

# Zeroes of Recurrence Sequences and Visualization by Mathematica

日本大学大学院理工学研究科・日本大学理工学部

College of Science and Technology, Nihon University

木村桂馬, 一瀬陽雲, 田村響紀, 鷺尾勇介, 佐々木秀馬, 鷺尾夕紀子, 鈴木潔光, 利根川聡,  
西川貴雄, 古津博俊, 平田典子

Keima Kimura, Yakumo Hitose, Hibiki Tamura, Yusuke Washio, Shuma Sasaki,

Yukiko Washio, Kiyomitsu Suzuki, Satoshi Tonegawa,

Takao Nishikawa, Hirotooshi Furutsu and Noriko Hirata-Kohno

## 1 はじめに

数論, 特にディオファントス近似論の重要な命題である Skolem-Mahler-Lech の定理, 及び線形回帰数列に関連する問題に対して, 線形回帰数列のゼロ項の挙動を調べることが目的とした考究を述べる. 本稿では線形回帰数列のゼロ項の挙動の数学ソフトウェア Mathematica による可視化を試み, 研究・教育推進を意識した ICT 活用を実施した.

まず, 線形回帰数列 (Linear Recurrence Sequence = LRS と略記) の定義を述べよう. 本稿では簡単のため, 基礎体を有理数のなす体  $\mathbb{Q}$  に限る. 一般には有理数体の有限次拡大体である代数体, さらに標数 0 の体つまり複素数体や  $p$  進体等でも, Skolem-Mahler-Lech の定理は成立する [11][20]. 最近では情報数理の研究分野において, Skolem 問題と呼ばれるテーマも研究されている [4][5][9][15].

**定義 1 (線形回帰数列 (LRS))** 正整数  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Q}$  ( $c_k \neq 0$ ) を固定する. 数列  $\{u_n\}$  が**線形回帰数列 (LRS)** とは, 全てが 0 ではない初期値  $u_0, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{Q}$  が存在し,  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して, 線形の漸化式

$$u_{n+k} + c_1 u_{n+k-1} + \dots + c_{k-1} u_{n+1} + c_k u_n = 0$$

が成り立つこととする. このような  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  のうち最小正の数を, 線形回帰数列の**次数 (order)**, LRS の定義式に付随する**特性多項式 (characteristic polynomial)** を

$$f(X) = X^k + c_1 X^{k-1} + \dots + c_{k-1} X + c_k = \prod_{j=1}^k (X - w_j) \quad (1)$$

と定める.

本稿では特性多項式は重根なし,  $u_0, \dots, u_{k-1}$  及び (1) の係数は特に断らない限り, 全て整数と仮定する.  $k = 1$  のときは等比数列になるため, 主に  $k \geq 2$  の場合を扱う. 線形回帰数列の和・差・積が線形回帰数列になることは, 線形代数によって示される [11]. 商の場合は特定条件下 [10][22] で線形回帰数列になるが, その証明は定理 1 と同様, W. M. Schmidt の部分空間定理を用いる難しいものである.

## 2 Skolem-Mahler-Lech の定理

**定義 2 (非退化型・退化型)** 2 次以上の  $LRS \{u_n\}$  の特性多項式 (1) の根に対し、どの 2 根の比  $w_i/w_j (1 \leq i < j \leq k)$  も 1 の冪根ではない場合に、 $\{u_n\}$  は**非退化型 LRS**、そうでない場合に**退化型 LRS**という。

退化型は、ある  $n$  で  $w_i^n = w_j^n (1 \leq i < j \leq k)$  となる LRS を意味するため、特性多項式の根に 1 の冪根自体が複数あれば、退化型とみなせる。

