

対合有界な BCK-代数からできる束のイデアルについて (On the Ideals of a Lattice derived from an Involutive Bounded BCK-Algebra)

箕面学園高等学校 熊澤 昌明

Masaaki Kumazawa

Minoh Gakuen High School

1 準備と背景

1966 年に井関清志先生は, 論文 [3] において BCK-代数を定義した.
まず, その BCK-代数の定義を確認する.

定義 1.1 (BCK-代数) 定数 0 と二項演算 $*$ を持つ $\langle 2, 0 \rangle$ 型の代数 $X = \langle X; *, 0 \rangle$ が BCK-代数であるとは, X の任意の元 x, y, z に対して, 次の 5 つの条件 (I)~(V) を満たすものである.

- (I) $\{(x * y) * (x * z)\} * (z * y) = 0,$
- (II) $\{x * (x * y)\} * y = 0,$
- (III) $x * x = 0,$
- (IV) $0 * x = 0,$
- (V) $x * y = 0$ かつ $y * x = 0$ ならば $x = y.$

このとき, 次のように BCK-代数に, 演算 $*$ を使って関係 $\leq$ を入れる.

$x * y = 0$ であるとき, そのときに限り $x \leq y$ とする.

この関係 $\leq$ は, BCK-代数において順序関係となることが知られている.

次に, 1974 年に井関清志先生, 1975 年に田中昭太郎先生によって与えられた BCK-代数の重要な特別なクラスの定義を述べる.

定義 1.2 (可換 BCK-代数: S. Tanaka [9],[10], K. Iséki and S. Tanaka [6])
BCK-代数 X 上に, 演算 $*$ を用いることによって新たな二項演算 $\wedge$ を, X の任意の 2 元 x, y に対して $x \wedge y = y * (y * x)$ と定義する. ここで, X の 2 元 x, y に対して, 次の条件

$$(VI) \quad x \wedge y = y \wedge x$$

を常に満たすとき, BCK-代数 X は可換 BCK-代数と呼ばれる.

定義 1.3 (有界 BCK-代数: K. Iséki [4], K. Iséki and S. Tanaka [6])
BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して $x \leq 1$ を満たす特別な元 1 が存在するとき, BCK-代数 X は有界 BCK-代数と呼ばれる

上の定義 1.2 と定義 1.3 より, 次の定理が知られている.

定理 1.4 (S. Tanaka [9], K. Iséki and S. Tanaka [6], T. Traczyk [11])
有界で, 更に可換な BCK-代数 $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle$ において, 演算 $*$ を用いて
次のように二項演算 $\wedge, \vee$ と一項演算 N を定義する;

$$x \wedge y = y * (y * x), \quad Nx = 1 * x, \quad x \vee y = N(Nx \wedge Ny).$$

このとき, $X = \langle X; \wedge, \vee, N, 0, 1 \rangle$ は演算 $\wedge, \vee$ に関して分配束となり, 更に演算 $\wedge, \vee, N$ に関してド・モルガンの法則を満たすので, ド・モルガン代数となる.

従って, 有界可換 BCK-代数 $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle = \langle X; \wedge, \vee, N, 0, 1 \rangle$ は演算 $\wedge, \vee$ に関して束となっている. この事実より, 次のような問題を考える.

問題. 1 BCK-代数全体において, 有界可換 BCK-代数全体のつくるクラスよりも真に大きいクラスであり, 更に束にもなっているクラスは存在するのか?

2 対合有界な BCK-代数

まず, 1 つの例を与える.

例 2.1 集合 $X = \{0, a, b, 1\}$ を半順序集合とし, その順序関係は $0 \leq a \leq b \leq 1$ を満たしているものとする. このとき, 集合 X には, この順序関係を満たしながら, 次の, 異なる 6 種類の非同型な BCK-代数の構造が存在する.

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	b	a	0

乗積表 2.1

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0

乗積表 2.2

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	a	a	0

乗積表 2.3

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	b	0

乗積表 2.4

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	1	1	0

乗積表 2.5

*	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	1	1

乗積表 2.6

事実.A 演算 $*$ が乗積表 2.1 で与えられる BCK-代数 X は, 有界可換 BCK-代数であり, 更に X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

事実.B 演算 $*$ が乗積表 2.2 で与えられる BCK-代数は, 可換 BCK-代数ではないが, X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

一般に, 有界可換 BCK-代数に対して, 次の定理が成り立つ.

定理 2.2 (K. Iséki and S. Tanaka [6]) 有界可換 BCK-代数 $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle$ において, X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

事実 A は定理 2.2 が成立することの一つの具体例を与えているが, 事実 B はその定理の逆が一般に成立しないことを示している. このことを受けて, 次の定義を与える.

