

確率微分方程式の解の安定性.

名大 理数 宮原 孝夫

§ 1. 序

次の形の確率微分方程式

$$(1) \quad dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t)$$

で定められているようなシステムについて、そのシステムが global な意味で安定ということの 1 つの妥当と思われる定義を採用し、その定義の下で Liapunov の方法による安定性の議論がどのように可能かを調べるのが目的である。

deterministic なシステムについては安定性の概念はキチッと定義され多く議論されている。ランダムネスが入るとき、それに対応した形で定義を与えようとするとき、おとしエ夫が必要となる。そこで、たとえば、確率 1 ですべての path が安定であるとか、平均の意味で安定である等の言い方をしたり、あるいは recurrence property を安定性ということの指標にしようとしている。([3], [5], [6] 参照)。[3]では主に

$f(t,0) \equiv G(t,0) \equiv 0$ の仮定の下で原点への安定性を論じており、[5]では時間的に一様で退化していない場合について positive recurrent になる条件を論じている。我々としては、ノイズの入り方をあまり限定せずに、従って $G(t,0) \equiv 0$ とか、退化しないというような制限をとった広いクラスのシステムに於いて適用できるような議論をしたい。そのために、ここでは Zakai [4] による ultimate boundedness を安定性の定義として採用する (定義は §2.)。そして、§3, §4 において、リャプーノフの方法による定理を示す。又、§5 では ultimately bounded ならばある種の recurrence property を持っていることを示す。この事実は、global な意味での安定性の定義として ultimate boundedness を採用することの正当性の一つの保障を与えていると思われる。

なお、以下で述べることは [7] に含まれることであり、証明等省略した部分については [7] を参照していただきたい。

§2. 定義及び Lemma.

今後考えるシステムは常に次のような確率微分方程式によって決まるものとする。

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))W(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

$X(t)$, $f(t, x)$ は n -vector, $G(t, x)$ は $n \times m$ -matrix, $W(t)$

は m -dim standard Wiener process とする。そして、係数 $f(t, x)$ $G(t, x)$ は次の条件 (A_1) (A_2) を満たしているものとする。

$$(A_1) \quad |f(t, x)| + |G(t, x)| \leq c(1 + |x|)$$

$$(A_2) \quad |f(t, x) - f(t, y)| + |G(t, x) - G(t, y)| \leq c|x - y|.$$

すなわち、時間について一様に Lipschitz condition が満たされるものとする。このとき、初期値を与えたとき、(2.1) の解が定まる。それを一般に $X(t), 0 \leq t < \infty$ で示す。

定義 2.1. $p > 0$ とし、(2.1) によって決まる process $X(t)$ が p -th ultimately bounded であるとは、定数 K が存在して

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M_{t,x} |X(s)|^p \leq K, \text{ for } \forall (t, x) \in [0, \infty) \times R^n$$

となることである。 $M_{t,x}$ は $X(t) = x$ なる条件付平均値。

定義 2.2. 特に、exponentially p -th ultimately bounded であるとは、正の定数 K, c, α が存在して、任意の $(t, x) \in [0, \infty) \times R^n$ に対して $M_{t,x} |X(s)|^p \leq K + c|x|^p e^{-\alpha(s-t)}$ となること。

定義から次のことは明らか。

$$\text{exp. } p\text{-th ult. bdd} \Rightarrow p\text{-th ult. bdd}$$

$$(\text{exp.}) p\text{-th ult. bdd} \Rightarrow (\text{exp.}) p'\text{-th ult. bdd}, (p' \leq p).$$

定義 2.3. $X(t)$ が q -th ult. unbounded であるとは、定数 K が存在して、 $|x| \geq K$ のとき、 $\lim_{s \rightarrow \infty} M_{t,x} |X(s)|^q = \infty$ となること。

定義 2.4. 特に、exponentially q -th ult. unbounded である

るとは、^{正の}定数 k, c, α, k' が存在して、 $|x| \geq k$, $s \geq t$ のとき
 $M_{t,x} |X(s)|^q \geq c |x|^q e^{\alpha(s-t)} - k'$ となること。

$\mathcal{L}$ は Markov process $X(t)$ の infinitesimal generator とする。このとき、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2.1. $X(t)$ は (2.1) によって決まる process とする。
 $V(t, x)$ は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の函数で次の条件を満たすとする。

i) $V(t, x)$ は、下に有界で、 x について C^2 -class t について C^1 -class とする。(以下、このとき単に C^2 -class と呼ぶ)

ii) $\mathcal{L} V(t, x) \leq k_1 + k_2 V(t, x)$, k_1, k_2 は定数。

このとき次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \text{iii) } M_{t,x} V(s, X(s)) &\leq V(t, x) e^{k_2(s-t)} + \frac{|k_1|}{k_2} (e^{k_2(s-t)} - 1), \quad k_2 \neq 0, \\ &\leq V(t, x) + |k_1| (s-t) \quad k_2 = 0, \end{aligned}$$

