D_y)$ も Taylor 級数に展開して、 $P(t, x, D_x, D_y) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P^{(k)}(x, D_x, D_y)$ とおく。

今具体的に計算すると

$$\begin{aligned} & P(t, x, D_x, D_y) K(t, x, y) \\ &= [e(m-k, x) C_{m-k} - d_{m-k}] + [e(m-k+1, x) C_{m-k+1} - d_{m-k+1}] t \\ &+ \dots + [e(1, x) C_1 - d_1] t^{1-m+k} + \dots \end{aligned}$$

という級数が得られ、各 $d_\lambda(x, y)$ は $C_j(x, y)$ ($0 \leq j \leq \lambda-1$) のみに依存している。(当然 $C_j(x, y)$ の微分したものを含む。)

決定根 $P_i(0)$ に対する仮定より、各 $e(\lambda, x)$ ($\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \geq m-k$) は可逆故、 $P \cdot K = 0$ とはる様に、各 C_λ ($\lambda \geq m-k$) を

$$C_\lambda(x, y) = \frac{d_\lambda(x, y)}{e(\lambda, x)} \quad \text{と順次決めてゆける。自由に決め}$$

られるのは、 $C_0(x, y), \dots, C_{m-k-1}(x, y)$ である。そこで Cauchy

$$\text{データとして、} \begin{cases} C_v(x, y) = \delta_{vj} \delta(x-y) & 0 \leq v, j \leq m-k-1 \\ \delta(x-y) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \frac{1}{(x_1-y_1)} \times \cdots \times \frac{1}{(x_n-y_n)} \end{cases}$$

とおいたものを $K_j(t, x, y)$ ($0 \leq j \leq m-k-1$) とおく. この時 $K_j(t, x, y)$ は, 領域 U で 絶対収束する. ($t=0$ も含めて.) 収束性の証明は 田原 [2], [3] の matrix の Fuchs 系に関する Cauchy-Kowalevsky の定理を使えばよい.

② 決定根 $\lambda = \rho_i(x)$ に対する解の構成. ($1 \leq i \leq k$)

まず, 最初に $e(\rho_i(x) + \lambda; 0) \neq 0$, $\lambda \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ が成り立つ事に注意しておこう. この場合は常微分方程式論の Frobenius の方法といわれている考え方を運用する. つまり,

$$K(t, x, y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}(x, y) t^{\lambda+\ell}$$

という級数を考え, λ をパラメーターとして, とらえる事がある.

① の場合と同様に $P(t, x, D_t, D_x)$ を作用させて展開すると,

$$\begin{aligned} t^{m-k} P(t, x, D_t, D_x) K(t, x, y) \\ = e(\lambda, x) C_0(x, y) t^{\lambda} + [e(\lambda+1, x) C_1 - d_1] t^{\lambda+1} + \cdots \\ + \cdots + [e(\lambda+\ell, x) C_{\ell} - d_{\ell}] t^{\lambda+\ell} + \cdots \end{aligned}$$

と書ける. ここで d_{ℓ} は C_j ($0 \leq j \leq \ell-1$) のみに依存したもの (当然 C_j の微分は含む.) である. ここで, 各 $C_{\ell}(x, y)$ ($\ell \geq 1$) を λ の rational function として, ① と同じく,

$$C_{\ell}(x, y; \lambda) = d_{\ell}(x, y; \lambda) / e(\lambda+\ell, x) \quad \text{と決める.}$$

すると,

$$t^{m-k} P(t, x, D_t, D_x) K(t, x, y) = C(\lambda, x) C_0(x, y) t^\lambda$$

を得る。ここで、パラメータ λ に $\lambda = p(y)$ (注: x ではなく、 y -変数!!) を代入する。 $C(p(y) + \lambda, 0) \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 1$ だから $C_\lambda(x, y)$ は well defined である。更に $C_0(x, y) = \delta(x - y)$ とおく。この時、 $K(t, x, y)$ が、 $\mathcal{U}$ で収束する事は、①と同様 田原 [2] [3] の定理を使えばよい。要するに評価だけの問題である。