**定義 3 (Zeroes もしくは Zero Multiplicity)** ゼロ項即ち  $u_n = 0$  になる添字集合を

$$Z\{u_n\} := \{n | u_n = 0\}$$

とおき、Zeroes もしくは Zero Multiplicity という。

以後、 $Z\{u_n\}$  に関して論ずる。

一般に**非退化型** LRS の  $Z\{u_n\}$  を決定することは、実は整数論の大きな未解決予想なのである。その理由は一般の Skolem-Mahler-Lech の定理の証明が **non-effective** 即ちゼロ項の添字を求める数学的な方法が存在しない状況だからである (effective とは有限時間内に有限回の操作で対象物を決定するアルゴリズムが存在することを指す)。

一般の場合の Skolem-Mahler-Lech の定理の証明は Schmidt の部分空間定理 [17] という、non-effective なディオファントス近似の大定理に本質的に負っている。このため、 $\#Z\{u_n\} < \infty$  が得られる非退化型の場合であっても、一般的に  $Z\{u_n\}$ 、即ちゼロ項の添字を求める問題は effective には解決されておらず、ゼロ項の添字を決め得るアルゴリズムは分かっていない [11][20]。

しかし特別な場合に限るならば、困難の回避が可能、即ち **effective** な結果 (明示的とは限らないが、理論的に計算可能な結果を指す) が得られる場合もある。例えば特性多項式が **dominant root を持つ場合**、つまり実根で絶対値が他根のそれよりも大きいものが 1 個、もしくは複素共役である 2 根で、絶対値が他根のそれよりも大きい根がある場合など、A. Baker の手法 [3] が適用できる場合は、ゼロ項の添字集合は effective に決定できることが知られる [16][18][20]。effective な場合とは、命題 1 の表示で  $u_n = 0$  とおいた式が 2 変数の単数方程式になる場合である [13][16, Theorem 3]。

さらに次数 2 の場合は [21] によるゼロ項の添字に関する明示的評価 (**effective よりも強い, explicit な結果**) がある。

また、いわゆる Skolem 問題とは、 $Z\{u_n\}$  が空集合であるかどうかを判定する問題である。たった 1 回でも項にゼロが登場する数列なのか否か、という問題であり、ゼロ項を完全に決定すれば解決される。しかし実は Skolem 問題であっても一般には NP 困難であることが 2022 年に示された [5]。effective でも計算量が多ければ、NP 困難とみなされるようである。

では Skolem-Mahler-Lech の定理を述べよう (いま定理 1 では  $\{u_n\} \subset \mathbb{Q}$  としている)。

**定理 1 (Skolem-Mahler-Lech の定理: 1935–2011)**  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$  を, 次数  $k \geq 2$  の線形回帰数列とする. このとき

$$M + N \leq \exp((6k)^{3k})$$

を満たす有限の  $M, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在して以下の主張が成立する.  $j = 1, \dots, N$  に対して初項  $x_j \in \mathbb{Z}$ , 公差  $0 \neq y_j \in \mathbb{Z}$  の添字の等差数列  $T_j = \{x_j + my_j | m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  つまり有限個の  $T_1, \dots, T_N$  と, 有限個の添字  $\ell_1, \dots, \ell_M \in \mathbb{Z}$  が存在し, ゼロ項の添字集合について

$$Z\{u_n\} = \{\ell_1, \dots, \ell_M\} \cup T_1 \cup \dots \cup T_N$$

が成り立つ. 特に  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  が非退化型 LRS ならば,  $Z\{u_n\} = \{\ell_1, \dots, \ell_M\}$  のみとなって