ただし、 $s \geq t$ とする。

(証明). $k_2 \neq 0$ の場合。 $W(s, x) \equiv V(s, x) e^{-k_2(s-t)}$ とおく。
 τ_n は $X(t)$ の $\{x : |x| \leq n\}$ からの first exit time
と $\tau_n(t) \equiv \min\{t, \tau_n\}$ とおく。($n=1, 2, 3, \dots$)。 $\tau_n(t)$ は
Markov time となり、Dynkin-Itô formula より

$$M_{t,x} W(\tau_n(s), X(\tau_n(s))) - W(t, x) = M_{t,x} \int_t^{\tau_n(s)} \mathcal{L} W(u, X(u)) du$$

この右辺は、 W の定義と条件 ii) により、

$$\begin{aligned} &\leq M_{t,x} \int_t^{\tau_n(s)} k_1 e^{-k_2(u-t)} du \leq M_{t,x} \int_t^{\tau_n(s)} |k_1| e^{-k_2(u-t)} du \\ &\leq \frac{|k_1|}{k_2} (1 - e^{-k_2(s-t)}). \end{aligned}$$

一方、 $W(t, x)$ は $[t, s] \times \mathbb{R}^n$ 上で下に有界故、Faton の Lemma により $M_{t,x} W(s, X(s)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_{t,x} W(\tau_n(s), X(\tau_n(s)))$ 。上で得た結果と合せて

$$M_{t,x} W(s, X(s)) \leq W(t, x) + \frac{|k_1|}{k_2} (1 - e^{-k_2(s-t)})$$

これを書き直せば結論の式である。

$k_2 = 0$ の場合は、上と同じに $M_{t,x} W(\tau_n(s), X(\tau_n(s))) \leq W(t, x) + |k_1|(s-t)$ が言えるので、結論とする。 (Q.E.D.)

Lemma 2.2. $p > 0$, ε fix したとき、 $h(x)$ は C^2 -class の関数で、 $|x| \geq 1$ のとき $h(x) = |x|^p$ となるものとする。このとき、 $|\mathcal{L} h(x)| \leq k_3 + k_4 h(x)$, (k_3, k_4 は正の定数) となる。

(証明) $\mathcal{L} h(x) = \sum_i f_i(t, x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ の形をしている。(A1) と $h(x) = |x|^p$ の形よりこの式の右辺の $|x|$ についての order が評価できる。それをしてみればよい。 (Q.E.D.)

Corollary 2.1, $p > 0$, ε fix したとき、定数 c, k がとれて、

$$M_{t,x} |X(s)|^p \leq c(1 + |x|^p) e^{k(s-t)}, \quad s \geq t.$$

(証明) Lemma 2.2. のような $h(x)$ をとって、それに Lemma 2.1. を適用すれば容易に得られる。 (Q.E.D.)

Lemma 2.3 $V(t, x)$ は Lemma 2.1. の i) と共に以下の条件を満たす関数とする。

$$(iv) \quad \mathcal{L} V(t, x) \geq k_5 + k_6 V(t, x)$$

$$(v) \quad M_{t,x} |V(s, X(s))|, M_{t,x} \left| \frac{\partial V}{\partial t}(s, X(s)) \right|, M_{t,x} \left| f_i(s, X(s)) \frac{\partial V}{\partial x_i}(s, X(s)) \right|^2,$$

$M_{t,x} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(s, X(s)) \right|$ がみな, (t,x) -compact-subset
上で有界.

このとき次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} M_{t,x} V(s, X(s)) &\geq V(t, x) e^{k_b(s-t)} + \frac{k_s}{k_b} (1 - e^{k_b(s-t)}), \quad k_b \neq 0, \\ &\geq V(t, x) + k_s(s-t) \quad k_b = 0. \end{aligned}$$

(証明). Lemma 2.1. におけると同様に考えればよい. その際, Stopping time を取ることにし Dynkin-Ito formula が使えることか V で保障されていることに注意する. (Q.E.D.)

Corollary 2.2. $h(x)$ は Lemma 2.2. のものとすれば, 適当な定数 k, C をとって,

$$M_{t,x} h(X(s)) \geq h(x) e^{-k(s-t)} - C.$$

(証明). Corollary 2.1. 及び Lemma 2.2. により上の Lemma の条件が満たされていることが分る. (Q.E.D.)

定義 2.5 $X(t)$ が w-th ult. fdd. とは, 適当な正の定数 a, b をとって $\varphi(x) = e^{a|x|^b}$ とおいたとき, 任意の (t, x) に対して $\lim_{s \rightarrow \infty} M_{t,x} \varphi(X(s)) \leq K$. (K は a, b に依存して決まる) となること.