よって,

$$t^{m-k} P \cdot K = C(p(y); x) \delta(x - y) t^{p(y)}$$

を得る。今 $u(t, x) = \oint K(t, x, y) \varphi(y) dy$ とおく。この時,

$$\begin{aligned} t^{m-k} P u &= \oint (t^{m-k} P \cdot K)(t, x, y) \varphi(y) dy \\ &= \oint C(p(y); x) \delta(x - y) t^{p(y)} \varphi(y) dy \end{aligned}$$

ここで、次の事に注意しよう。 $x = y$ のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} C(p(y), x) &= (*) (p(x) - p(y)) \\ &= (*)_1 (x_1 - y_1) + (*)_2 (x_2 - y_2) + \dots + (*)_n (x_n - y_n) \end{aligned}$$

$(*)_*$ は holomorphic Function

従って、例えば $(*)_1 (x_1 - y_1)$ についてみると,

$$\oint (*)_1 (x_1 - y_1) \delta(x - y) t^{p(y)} \varphi(y) dy = 0$$

を得る。それは、 $\delta(x - y)$ の定義より、被積分項が y_1 に関し、 x_1 の近傍で正則とほり、Cauchy の公式より $= 0$ を得る次第で

ある. 故に $t^{m-k}Pu=0$. 即ち $Pu=0$ を得る. 確かに, $\mathcal{U}$ を構成した $K(x, y)$ は, 性質 (i) をみたしている.

以上によつて, 各決定根に対応する基本解を具体的に構成したが, それ等 m 個が, 解の基本系をなす. ($\Leftarrow$ これが常微分方程式の場合の自然な拡張になつてゐる.)

P_3 の中段から, ここ迄が, [問題] に対する我々の [結果] の陳述である.

なお, " $P_i(t), P_i(t) - P_j(t) \in \mathbb{Z}[t], 1 \leq i, j \leq k$ " の仮定のもとでも, 同様の結果が成り立つ. しかし, 標準的な基本系 (解) の構成方法は, まだ, 分らない. 形式的に, Frobenius の方法の拡張で基本解らしきものを構成できるが, 上の (i), (ii) の意味で基本系をなすかどうか, 証明できないでいる.

更に, 実際に整数差が表われる場合, 解の基本系の存在すら, 目下の所不明である.

§2. 常微分方程式論からの推論.

上の [結果] の証明の概略を述べる前に, 常微分方程式論の議論も, どの様に捕えてゐるのか, という事を少し説明して

おこつ。簡単のため、 $k=m$ で考える。

$$P(t, D_t) = t^m D_t^m + a_1(t) t^{m-1} D_t^{m-1} + \dots + a_m(t).$$

$t=0$ での決定方程式の根を $\rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbb{C}$. 更に $\rho_i - \rho_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) としておこつ。すると、§§1 の様に $\sum C_n t^{\lambda+n}$ ($\lambda = \rho$) と展開する事により、解の基本系 $\{u_j(t) = v_j(t) t^{\rho_j}\}_{1 \leq j \leq m}$ を得る。

$v_j(0) = 1$ とする。

所で方程式 $Pu = 0$ は、 $w^{(i)} = t D_t \cdot (t D_t - 1) \cdots (t D_t - i + 1) u$ ($1 \leq i \leq m$) により、次の様に行列表示できる。

$$(*) \left(t D_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -a_m(t), -a_{m-1}(t), \dots, -a_1(t) + m-1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \vdots \\ w^{(m)} \end{bmatrix} = 0.$$

今 $u_j = v_j(t) t^{\rho_j}$ について考えると、 $t D_t (t D_t - 1) \cdots (t D_t - i + 1) u_j(t) = (t D_t + \rho_j) (t D_t + \rho_j - 1) \cdots (t D_t + \rho_j - i + 1) v_j(t) \times t^{\rho_j}$ となる。故に、

$$\Lambda_i(\rho) = (t D_t + \rho) (t D_t + \rho - 1) \cdots (t D_t + \rho - i + 1)$$

とおくと、

$$(t D_t - A(t)) \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ \Lambda_1(\rho) v(t) \\ \Lambda_2(\rho) v(t) \\ \vdots \\ \Lambda_{m-1}(\rho) v(t) \end{bmatrix} \times t^{\rho} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{但し } A(t) \text{ は} \\ (*) \text{ の matrix} \\ \text{を意味する。} \end{array} \right)$$