定義 2.3 (対合有界 BCK-代数: Y. S. Huang [2]) 有界 BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して一項演算 N が対合性: $NNx = x$ を満たすとき, この BCK-代数 X を対合有界 (involutive bounded) であると呼ぶ.

他方, BCK-代数における任意の 2 元に対する下限の存在に関しては, 以下の結果が得られている. (M. Kumazawa [8] より)

定義 2.4 ((I)_{x,y}-条件) BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の (i)~(iii) の条件を満たすとき, z は (I)_{x,y}-条件を満たすという.

- (i) $z \leq x, z \leq y,$
- (ii) $x * z \leq x * y,$
- (iii) $y * z \leq y * x.$

定義 2.5 (単一 (I)_{x,y}-条件) BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が (I)_{x,y}-条件を満たす唯一つの元であるとき, z は単一 (I)_{x,y}-条件を満たすという.

更に, 定義 2.5 より BCK-代数の中の特別なクラスを, 次のように定義する.

定義 2.6 ((I)-条件を持つ BCK-代数) BCK-代数 X の任意の 2 元 x, y に対して, 単一 (I)_{x,y}-条件満たす元 z が X に存在するとき, BCK-代数 X を (I)-条件を持つ BCK-代数という. このとき x, y に対して元 z は唯一つ定まるので z を $x \times y$ と表すことにする. 即ち $z = x \times y = y \times x$ が成立する.

このクラスは, 次の性質を持つ.

定理 2.7 BCK-代数が演算 $\times$ に関して下半束となる条件は, BCK-代数が (I)-条件を持つことと同値である.

この (I)-条件を持つ BCK-代数のクラスは, 可換 BCK-代数よりも真に広いクラスであり (例 2.1 を参照), 更に演算 $\times$ に関して下半束となる. ここで最初の問題の解答となる次の定理が得られる.

定理 2.8 (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数は, 演算 $\times, \vee_\times$ に関して束となる. ただし, 演算 $\vee_\times$ は X の 2 元 x, y に対して $x \vee_\times y = N(Nx \times Ny)$ と定める. 更に, 演算 $\times, \vee_\times, N$ に関してド・モルガンの法則も満たす.

証明 始めに, (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数 X が, 積 $\times$ と和 $\vee_\times$ に関して束となることを示す.

まず, 定理 2.7 より X の任意の 2 元 x, y に対して, $x \times y$ は x と y の下限となる. 次に, 2 元 x, y に対して, $x \vee_\times y$ が上限となることを示す.

演算 $\times$ の定義より

$$Nx \times Ny \leq Nx, Nx \times Ny \leq Ny \quad (2.1)$$

更に, X が有界であることより

$$x \leq y \Rightarrow Ny \leq Nx \quad (2.2)$$

ここで, (2.1), (2.2) と X が対合有界であることより

$$N(Nx \times Ny) \geq NNx = x, N(Nx \times Ny) \geq NNy = y \quad (2.3)$$

(2.3) より $x \vee_{\times} y = N(Nx \times Ny)$ は x と y の共通の上界の一つであることがわかる.

ここで, x と y の任意の共通の上界を u とする. 即ち, 条件 $x \leq u, y \leq u$ を満たすものとする.

この元 u について考える. すると, $Nu \leq Nx, Nu \leq Ny$ であり, Nu は Nx と Ny の共通の下界であることがわかる.

一方, $Nx \times Ny$ は Nx と Ny の下限, 即ち Nx と Ny の最大の下界であるので, $Nu \leq Nx \times Ny$ を満たす. ここで, X の対合有界性より

$$x \vee_{\times} y = N(Nx \times Ny) \leq NNu = u \quad (2.4)$$

(2.4) より, $x \vee_{\times} y$ は x と y の任意の共通の上界 u より小さいことがわかる, 即ち, $x \vee_{\times} y$ は x と y の, 最小の共通の上界であるので, x と y の上限となる.

次に, X 上でド・モルガンの法則を満たすことを示す.

X の任意の 2 元 x, y に対して, 次が成立する.

$$Nx \vee_{\times} Ny = N(N(Nx) \times N(Ny)) = N(x \times y) \quad (2.5)$$

$$N(x \vee_{\times} y) = N(N(Nx \times Ny)) = Nx \times Ny \quad (2.6)$$

(2.5) と (2.6) によってド・モルガンの法則が示された.

□

注意 「(I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数は分配束である。」と予想するが, まだ分配性の証明はできていない.