$X(t)$ が exp. w-th ult. fdd. であるとは, 正の定数 a, b, c, r, α, K' が存在して $\varphi(x) = e^{a|x|^b}$ とおくと, 任意の (t, x) と $s \geq t$ に対して, $M_{t,x} \varphi(X(s)) \leq c \varphi(x) e^{r(s-t)} + K'$ となること. 特に $r=1$ ととれるとき, strongly exp. w-th

ult. bdd であるという。

上の定義に関して、容易に次のことが分る。

$$\text{str. exp. } \omega\text{-th ult. bdd} \Rightarrow \text{exp. } \omega\text{-th. ult. bdd} \Rightarrow \omega\text{-th ult. bdd} \\ \Rightarrow \infty\text{-th ult. bdd} \quad (\text{i.e. 任意の } p > 0 \text{ に対し } p\text{-th ult. bdd.})$$

しかし、exp. p -th ult. bdd との関係は一概に言えない。それについては、Ex. 3.2. と Cor. 4.2. を見ると分る。

§3. ultimate boundedness, ultimate unboundedness の判定定理。

この§では、ult. bdd. 又は ult. unbdd. なるための十分条件を、Liapunov function の存在、という形で与える。更にその定理の有用性を示す Example を説明する。

Theorem 3.1. $X(t)$ を (2.1) により定まる process とする。 $p > 0$ を 1 つ fix する。このとき次のことが言える。

(A) $[0, \infty) \times R^n$ 上の函数 $V(t, x)$ で次の条件を満たすものが存在するとする。

(i) $V(t, x)$ は C^2 -class の函数。

(ii) 正の定数 α_1, C_1 があって、 $-\alpha_1 + C_1|x|^p \leq V(t, x)$ 。

(iii) 正の定数 C_2, β_1 があって、 $\Delta V(t, x) \leq -C_2 V(t, x) + \beta_1$ 。

このとき $X(t)$ は p -th ult. bdd. である。

(B). もしも $V(t, x)$ が (i) (ii) (iii) を満たすと同時に、

$$(i)' \quad V(t, x) \leq C_3 |x|^p + \alpha_2, \quad C_3, \alpha_2 > 0;$$

なる条件も満足するとすれば、 $X(t)$ は exp. p-th ult. bdd.

(c) もしも $V(t, x)$ が (i) (ii) (iii) と同時に次の条件.

$$(ii)'' \quad V(t, x) \leq W(x)$$

を満たすような函数 $W(x)$ が存在していれば、任意の (t, x)

に対して、 $T(t, x) \leq C_4 \log W(x) + C_5$ なる評価式が得

られる。そこで $T(t, x)$ は、 $K \in p\text{-th ult. bdd}$ の定義の定数とし

$$T(t, x) = \inf \{ \tau; M_{t, \tau} |X(t+\tau+u)|^p \leq K, \forall u \geq 0 \}.$$

(証明) (A) $V(t, x)$ に Lemma 2.1 が適用できて、

$$M_{t, s} V(s, X(s)) \leq V(t, x) e^{-c_2(s-t)} + \frac{\beta_1}{c_2} (1 - e^{-c_2(s-t)}) \rightarrow \frac{\beta_1}{c_2} \quad (s \rightarrow \infty).$$

(ii)' を使って、上式より

$$M_{t, s} |X(s)|^p \leq \frac{1}{c_1} M_{t, s} V(s, X(s)) + \frac{\alpha_1}{c_1} \rightarrow \frac{\beta_1}{c_1 c_2} + \frac{\alpha_1}{c_1} \quad (s \rightarrow \infty).$$

$$K = \frac{\beta_1}{c_1 c_2} + \frac{\alpha_1}{c_1} \quad \text{と置く。} \quad p\text{-th ult. bdd} \text{ が成り立つ。}$$

(B) 上の式に (ii)' を使って

$$M_{t, s} |X(s)|^p \leq \frac{C_3}{c_1} |x|^p e^{-c_2(s-t)} + (K + \frac{\alpha_2}{c_1}).$$

これから exponential type なる τ がわかる。

(c) (A) の証明中の式と (ii)'' により

$$M_{t, s} |X(s)|^p \leq \frac{1}{c_1} W(x) e^{-c_2(s-t)} + K.$$

$\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_0 = \frac{1}{c_2} \log W(x) - \frac{1}{c_2} \log C_1$ とおけば、 $T(t, x)$ の定義から $T(t, x) \leq \tau_0$ のはず。これは、結論の形。 (Q.E.D.)

この定理の中に現われた $V(t, x)$ は、 $X(t)$ の Liapunov 函数

と呼ぶ。

定理のうち(A)は、 $V(t, x)$ の可積分性に注意を払う必要がない笑で Zakai [4] の結果よりも良い。(C) は、収束のための時間の評価を与えており、例えば exponential type のときには $T(t, x) \leq d_1 \log(1+|x|) + d_2$ という形である。この事実は今後で使われる。

次に、unboundedness を示す定理を述べる。今後、 $C_i, \alpha_i, \beta_i, \dots$ 等は、こじわるな限り正の定数である。

定理 3.2. $X(t)$ は前と同様とし、 $q > 0$ を fix する。

(A). $V(t, x)$ を、次のような条件を満たす函数とする。

(i) $V(t, x)$ は C^2 -class で、 $|V(t, x)|, |\frac{\partial V}{\partial t}|, |\frac{\partial V}{\partial x_i}|, |\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}|$ は x の多項式で抑えられている。

(ii) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) = \infty, \quad V(t, x) \leq C_6 |x|^q + \alpha_3,$

(iii) $\mathcal{L} V(t, x) \geq C_7 V(t, x) - \beta_2,$

このような $V(t, x)$ が存在するとき、 $X(t)$ は q -th ult. unbdd.