解のベクトルを $w(t) t^{\rho}$ とおく。すると上の方程式は、

$$t \frac{d}{dt} w(t) \cdot t^{\rho} + \rho \cdot w(t) \cdot t^{\rho} - A(t) \cdot v(t) t^{\rho} = 0.$$

を意味する. 両辺を t^p で割ると次を得る.

$$(**) \quad t \cdot \frac{d}{dt} V(t) - A(t) V(t) = -P \cdot V(t) = V(t) (-P).$$

各 p_j に対して, 上の $V(t)$ を作って, $V_j(t)$ とおく. 縦ベクトルを並べて,

$$V = (V_1, \dots, V_m) = \begin{bmatrix} V_1(t) & \dots & V_m(t) \\ \Lambda_1(p_1)V_1(t) & & \Lambda_1(p_m)V_m(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{m-1}(p_1)V_1(t) & & \Lambda_{m-1}(p_m)V_m(t) \end{bmatrix}$$

はる行列を定義する.

$$V(0) = \begin{bmatrix} 1, & \dots, & 1, \\ p_1 & & p_m, \\ p_1(p_1-1), & & p_m(p_m-1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(p_1-1)\dots(p_1-m+1), & & p_m(p_m-1)\dots(p_m-m+1) \end{bmatrix}$$

$$\det V(0) = \prod_{i>j} (p_i - p_j)$$

従って, $p_i - p_j \neq 0$ ($i \neq j$) ならば, V は原点の近傍で可逆である. 更に $(**)$ より,

$$t \frac{d}{dt} V(t) - A(t) V(t) = V(t) \begin{bmatrix} -p_1 & & \\ & -p_2 & \\ & & \ddots \\ & & & -p_m \end{bmatrix}$$

を満たす.

ここで $V(t)$ を函数としてではなく, 0 階の微分作用素として考えてみる. すると $t \frac{d}{dt} V(t) = t D_t \cdot V(t) - V \cdot t D_t$ を得る. 従って,

$$(tD_t - A(t))V(t) = V(t) \cdot (tD_t + \begin{bmatrix} -p_1 & & \\ & -p_2 & \\ & & \ddots \\ & & & -p_m \end{bmatrix})$$

を得る。 $V(t)$ は可逆だから、結局、方程式 $(tD_t - A(t))u = 0$ は、 $(tD_t - p_j)w_j = 0$ の直和に変換されたことになる。

従って、 $\sum_k c_k t^{1+k}$ と展開して解の基本系を構成するというのは、兎は、上の様な簡単な方程式に変換する時の、変換行列を構成している事に他ならない。

以上の常微分方程式論と同様の考え方で、§§1 で構成した解の基本系を使って、うまく上の様な変換を行ない、その結果、 $(tD_t - p_i(t))u = 0$ なる形の方程式に、もってゆければ、 $\mathcal{Q}$ での構造は、すぐ得られる。つまり、 $\text{Coker}(tD_t - p_i(t)) = 0$ 、 $\text{Ker}(tD_t - p_i(t)) = \mathcal{Q}$ 、具体的には $u = g(t)t^{p_i(t)}$ だからである。従って、[結果] の証明の爲には、次の各段階も実行してゆけばよい。

[第1段]、 $\mathcal{Q}$ の作用環となる様な環の設定。（常微分では、 $V(t) \in GL(m, \mathcal{Q})$ 故、 $\mathcal{Q}$ か、それに当たる）

[第2段]、変換が実際に実現できることの証明、
以下、それ等について説明してゆこう。

§§3. 証明の概略.

簡単の為、ここでも $\ell = m$ として話を進める。この時 §§1 で構成した基本解は、 $K(t, x, y) = L(t, x, y) t^{P(y)}$ なる形をしており、 $L(t, x, y)$ は t に関しては、正則かつ、次の領域で正則となっている。

$$\{(t, x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n; |t|, |x|, |y| < \epsilon, |t| < M |x - y|^{-s} \quad i=1, \dots, n\}.$$

§§2 の推論を形式的に実行してみよう。

$$(3-1) \quad A(t, x, D_x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -P_m(t, x, D_x) & \dots & -P_1(t, x, D_x) + m - 1 & & \end{bmatrix}$$

$$V(t, x, y) = {}^t (L(t, x, y), \Lambda_1(P(y))L(t, x, y), \dots, \Lambda_{m-1}(P(y))L(t, x, y))$$