$$\#Z\{u_n\} \leq \exp((6k)^{3k}).$$

### 注意 1

- T. Skolem が  $K = \mathbb{Q}$  の定理 1 を証明し, K. Mahler が Skolem の定理を代数体に拡張した. 後に C. Lech が標数 0 の体への一般化を行った [11].
- Schmidt は非退化型の場合の  $Z\{u_n\}$  の個数の上界を  $k$  のみの関数で与えた. 2002 年に Schmidt の結果は J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei 及び Schmidt によって, より一般の場合に拡張され, なおかつ  $Z\{u_n\}$  の個数上界は改良された [14]. 2011 年に F. Amoroso-E. Viada がさらにこの上界を改良した [2]. 非退化型で  $k = 3$  の場合は, F. Beukers が  $\#Z\{u_n\} \leq 6$  を証明している [7]. また  $k = 2$  の LRS の場合, (1) の根が 1 の冪根では無いときに Beukers-Schlickewei により  $\#Z\{u_n\} \leq 61$  が証明された [8, Theorem 1.2]. 個数の上界だけでは一般にゼロ項の添字集合  $Z\{u_n\}$  は求まらないが,  $k = 2$  のときは 2 変数の単数方程式に帰着され, 前節に述べた通り Baker 法 [3] で  $Z\{u_n\}$  は effective に求まる.
- $Z\{u_n\}$  は非退化型の場合, 定理 1 よりゼロ項の添字  $n$  は有限個に限るが, dominant root を持つなど強い条件下の場合を除き, 添字  $n$  自体を求める方法は「存在しない」. しかし次数の低い場合に effective な結果が存在することは前節に述べた. 定理の証明は Schmidt の部分空間定理の応用であり [12] [14], 難しいディオファントス近似を用いる.

### 系 1

ゼロ項の添字  $n$  が等差数列を成す, つまりゼロ項が周期的に現れて無限個であるならば, 定理 1 の対偶より  $Z\{u_n\}$  は退化型である.

一般に LRS は次の形で表される. 証明は線形代数による [11].

### 命題 1

単根のみをもつ特性多項式で定まる LRS の一般項は,  $w_1, \dots, w_k$  をその単根とすると

$$u_n = b_1 w_1^n + b_2 w_2^n + \dots + b_k w_k^n \quad (2)$$

で与えられる. ここで  $b_1, \dots, b_k$  は初項と ( $k$  も併せ) 特性多項式で定まる定数である.

### 3 退化型 LRS の図示

Skolem-Mahler-Lech の定理より, ゼロ項の添字  $n$  が無限個ある場合は,  $Z\{u_n\}$  は退化型 LRS でなくてはならない. 退化型 LRS の挙動を観察する目的のもと, Mathematica 動画による考察を行った. J. Berstel-M. Mignotte による結果 [6] を参考に, 線形回帰数列  $\{u_n\}$  が退化する場合を主に考えた. 退化する LRS の例として特性多項式の根の比, もしくは根そのものに 1 の冪根を含む場合を人為的に作り, 数列の挙動を調べた.

添字  $n$  がグラフの横軸, 数列  $u_n$  の値がグラフの縦軸に記されている. オレンジ色の点がゼロ項, 青い点はゼロ項ではない点である. まず 1 の冪根のみを根にもつ場合を考える. 命題 1 より LRS の一般項は以下で与えられる:

$$u_n = b_1 w_1^n + b_2 w_2^n + \cdots + b_k w_k^n.$$

#### 3.1 Sequence SS24-3-1 • Sequence SS24-3-2

- Sequence SS24-3-1 (Fig. 1)

特性多項式:  $(x^4 + 1)(x^2 - 3x + 1)$ .

初項:  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = -1$ . 退化型.

- Sequence SS24-3-2 (Fig. 2)

特性多項式:  $(x^4 + 1)(x^2 - 3x + 1)$ .

初項:  $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -1, u_4 = 0, u_5 = 0$ . 退化型.

Sequence SS24-3-1 とは初項が異なる.

Fig 1 では Sequence SS24-3-1, Fig 2 では Sequence SS24-3-2 の例を図示した.