(B). $V(t, x)$ が (A) の条件の上に、

(N)' $-\alpha_4 + C_8 |x|^q \leq V(t, x)$

をも満たしていれば、exp. q -th ult. unbdd.

(証明) Lemma 2.1 の代りに Lemma 2.3 を使って、Th. 3.1 の証明と同様に示される。詳細は略。 (Q.E.D.)

Theorem 3.3 $X(t)$ は前と同様である,

(A). Th. 3.1 の条件 (i) (ii) 及び次の条件をみたす $V(t, x)$ が存在するとする,

$$(iv) \quad C_9 e^{a_1 |x|^{b_1}} - \alpha_5 \leq V(t, x)$$

このとき, $X(t)$ は w-th ult. bdd である。

(B). もしも $V(t, x)$ が (A) の条件の上に, 更に次の条件,

$$(iv)' \quad V(t, x) \leq C_{10} e^{a_2 |x|^{b_2}} + \alpha_6$$

をみたすとする, $X(t)$ は exp. w-th ult. bdd,

(B)' も (も $V(t, x)$ が (B) の条件をみたし, (かも条件

(iv)' で, $a_2 = a_1$ にとれたとすれば, $X(t)$ は str. exp. w-th ult. bdd である。

(証明) は, Th. 3.1 でと同様の方法でできるのを略す。

次に, Example に基づいて上に挙げた定理がどのように役立つかを見たい。

Ex. 3.1. 次のような方程式で定まる system を考える。

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0$$

ここで, $A(t)$: $n \times n$ -matrix, $f(t, x)$ と $G(t, x)$ は (2.1) のとき

の条件をみたしているとする。このとき, もしも対応する

deterministic な system $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ の解 $x(t) \equiv 0$ が,

一様漸近安定であり, 更に次の 2 条件

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(t, x)|}{|x|} = \overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|G(t, x)|}{|x|} = 0$$

が満たされているとすると、 ϕ の system は $\exp. \infty$ -th ult. bdd (i.e. $\forall p > 0$, $\exp. p$ -th ult. bdd) である。

(証明). 常微分方程式の理論から、次の条件を満たす函数 $V(t, x)$ の存在が分っている。

a) $V(t, x) = (V(t)x, x)$, $V(t)$ は $n \times n$ -matrix で $(\cdot, \cdot)$ は内積.

b) $\mu |x|^2 \leq V(t, x) \leq M |x|^2$, μ, M は正の定数.

c) $n \times n$ -matrix valued function $W(t)$ が存在して,

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = -(W(t)x, x), \quad \lambda |x|^2 \leq (W(t)x, x) \leq \Lambda |x|^2.$$

$\Rightarrow$ 従って $\frac{dV}{dt}$ は 解曲線にそっての微分. λ, Λ は正の定数.

この $V(t, x)$ をとると、この $V(t, x)$ が $p=2$ として Th. 3.1

の (B) を満たすことから、計算により示せる。すなわち $V^m(t, x)$

$m=1, 2, 3, \dots$ をとると、 $V^m(t, x)$ が $p=2m$ としたときの

Th. 3.1 (B) の条件を満たすことか言える。従って、 $X(t)$ は

$\exp. \infty$ -th ult. bdd である。 (Q.E.D.)

Ex. 3.2 1次元の方程式.

$$dX(t) = aX(t) dt + bX(t) dW(t).$$

を考える。定数 a, b を動かしたときどうなるか見よう。

$h(x)$ を Lemma 2.2. のもとでとると次式を得る

$$\mathcal{L}h(x) = \left\{ a + \frac{b^2}{2}(p-1) \right\} p |x|^{p-2} x = \left\{ a + \frac{b^2}{2}(p-1) \right\} p h(x), \quad |x| \geq 1.$$

これより、 $a + \frac{b^2}{2}(p-1) < 0$ のときは $V(t, x)$ としてこの $h(x)$

をとって Th. 3.1 (B) の条件が満たされ、 $a + \frac{b^2}{2}(p-1) > 0$ の

ときには Th. 3.2. (B) の条件が満たされることも分る。従って次のことが言えた。“ $0 < p_0 < \infty$ を任意に与えると、 a, b を適当に定めて $a + \frac{b^2}{2}(p_0 - 1) = 0$ となるようにできる。 $(b \neq 0)$ 。そのとき上に考えた system は、 $0 < p < p_0$ の p に対して、exp. p -th ult. bdd となり $q > p_0$ の q に対して、exp. q -th ult. unbdd となる。” この例は次の事実を示している。『ある $p > 0$ について exp. p -th ult. bdd. であっても ω -th ult. bdd. とならないこともある。』この事実は、§4 の Cor. 4.2 と比較してみるとおもしろい。