とおく。 $P \cdot K = e(P(y); x) \delta(x-y) t^{P(y)}$ より

$$(tD_t - A(t, x, D_x)) V(t, x, y) \cdot t^{P(y)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e(P(y); x) \delta(x-y) \end{bmatrix} t^{P(y)}.$$

右辺を $f(x, y) t^{P(y)}$ とおく。 §§1 より $\oint f(x, y) t^{P(y)} \varphi(y) dy = 0$ が、任意の $\varphi \in \mathcal{O}$ に對して成り立つ。 $t^{P(y)}$ で割ると

$$(3-2) \quad t \frac{\partial}{\partial t} V(t, x, y) + P(y) V(t, x, y) - A(t, x, D_x) V(t, x, y) = f(x, y)$$

故に、今 $V(t, x, y) = {}^t (V_1, \dots, V_m) \quad (\partial_x V = \frac{\partial}{\partial x} V \text{ のこと})$

とおくと、次の関係式が成り立つ。

$$(3-3) \quad (tD_t - A(t, x, y))V(t, x, y) = V(t, x, y) \left(tD_t - \begin{bmatrix} p_1(y) \\ \vdots \\ p_m(y) \end{bmatrix} \right) + (f_1, \dots, f_m).$$

この辺から常微分方程式と若干の相異が出てきた。§§1の解の具体的は積分表示をあわせ考えると、変換行列は $V(t, x, y)$ のものではなく、 $V(t, x, y)dy$ という積分作用素とすべきである。微分作用素を積分作用素として、Cohomological に定義できる事を思い出すと、次の様な環を導入するのが最も自然である。

$$U_{\varepsilon, M}^{(j)} = \{ (t, x, y); |t| + |x| + |y| < \varepsilon, |t| < M|x - y|^5, i \neq j \}$$

$$\hat{U}_{\varepsilon, M} = \bigcap_{j=1}^n U_{\varepsilon, M}^{(j)}$$

$$\hat{\mathcal{O}}(s) = \text{ind-lim}_{M \rightarrow 0} \left\{ \text{ind-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{O}(\hat{U}_{\varepsilon, M})}{\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{O}(U_{\varepsilon, M}^{(j)})} \right) \otimes dy \right\}$$

この $\hat{\mathcal{O}}(s)$ が ring structure をもち、かつ $\hat{\mathcal{O}}$ の Operation-ring とはる事は、 $U_{\varepsilon, M}$ etc の領域より明らか。但し、作用は、 $K_1 \cdot K_2 dy = (\oint K_1(t, x, w) K_2(t, w, y) dw) dy$, $K \phi = \oint K(t, x, y) \phi(y) dy$ によつて定義するのは、微分作用素の時と同様である。

ちなみに、§§1 で使った

$$\oint \mathcal{O}(p(y); x) \delta(x - y) t^{p(y)} \phi(y) dy = 0$$

という関係式は、 $\mathcal{O}(p(y); x) \delta(x - y) dy \equiv 0$ in $\hat{\mathcal{O}}(s)$ に由来している。

ここで、次の事に注意しよう.

$$(1) \quad f_j(x, y) dy \equiv 0 \quad \text{in } \hat{\mathcal{D}}(s)$$

$$(2) \quad A(t, x, D_x) \cdot (V(t, x, y) dy) = \left(\oint A(t, x, \partial_x) \delta(x-w) V(t, w, y) dw \right) dy \\ = (A(t, x, \partial_x) V(t, x, y)) dy.$$

(ここで、微分作用素 $A(t, x, D_x)$ は積分作用素として $A = A(t, x, \partial_x) \delta(x-y) dy$ と表わされる事を使って積・を計算してゐる. $\hat{\mathcal{D}}(s) \supset \mathcal{Q}$ に注意せよ.)

$$(1) \quad (V(t, x, y) dy) \cdot p(x) = (V(t, x, y) dy) \cdot (p(x) \delta(x-y) dy) \\ = (V(t, x, y) dy) \cdot (p(y) \delta(x-y) dy) \\ = \left(\oint V(t, x, w) p(y) \delta(w-y) dw \right) dy \\ = (p(y) \cdot V(t, x, y)) dy.$$

従って、(3-2)の両辺に dy を掛けて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中で考えると、(3-3)は次の様に書きかえられる.

$$(3-4) \quad (tD_t - A(t, x, D_x)) (V(t, x, y) dy) = (V(t, x, y) dy) \left(tD_t - \begin{bmatrix} p_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & p_m(x) \end{bmatrix} \right)$$

(但し積はすべて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中での意味!!).