3 (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数のイデアル

まず, BCK-代数と束, それぞれに定義されたイデアルを確認する.

定義 3.1 (BCK-代数のイデアル : K. Iséki [5]) BCK-代数 X の空でない部分集合 A が, 次の条件 (i), (ii) を満たすとき BCK-代数の井関のイデアルと呼ばれている.

X の 2 元 x, y に対して,

- (i) $0 \in A$,
- (ii) $y * x \in A, x \in A$ ならば $y \in A$.

定義 3.2 (束のイデアル : G. Birkhoff [1]) 束 L の空でない部分集合 I が, 次の条件 (1), (2) を満たすとき束のイデアルと呼んでいる.

L の 3 元 a, b, x に対して,

- (1) $a \in I, x \in L, x \leq a$ ならば $x \in I$,
- (2) $a \in I, b \in I$ ならば $a \vee b \in I$.

問題. 2 上記の 2 種類のイデアルは異なる代数の上に定義されたものであるが, (I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数は, BCK-代数の構造も束の構造もどちらも持っている. このとき, 2 種類のイデアルの間にどのような関係があるのか?

この問題に関連して, 先に次の定理が得られている.

定理 3.3 (M. Kumazawa [7]) 有界可換 BCK-代数 $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle = \langle X; \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ の井関のイデアルは, 演算 $\wedge, \vee$ に関して束のイデアルでもある.

(I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数は有界可換 BCK-代数より真に広いクラスである. この場合に次の結果が得られた.

定理 3.4 (I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数 $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle = \langle X; \times, \vee_{\times}, 0, 1 \rangle$ の井関のイデアルは, 演算 $\times, \vee_{\times}$ に関して束のイデアルでもある.

証明 束のイデアルであることを示すには, 定義 3.2 の条件 (1), (2) を示せばよい.

まず, 条件 (1) を示す. $X \supset A$ を井関のイデアルとすると, 仮定 $x \leq a$ と条件 (i) より $x * a = 0 \in A$. ここで, $a \in A, x * a \in A$ より, 条件 (ii) より $x \in A$. これで, 条件 (1) は示された.

次に, 条件 (2) を示す. この条件 (2) の成立を示すには, 次の等式 (3.1) が示されれば, 条件 (1) の証明と同様の方法で示すことができる.

$$\{(x \vee_{\times} y) * y\} * x = 0 \quad (3.1)$$

(3.1) を示すために, $(x \vee_{\times} y) * y \leq x$ を示す.

X は対合有界であるので $x * y = Ny * Nx$ が成立し, 更に X は (I)-条件を持っているので,

$$\begin{aligned} (x \vee_{\times} y) * y &= N(Nx \times Ny) * y \\ &= Ny * (Nx \times Ny) \\ &\leq Ny * Nx \\ &= x * y \\ &\leq x \end{aligned}$$

これで, (3.1) は示されたので, 条件 (2) も示された.

□

注意 なお, 有界可換 BCK-代数における積 $\wedge$ は積 $\times$ と一致し, 和 $\vee$ は和 $\vee_{\times}$ と一致しているので, 定理 3.4 は定理 3.3 の拡張であるといえる.

補遺 BCK-代数における対合有界 (involutive bounded) の概念は, 初め Y. S. Huang [2] によって "involutory BCK-algebra" という名称で定義されたが, 環論において対合環を "involutive ring" と呼んでいることを参考にして, この論文では "involutive bounded BCK-algebra" と呼ぶことにした.

参考文献

- [1] G. Birkhoff, *Lattice Theory (Third edition)*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1967).
- [2] Y. S. Huang, On Involutory BCK-Algebras, *Soochow J. Math.*, **32**(2006), 51-57.
- [3] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*, **42**(1966), 26-29.
- [4] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **2**(1974), 193-201.
- [5] K. Iséki, On Ideals in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **3**(1975), 1-12.
- [6] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the theory of BCK-algebras, *Math. Japonica.*, **23** (1978), 1-26.
- [7] M. Kumazawa, A Remark on the Ideal of BCK-Algebras and Lattices, *Int. J. Algebra*, **13**(2019), 493-497. <http://doi.org/10.12988/ija.2019.91042>
- [8] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, (*Scientiae Math. Japonica.* に掲載予定).
- [9] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **3** (1975), 37-43.
- [10] S. Tanaka, On $\wedge$ -Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **3** (1975), 59-64.
- [11] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonica.*, **24**(1979), 283-292.

This work was supported by Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

(コロナ・ウイルスの休みに記す, 2020.5.7)