Ex. 3.3. (2.1) で与えた system を考える。その system に対して、次の条件を満たす正の定数 $\beta_1, \beta_2, \delta_3, \delta_4$ が存在することを仮定する。

$$a) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(t, x)|}{|x|^{\beta_1}} > 0, \quad \overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|G(t, x)|}{|x|^{\beta_2}} < \infty$$

$$b) \quad (f(t, x), x) \leq -\delta_3 |x|^{\beta_1 + 1} \quad \text{if } |x| \geq \delta_4,$$

このとき次のことが言える。

(I) もし $1 \geq \beta_1 > \beta_2$ ならば、 $X(t)$ は strongly exp. ω -th ult. bdd である。(従って ∞ -th ult. bdd)。

(II) もし $1 > \beta_1 = \beta_2$ であっても、 $(1 - \beta_1)\delta_3 > n^2 C(1 - \beta_1 + \beta_1^2)$ であれば、str. exp. ω -th ult. bdd である。ここで C は仮定 (A₁), (A₂) (§2) に現われる定数。

証明は、上のような条件が満たされるときには、 $\alpha > 0$ を適当にえらんで $|x| \geq 1$ では $e^{|x|^\alpha}$ に等しいような C^2 -class の関数を $V(t, x)$ としてとれば、その $V(t, x)$ が Th. 3.3 (B)' の条件を満たすことがわかる。実際にそれを示すのは少し計算をせねばならないが、こゝでは略す。

この例の意味は、「diffusion がないとみなしたときの (i.e. drift の項) system が安定であるとき、小さな diffusion が加わっても安定である」という主張をしていること。

§4. Liapunov 関数の存在に関する理論.

Liapunov の理論によるという以上、Liapunov 関数の存在が安定性のための十分条件であるだけでなく、必要条件でもあることが望ましい。すなわち、1つの安定性を持つことと、ある性質を持つ Liapunov 関数の存在とか1対1に対応すること。これについて十分な結果は得られなかったが、たとえば Cor. 4.1 Cor. 4.2. 等、付随的なことでもおもしろいことがある。

Theorem 4.1 $X(t)$ を (2.1) によるものとする。(2.1) の係数が (A1), (A2) ばかりでなく、 $f(t, x)$, $G(t, x)$ 共に C^2 -class で、 f_x , f_{xx} , G_x , G_{xx} はみな有界とする。このような仮定の下で、 $X(t)$ がある $p > 0$ について exp. p -th ult. bdd. である

とすると、Th.3.1.(B) の条件をみたすような函数 $V(t, x)$ が存在する。

(証明). Khas'minskiĭ が [3] の中で、同様の定理を証明しているのと同じようにしてなされる。ただ、対象としている system が少し異なるので、じゃ、かんの修正を行なってあげればよい。概略を述べる。

$$V(t, x) \equiv \int_t^{t+T} M_{t,x} h(X(u)) du.$$

とおく。ここで、 $h(x)$ は Lemma 2.2. の α と β と同じものであり、 T はある適当な定数で、のちに述べるような条件をみたす程度に大にとればよい。そのとき、この $V(t, x)$ が求める $V(t, x)$ の性質を持っていることを示そう。

(ii)' をみたすことは、 $X(t)$ が exp. p -th ult. bdd なることより容易に分る。(T は正に fix すれば何でもあってもよい。)

(ii) は、Cor. 2.2. により、上での逆向きの不等式が保障されるので、 T を適当に大にとればよいことは容易に示される。

問題は (i) のなめらかさと (iii) の不等式である。そのために次の Lemma を用意する。

Lemma 4.1 (2.1) の system を考える。その係数が、Th. 4.1. に述べた仮定をみたしているとする。次に、 $\varphi(x)$ を C^2 -class の函数で、 $\varphi(x)$, $\varphi_x(x)$, $\varphi_{xx}(x)$ がみな、ある $r > 1$ について、locally uniformly r -th integrable (この意味は

下で説明する) とする。このとき、

$$u(t, x) \equiv M_{t,x} \varphi(X(s)) \quad t < s$$

は、 (t, x) の函数として C^2 -class で、次の等式を満たす。

$$\Delta u(t, x) = 0, \quad t < s.$$

Remark. $\varphi(x)$ が locally uniformly r -th integrable とい任意の compact set $[t_0, s] \times D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の点 (t, x) について、 $M_{t,x} |\varphi(X(s))|^r \leq C(t_0, s, D) < \infty$ となることである。Cor. 2.1. により、 x の多項式は常にこの条件を満たしている。今必要なのは、 $\varphi(x)$ が多項式の場合だけでなく、その場合だと Khas'minskiĭ が示している方法で証明できる。(やはり多少の修正をいれて。) しかし、後の定理のために、上のような一般化された Lemma が有用である。(Th. 4.3 1.)