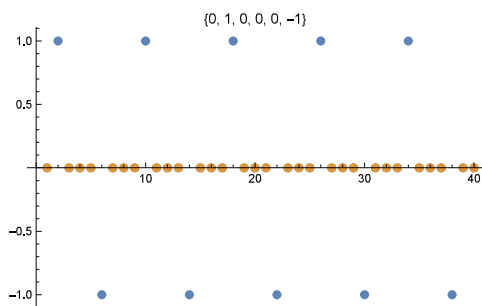


Fig: 1: Sequence SS24-3-1

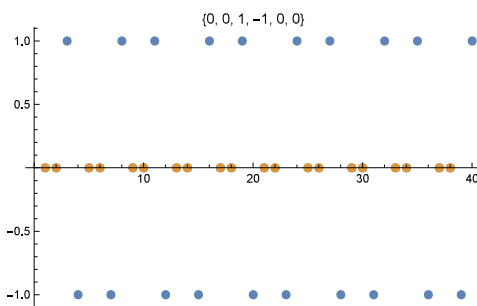


Fig: 2: Sequence SS24-3-2

$(x^4 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$  の根のうち  $x^4 + 1 = 0$  の根である 1 の 8 乗根の 4 つは, 4 乗や 8 乗後に  $\pm 1$  になってしまうので, この累乗の部分と  $x^2 - 3x + 1 = 0$  の根 (実根 2 個で絶対値は異なる) の累乗部分が, それぞれ subsequence を与えていることが分かる. 周期は同じであるが, 初項が変わると項のずれかたが異なることが読み取れる.

### 3.2 Sequence YH24-3 • Sequence YW24

- Sequence YH24-3 (Fig. 3)

特性多項式:  $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ .

初項:  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = 0, u_5 = 1, u_6 = 0, u_7 = -1, u_8 = 0, u_9 = 1$ . 退化型.

- Sequence YW24 (Fig. 4)

特性多項式:  $2x^4 - 3x^2 + 2$ .

初項:  $u_0 = -1, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0$ . 退化型.

1 の素数冪の冪根を根とする多項式 2 個の積の特性多項式を持つ, Sequence YH24-3 を Fig. 3 で図示した. また Sequence YW24 として, 1 の冪根ではなく代数的整数でも無い代数的数の根 4 個をもつが, 全ての根の絶対値が 1 という [1] 特別な多項式  $2x^4 - 3x^2 + 2$  が特性多項式になる LRS を考えた. 原点对称の 2 解の比が  $-1$  であることから, 退化型 LRS である Sequence YW24 のゼロ根の図示を Fig. 4 で行った.

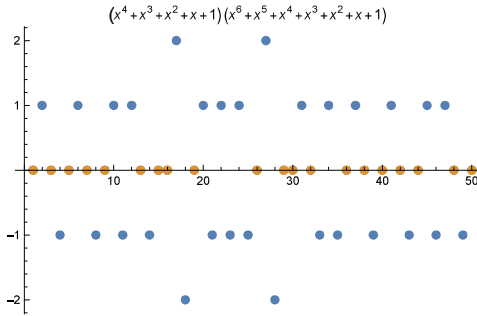


Fig. 3: Sequence YH24-3

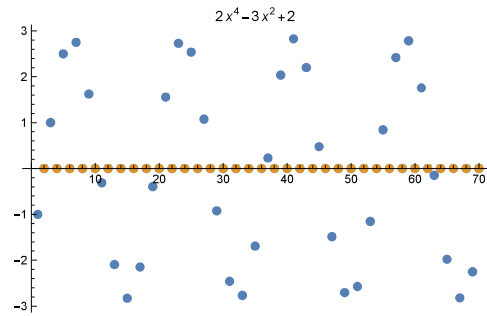


Fig. 4: Sequence YW24

2 種類の LRS の項の和の特性多項式は, 2 種類の特性多項式の積になるのであるが, Fig. 3 の Sequence YH24-3 の subsequence の値に  $1 + 1 = 2$  も現れていることが確認できて, 興味深い. Fig. 4 の Sequence YW24 では, 原点对称の 2 解の比が  $-1$  のため,  $2x^4 - 3x^2 + 2 = 0$  の解を  $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$  とおくと, 命題 1 より一般項は