§§2 の常微分の場合と類似の変換式を導びく事ができた. 残り、 $V(t, x, y) dy \in GL(m, \hat{\mathcal{D}}(s))$ なる事 $\& \&$ 可逆なる事を示せばよい.

$$V(t, x, y) dy \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & & \dots & 1 \\ p_1(x) & & & p_m(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1(x) \cdots (p_1(x)-m+1), & p_m(x) \cdots (p_m(x)-m+1) \end{bmatrix} \delta(x-y) dy.$$

故、 $V(t, x, y) dy|_{t=0}$ は $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の意味で、可逆である。 V の可逆性を示す為、逆行列を具体的に構成してしまおう。

今 $k=m$ としていた。 $P(t, x, D_t, D_x)$ の formal adjoint 作用素を $P^*(t, x, D_t, D_x)$ とおく。 この時、 P^* も Fuchs 型偏微分作用素となり、その決定方程式は、 $\mathcal{O}^*(\lambda, x) = \mathcal{O}(-\lambda-1, x)$ となる。 故に、 P^* に対しても、同様に Frobenius の方法 (§5.1 の方法) で、 m 個の解を構成できる。 それを使って、上と同様のプロセス を実行する事により、

$$(3-5) \quad (W(t, x, y) dy) (tD_t - A(t, x, D_x)) = (tD_t - \begin{bmatrix} P_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & P_m(x) \end{bmatrix}) (W(t, x, y) dy)$$

なる行列 $W(t, x, y) dy \in \mathcal{M}(m \times m, \hat{\mathcal{D}}(s))$ を構成できる。

$P_1(0)$ に関する条件より $W(t, x, y) dy|_{t=0} \in GL(m, \hat{\mathcal{D}}(s))$ も同様である。正規化して、 $(V|_{t=0})(W|_{t=0}) = 1$ としておく。

この時、 $V \cdot W = W \cdot V = 1$ ($\equiv \delta(x-y) dy$) が $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の積の意味で成り立つ。それは、次の様にして示される。

(3-4), (3-5) より

$$(3-6) \quad \begin{cases} (tD_t - A(t, x, D_x)) (V \cdot W) = (V \cdot W) (tD_t - A(t, x, D_x)) \\ (tD_t - A^0(x)) (WV) = (W \cdot V) (tD_t - A^0(x)) \end{cases}$$

$$(A^0 = \begin{bmatrix} P_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & P_m(x) \end{bmatrix} \text{ とおく。})$$

が成り立つ。更に $VW|_{t=0} = WV|_{t=0} = 1$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$ 。

t に関する Taylor 展開で各 t^k の係数を比較する事により,
 (3-6) の方程式はともに, Cauchy データ によって一意的に
 決まることがわかる. $(V \cdot W)|_{t=0} = (W \cdot V)|_{t=0} = 1$ に注意する
 と, 実は, $V \cdot W = W \cdot V = 1$ in $GL(m, \mathcal{D}(0))$ の成り立つ
 ことが得られる. 故に V は可逆であり, (3-4) の変換が
 実現された. これが [オ2段] である.

以上によって, $k=m$ の場合の 証明をスケッチした. k が
 一般の場合も, 殆んど同様である.

参 考 文 献

- [1] Baouendi-Goulaouic; Cauchy Problems with Characteristic Initial
 Hypersurfaces; Comm. Pure. Appl. Math. 1973, 26 455-475.
- [2] 田原; Fuchs 双曲型方程式の研究: 東京大学修士論文
- [3] 田原; Fuchs 双曲型方程式; 数理研講究録 Vol 248,
 「超函数と線型微分方程式 IV」, 1975, 19-57.
- [4] 田原; Fuchs 双曲型方程式の超函数解の構造; 数理研
 講究録に近刊の予定.