(証明) は長くなるので省略する。方針だけ言うと、 $\varphi(x)$ $\varphi_x(x)$, $\varphi_{xx}(x)$ が有界な場合には [1] で証明されている。その事実を使って、一般の $\varphi(x)$ に対しては、[1] の結果の使える $\varphi_m(x)$ で近似して、 $\varphi(x)$ についても成立することと言う。(この方法は、Khas'minskiĭ とは異なっており、それ故より一般化された Lemma になっている。)

この Lemma を仮定すると、残った部分のうち (i) はよい。
(iii) については、積分と微分の順序交換をして計算して次のような等式を得る。

$$\mathcal{L}V(t, x) = u(t, x, t+T) - u(t, x, t) + \int_t^{t+T} \mathcal{L}_{t,x} u(t, x, s) ds.$$

これに Lemma 4.1 を使って, $\mathcal{L}V(t, x) = u(t, x, t+T) - u(t, x, t)$.
 あるいは, $u(t, x, s)$ の定義に戻ってこの右辺の評価をすれば容易に相加得られる. (Q.E.D.)

Corollary 4.1 $X(t)$ は Th. 4.1 の条件をすべて満たしているとする。さらに、(2.1) の係数 $f(t, x)$, $G(t, x)$ が時間的に一定になるとする。このとき次の不等式が成立する。

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)| + |G(x)|}{|x|} > 0.$$

(証明) 詳しい計算をせがに概略を述べる。Th. 4.1 の $V(t, x) = V(x)$ (今の場合時間的に一定) は条件 (iii) を満たしているのはおである。その一方で、 $\mathcal{L}V(x)$ を、 $\sum_i f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ として、この式の $|x|$ についての order を計算してみる。(この計算は Lemma 4.1 の証明中に示される不等式等を使う) その結果、(iii) が成立するためには、Corollary の結論が必要であることが示される。 (Q.E.D.)

Corollary 4.2 $X(t)$ は、 $p = \frac{4}{3}$ として Th. 4.1 のおける仮定が満たされているとする。このとき、さらに次の条件

$$|G(t, x)| \leq c_{11} (1 + |x|^r) \quad , \quad 0 \leq r < \frac{1}{3}$$

が成立しているとすると、 $X(t)$ は str. exp. w-th ult. bdd.

(証明) $V(t, x)$ は $p = \frac{4}{3}$ に対して Th. 4.1 で保障されて

いる $X(t)$ の Liapunov fn. とする。この $V(t, x)$ は Th. 3.1. (B) の条件を満たしている。このとき $W(t, x) = e^{V(t, x)}$ とおくと、この $W(t, x)$ が Th. 3.3. (B)' の条件を満たしていることを示される。条件 $0 \leq t < \frac{1}{\lambda}$ がどこで効いているかを見るためには、ちゃんと計算をしてみせないと分らないが、今は証明のための計算は省略する。 (Q.E.D.)

この Cor. にあつて、exp. p-th ult. bdd なもののうち、どれくらいが w-th ult. bdd になるかという問題が起る。Ex. 3.2 が一つの反例を示していることは前に注意した通り。

必ずしも exponential type でない $X(t)$ に対しても、されいな定理はえろれない。が、部分的に分ることもある。

今、 $X(t)$ を p-th ult. bdd とし、 K をその定数とする。 $\mathbb{R}^+$ 上の函数 $G(r)$ を $G(r) = 0, (r \leq k_1 = k+1), G(r) = r+1-k_2$ ($r \geq k_2 = k+2$), 全体でなめてみて、 $0 \leq G(r) \leq 1, (k_2 \leq r \leq k_2)$ に定め $u(t, x, s) = M_{t,x} f(X(s))$ とおき、

$$V(t, x) = \int_t^\infty G(u(t, x, s)) e^{\lambda(t-s)} ds, \quad \lambda > 0.$$

とおいて、この $V(t, x)$ が Liapunov 函数となるような場合を調べてみる。その結果次の定理をうる。

Theorem 4.2, $X(t)$ について、次のことを仮定する。(2.1) の係数について、Th. 4.1 での仮定があげておかれ、しかも $G(t, x)$ の x についての carrier が compact とする。そして

$X(t)$ は p -th ult. fdd とある。このとき、Th. 3.1 (A) の条件を満たす函数 $V(t, x)$ が存在する。

次に、 w -th ult. fdd に関連した定理を述べる。

Theorem 4.3. $X(t)$ は (2.1) によるものとし、(2.1) の係数は Th. 4.1 の仮定を満たすものとする。このとき、もし $X(t)$ が str. exp. w -th ult. fdd ならば、Th. 3.3 (B) の条件を満たす $V(t, x)$ (i.e. exp. w -th ult. fdd に対応すべき $V(t, x)$) が存在する。

(証明) は、かなり複雑である。それと比して得られる結果がそれ程きれいでもないもので、こゝでの証明は省略する。

この § は省略した部分が多いが、その部分については、前にも述べたごとく、[7] を見ていただくこと。

§ 5. Recurrence Property

Wonham が [5] で示した結果を使うと、(2.1) が時間的に一様でしか退化していないときには、Th. 4.1 の条件を満たしている $X(t)$ は positive recurrent であることが分る。ここでは、もっと弱い条件の下ではどの程度の recurrence property が成立するかについて、1つの結論を与えようといふが、この § の内容である。