$$b_1 \alpha^n + b_2 (-\alpha)^n + b_3 \beta^n + b_4 (-\beta)^n$$

となる. このため  $n$  が奇数のときと偶数のときにそれぞれ  $\alpha^n, \beta^n$  の同類項をまとめることができる. 例えば  $n = 3$  のときは  $\alpha^3(b_1 - b_2) + \beta^3(b_3 - b_4)$  となって, 次数 2 の LRS の挙動に類似する. 偶数のときも同様で, 例えば  $n = 4$  のときは  $\alpha^4(b_1 + b_2) + \beta^4(b_3 + b_4)$  となる. この状況が交互に現れることを Fig. 4 は示しており, 単数方程式の 2 変数の場合に帰着され,  $Z\{u_n\}$  は effective に求まる.

### 3.3 Sequence HT4 • Degenerated Berstel Sequence

- Sequence HT4 (Fig. 5)

特性多項式:  $(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)$ ,

初項:  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = -1, u_5 = 0$ . 退化型.

- Degenerated Berstel Sequence (Fig. 6)

特性多項式:  $(x^3 - 2x^2 + 4x - 4)(x^4 + 1)$ ,

初項:  $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 0, u_5 = 1, u_6 = 0$ . 退化型.

Sequence HT4は1の8乗根と1の3乗根との積の特性多項式をもち、互いに素である整数3と8の最小公倍数24がFig. 5にsubsequenceの周期として現れている.  $1+1+1=3$ も登場し、周期的である無限個のゼロ項をもつときの原理に従っている.

Degenerated Berstel Sequenceの特性多項式は、根が1の冪根になる $x^4 + 1$ つまり退化部分と、次節に述べる非退化型のBerstel Sequence (Fig. 7)を与える特性多項式 $x^3 - 2x^2 + 4x - 4$ との積の7次式である. 退化部分、即ち周期的にゼロ項が図示される部分と、6個のゼロ項を持つ非退化部分との和が見えるはずである. 図示すると (Fig. 6)のグラフの範囲にゼロ項が7個、 $u_1 = u_4 = u_6 = u_7 = u_{10} = u_{11} = u_{14} = 0$ として現れた (詳細は今後に考究予定).

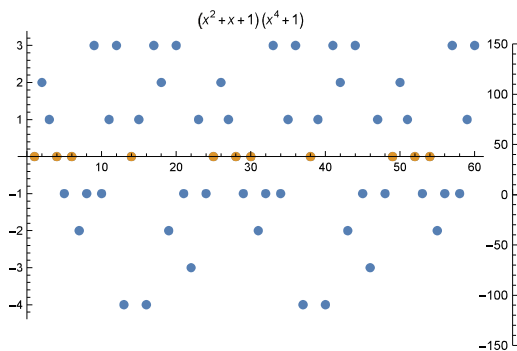


Fig. 5: Sequence HT4

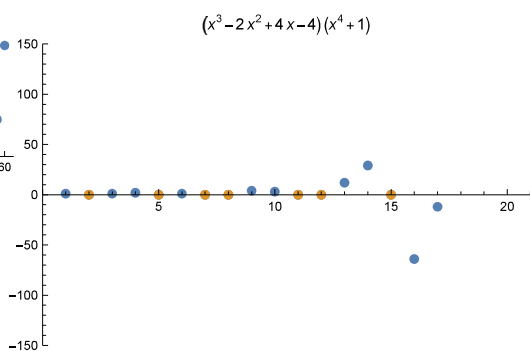


Fig. 6: Degenerated Berstel Sequence

## 4 非退化型 LRS の図示

### 4.1 Berstel Sequence • Reversed Berstel Sequence

- Berstel Sequence (Fig. 7)

特性多項式:  $x^3 - 2x^2 + 4x - 4$ , 初項  $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1$ . 非退化型.