定義 5.1 Process $X(t)$, $t \geq 0$, は、ある定数 K が存在して

任意の (t, x) に対し $P_{t,x}\{\omega; \exists s \geq 0, |X(t+s)| \leq K\} = 1$ とする

とき、weakly recurrent である。

このとき $\{x; |x| \leq K\}$ を recurrent region である。

定義 5.2 $X(t), t \geq 0$, は、weakly recurrent であり、
recurrent region $\{x; |x| \leq K\}$ の first hitting time $\tau(\omega)$ に対し
1. 任意の (t, x) について $M_{t,x}\tau(\omega) < \infty$ とするとき、
weakly positive recurrent である。

上のように定義を与えるとき、次の 2 定理が示せる。

Theorem 5.1 (2.1) に p を定める p -th process がある $p > 0$
にたいして p -th ult. bdd であるならば、weakly recurrent である。

Theorem 5.2 (2.1) に p を定める p -th process $X(t)$ は、
ある $p > 1$ にたいして exp. p -th ult. bdd であるならば、 $X(t)$ は
weakly positive recurrent である。

上の両定理はそれぞれ、次の Lemma 5.1 ないしは 5.2 の
Corollary として導かれる。

Lemma 5.1 $X(t), t \geq 0$, は Markov process とし、それに対し
 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の Borel measurable 函数 $p(t, x)$ と定数 K, α
が存在して、任意の (t, x) に対し

$$P_{t,x}\{\omega; |X(t+p(t, x), \omega)| \leq K\} \geq \alpha > 0.$$

となっていれば、 $X(t)$ は weakly recurrent である。

Lemma 5.2 $X(t), t \geq 0$, is Markov process とする。これに対して、 $[0, \infty)$ 上の非減少函数 $W(r)$ と定数 K, P が存在して次の条件を満たしているとする。

a) 任意の (t, x) に対して、 $S \geq W(|x|)$ のとき

$$M_{t,x} |X(t+S)|^P \leq K^P$$

b) 任意の $N > 0$, に対し $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^P} W((l+1)N) < \infty$.

このとき、 $X(t)$ は weakly positive recurrent である。

(Lemma 5.1 を使って、Th. 5.1 の証明)。

$M_{t,x} |X(s)|^P$ は、 (t, x) を fix したとき S について連続で、 S を fix したとき (t, x) について連続。従って、次のような Borel 可測函数 $f(t, x)$ が定義できる。

$$M_{t,x} |X(t+f(t, x))|^P \leq K_1^P = (1+\varepsilon) K^P.$$

ただし、 K_1 は p -th ult. bdd のとき定数 K' であり、 ε は任意に fix した正の定数。 $K = K_1 + \varepsilon$ とおけば、Tchebychev の不等式より、 $P_{t,x} \{ \omega : |X(t+f(t, x))| > K \} \leq \frac{1}{K^P} M_{t,x} |X(t+f(t, x))|^P \leq \frac{K_1^P}{K^P} = 1 - \alpha < 1$, となり、Lemma 5.1 の条件が満たされることを示す。 (Q.E.D.)

(Lemma 5.2 を使って Th. 5.2 の証明)。 $K, \varepsilon, X(t)$ の ult. bdd. を定めておき定数とし、 $K = K_1 + 1$ とおく。 Th. 3.1 の下で注意しおいておこうに、 $W(r)$ とは、 $W(r) = d_1 \log(1+r) + d_2$ の形の函数を適当に選べば、条件 a) が

満たされる。条件 B) については、 $p > 1$ と logarithm 函数があることにより保障される。よって結論とする。(Q.E.D.)

(Lemma 5.1 の証明) $\Omega_i, i=1, 2, \dots$ を、 $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega, |X(t+p(t, x))| > K\}$
 $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega_1, |X(t+p(t, x)+p(t+p(t, x), X(t+p(t, x))))| > K\}$ ----
 $\Omega_\infty = \bigcap_i \Omega_i$ とおいて、 $P_{t,x}(\Omega_\infty) = 0$ を示せば十分。

$P_{t,x}(\Omega_1) \leq 1 - \alpha < 1$, 以下、 $p(t, x)$ の Borel 可測性があるのより、 $X(t)$ の Markov 性を使って、 $P_{t,x}(\Omega_2) = M_{t,x}\{X_{\Omega_1}(\omega) P_{t+p(t,x), X(t+p(t,x))}\}$

$$(*) : |X(t+p(t, x)+p(t+p(t, x), X(t+p(t, x))))| > K$$

$$\leq (1-\alpha)^2, \quad \dots \quad P_{t,x}(\Omega_i) = (1-\alpha)^i. \quad \text{よって、}$$

$P_{t,x}(\Omega_\infty) = 0$ となる。(Q.E.D.)

(Lemma 5.2 の証明) Tchebychev に依り

$$P_{t,x}\{\omega : |X(t+W(l, x))| \geq K\} \leq \frac{1}{K^p}.$$

$K' = (1+\varepsilon)K$ とおく。こゝで ε はのちに定める定数。 $E_0 = \{x;$

$|x| \leq K'\}$; $E_l = \{x; lK' < |x| \leq (l+1)K'\}$, $l=1, 2, \dots$ とおく。

$\{X_m(\omega)\}_{m=1, 2, \dots}$ を、 $X_0(\omega) = x$, $X_1 = X(t+W(l, x))$, $X_2 = X(t+W(l, x) + W'(l+1))$ とおいて、 $X_i \in E_l$ のとき、こゝで $W'(l) = W(lK')$ 。

以下、 $X_m = X(t+W(l, x)+W'(l_1+1)+\dots+W'(l_{m-1}+1))$, $X_i \in E_{l_i}, i=1, \dots, m-1$, として定義する。

$\Omega_m = \{\omega \in \Omega; X_1 \notin E_0, \dots, X_{m-1} \notin E_0, X_m \in E_0\}$ とおく。

$\Omega \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ 。(① Lemma 5.1 に依り、 E_0 は recurrent region)

$\Omega_{m, l_1, \dots, l_{m-1}} = \{\omega; X_1 \in E_{l_1}, \dots, X_{m-1} \in E_{l_{m-1}}, X_m \in E_0\}$ と

おこ。 $\tau(\omega) \in E_0$ の hitting time とおこす。

$$\tau(\omega) \leq W(|x|) \quad \text{on } \Omega_1$$

$$\tau(\omega) \leq W(|x|) + W'(l_1+1) + \dots + W'(l_{m-1}+1) \quad \text{on } \Omega_{m, l_1, \dots, l_{m-1}},$$

こゝに、

$$M_{t,x}[\tau(\omega)] \leq \sum_{m, l_1, \dots, l_{m-1} \geq 1} P_{t,x}(\Omega_{m, l_1, \dots, l_{m-1}}) [W(|x|) + W'(l_1+1) + \dots + W'(l_{m-1}+1)]$$

が得られる。あと、この右辺の収束を示せばよい。Markov性を使って、帰納的に、次の不等式が示せる。

$$P_{t,x}(\Omega_{m, l_1, \dots, l_{m-1}}) < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{P(m-1)}} \frac{1}{(l_1)^P} \dots \frac{1}{(l_{m-1})^P}.$$

これを代入して、

$$\begin{aligned} & M_{t,x}(\tau(\omega)) \\ & \leq W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{P(m-1)}} \sum_{l_1, \dots, l_{m-1} \geq 1} \frac{W(|x|) + W'(l_1+1) + \dots + W'(l_{m-1}+1)}{(l_1)^P \dots (l_{m-1})^P} \\ & = W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{P(m-1)}} \left\{ W(|x|) \cdot \sum_{l_1, \dots, l_{m-1}} \frac{1}{(l_1)^P \dots (l_{m-1})^P} \right. \\ & \quad \left. + (m-1) \sum_{l_1, \dots, l_{m-1}} \frac{W'(l_1+1)}{(l_1)^P \dots (l_{m-1})^P} \right\} \\ & = W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{P(m-1)}} \{ W(|x|) A^{m-1} + (m-1) A^{m-2} B \} \\ & = W(|x|) + W(|x|) \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{A}{(1+\varepsilon)^P} \right)^{m-1} + \frac{B}{(1+\varepsilon)^P} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{A}{(1+\varepsilon)^P} \right)^{m-2} (m-1), \\ & \text{こゝで } A = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^P}, \quad B = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^P} W'(l+1) \text{ とおこす。これを収束して} \end{aligned}$$

いふことは Lemma の仮定より保障されており、 B の値は ε に依存してゐるが、 A の値は ε に依存してゐないことに注意して、上式の級数が ε を適当に大にすれば収束することになる。これで Lemma の結論となる。 (Q.E.D.)

引用文献

- [1] Gikhman-Skopokhod ; Introduction to the Theory of Random Processes, 1965.
- [2] M. B. Nevel'son and P. Z. Khas'minskii ; Stability of Stochastic Systems, Problemy Peredachi Informatsii, vol. 2, No. 3, pp. 76-91, 1966.
- [3] Р.Э.Хасьминский ; Чстойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, 1969.
- [4] M. Zakai ; On the Ultimate Boundedness of Moments associated with Solutions of Stochastic Differential Equations, SIAM J. Central vol. 5, No. 4, 1967, pp. 588-593.
- [5] W. M. Wonham ; Liapunov Criteria for Weak Stochastic Stability, J. of Diff. Eq. 2, pp. 195-207, 1966.
- [6] H. J. Kushner ; Stochastic Stability and Control. A.P. 1967
- [7] Y. Miyahara ; Ultimate boundedness of the systems governed by stochastic differential equations.
(to appear in Nagoya M. J.)