- Reversed Berstel Sequence (Fig. 8)

特性多項式:  $x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ ,

初項  $u_0 = 0, u_1 = 103, u_2 = 47$ . 非退化型.

有名な非退化型 LRS である Berstel Sequence の特性多項式は  $x^3 - 2x^2 + 4x - 4$  で、そのゼロ項は  $u_0 = u_1 = u_4 = u_6 = u_{13} = u_{52} = 0$  の 6 項である．一般に 3 次の非退化型である整数の LRS は、ゼロ項を 6 個以下しか持たないことが Beukers により証明されている [7]．そして、以下に図示した Berstel Sequence 以外に 6 項ちょうどのゼロ項を持つ例としては、この数列と**同値**な反転と平行移動、つまり特性多項式として Berstel Sequence の相反方程式を平行移動して作った Reversed Berstel Sequence の例と同様の数列しか、現在も知られていない．

Fig. 7 及び Fig. 8 のどちらにも、ゼロが 6 箇所のみ存在し、オレンジ点であるゼロ項の添字位置は Fig. 7 と Fig. 8 で、左右反転になっている．

なお、Reversed Berstel Sequence においては、ちょうど Fig. 8 のゼロ項が Fig. 7 のゼロ項の左右反転になるように初項を逆算している．

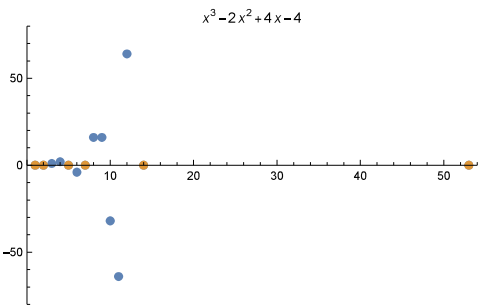


Fig. 7: Berstel Sequence

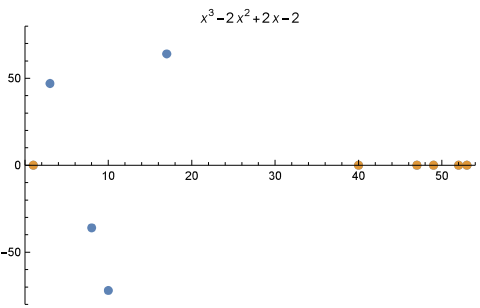


Fig. 8: Reversed Berstel Sequence

5    まとめと今後の展望

退化する場合のゼロ項の図示を数学ソフトウェア Mathematica で行い、特性多項式のそれぞれの部分に応じた項が現れることが確認された．今後も線形回帰数列の諸問題に関し予想を立て、検証することに対し、Mathematica などを効果的に用いたい．

6    グラフに現れるゼロ項の添字表

実際のゼロ項の添字表をここに付記する．

Mathematica では数列の添字が 1 から始まる．このことからグラフではゼロ項の添字が 1 ずれて見えるが、最初の項は  $u_0$  つまり数列の添字は 0 から始めるのが一般的であるため、下記の表では、その通常の一般的記法に従ってゼロ項の添字を並べた．

| 番号     | 初項                                   | ゼロ項の添字                                                                                                                       |
|--------|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Fig: 1 | $\{0, 1, 0, 0, 0, -1\}$              | $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, \dots\}$ |
| Fig: 2 | $\{0, 0, 1, -1, 0, 0\}$              | $\{0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37, \dots\}$                                        |
| Fig: 3 | $\{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1\}$ | $\{0, 2, 4, 6, 8, 12, 14, 15, 18, 25, 28, 29, 31, 35, 37, 39, 41, 43, 47, 49, \dots\}$                                       |
| Fig: 4 | $\{-1, 0, 1, 0\}$                    | $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 69, \dots\}$                                                                                    |
| Fig: 5 | $\{0, 2, 1, 0, -1, 0\}$              | $\{0, 3, 5, 13, 24, 27, 29, 37, 48, 51, 53, \dots\}$                                                                         |
| Fig: 6 | $\{1, 0, 1, 2, 0, 1, 0\}$            | $\{1, 4, 6, 7, 10, 11, 14, \dots\}$                                                                                          |
| Fig: 7 | $\{0, 0, 1\}$                        | $\{0, 1, 4, 6, 13, 52.\}$                                                                                                    |
| Fig: 8 | $\{0, 103, 47\}$                     | $\{0, 39, 46, 48, 51, 52.\}$                                                                                                 |

## 参考文献

- [1] F. Amoroso and R. Dvornicich, *A Lower Bound for the Height in Abelian Extensions*, J. Number Theory, **80** (2000), 260–272.
- [2] F. Amoroso and E. Viada, *On the zeros of linear recurrence sequences*, Acta Arithm., **147**, no. 4 (2011), 387–396.
- [3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, 1975, Cambridge Univ. Press.
- [4] P. Bell, J. -Ch. Delvenne, R. M. Jungers and V. D. Blondel, *The continuous Skolem-Pisot problem*, Theoretical Computer Science, **411** (2010), 3625–3634.
- [5] V. D. Blondel and N. Portier, *The presence of a zero in an integer linear recurrent sequence is NP-hard to decide*, Linear Algebra Appl. **351-352** (2002), 91–98.
- [6] J. Berstel, and M. Mignotte, *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France., **104** (1976), 175–184.
- [7] F. Beukers, *The zero-multiplicity of ternary recurrences*, Compositio Math., **77** (1991), 165–177.
- [8] F. Beukers and H. P. Schlickewei, *The equation  $x + y = 1$  in finitely generated groups*, Acta Arith., **78** (1996), 189–199.
- [9] Y. Bilu, F. Luca, J. Nieuwveld, J. Ouaknine, D. Purser and J. Worrell, *Skolem Meets Schanuel*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), **241** (2022), pp. 20:1-20:15.

- [10] P. Corvaja and U. Zannier, *Finiteness of integral values for the ratio of two linear recurrences, An overview of some recent progress*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 431–451.
- [11] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski and T. Ward, *Recurrence Sequences*, Math. Surveys and Monographs, **104**, 2003, American Math. Society.
- [12] J. -H. Evertse, *On sums of  $S$ -units and linear recurrences*, Compositio Math., **53** (1984), 225–244.
- [13] J. -H. Evertse and K. Györy, *Effective Results and Methods for Diophantine Equations over Finitely Generated Domains*, London Math. Soc. Lecture Note Series **475**, 2022, London Math. Society.
- [14] J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei and W. M. Schmidt, *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group*, Annals of Math., **155**, no. 3 (2002), 807–836.
- [15] R. J. Lipton, F. Luca, J. Nieuwveld, J. Ouaknine, D. Purser and J. Worrell, *On the Skolem problem and the Skolem conjecture*, Association for Computing Machinery, New York, [Article 5] (2022), 9 pp.
- [16] M. Mignotte, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *The distance between terms of an algebraic recurrence sequence*, J. Reine Angew. Math. **349** (1984), 63–76.
- [17] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximations*, Lecture Notes in Math. **785**, 1980, Springer.
- [18] Min Sha, *Effective results on the Skolem Problem for linear recurrence sequences*, J. Number Theory, **197** (2019), 228–249.
- [19] H. N. Shapiro, *On a theorem concerning exponential polynomials*, Comm. pure and appl. Math., **12** (1959), 487–500.
- [20] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge Tracts in Math., **87**, 1986, Cambridge Univ. Press.
- [21] Yusuke Washio and K. Kimura, *Explicit zero decision of binary recurrence sequences via  $p$ -adic argument*, submitted.
- [22] U. Zannier, *Diophantine equations with linear recurrences, An overview of some recent progress*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **17**, no. 1 (2005), 423–435.