

金融危機下における日本の株式市場でのジャンプに関する検定*

法政大学・工学研究科 茨田 佳明 (Yoshiaki Barada)

Graduate School of Engineering

Hosei University

東京工業大学・イノベーションマネジメント研究科 久保 裕介 (Yūsuke Kubo)

Graduate School of Innovation Management

Tokyo Institute of Technology

法政大学・理工学部 安田 和弘 (Kazuhiro Yasuda)

Faculty of Science and Engineering

Hosei University

1 イントロダクション

本論文では、日本の株式市場におけるジャンプ（跳び）の検定を行う。特に、2008年に起きた金融危機のデータを中心に検定及び比較を行った。良く知られている通り、2008年9月にリーマンショックが起これ、2008年9月から10月にかけて、世界中で大きな株価の変化が起きた。このような大きな変化が起こる要因として2つのことが考えられる。1つ目は、ボラティリティが大きくなったことによる変動と考えられる。実際、通常は20%前後である日経平均株価のボラティリティが、この期間に100%を超えたという報告も成されている。2つ目は、予期せぬ大きな変動として、株価にジャンプが起きたと考えられる。そのため、この期間の日本の株式市場における大きな変化が、ボラティリティによって引き起こされたのか、ジャンプによって引き起こされたのかを仮説検定によって確かめることが本論文の目的である。

近年、高頻度データを用いた株価に対するジャンプの有無を検定する方法が多数、与えられている。本論文では、それらの中でもノンパラメトリックなジャンプの検定方法を用いた。ジャンプ型拡散過程に対するジャンプの検定は、Barndorff-Nielsen and Shephard (BNS) [6]、Jiang and Oomen (JO) [7] と Lee and Mykland (LM) [8] の方法を用いた。また、Lévy 型のジャンプの検定は Lee and Hannig (LH) [9] の方法を用いた。これらの方法では、ある種の標準化（基準化）を用いてデータからボラティリティ（標準偏差）の影響を除去し、その標準化したものの漸近定理を与え、ジャンプの有無の仮説検定を可能としている。以上の方法以外にも、閾値を用いたジャンプの検定方法として、Mancini [10] や Shimizu and Yoshida [12] がある。閾値を用いた方法は Shimizu [13] に述べられている通り、閾値の選び方に検定結果が依存し、これまでに適切な閾値の選び方が与えられていないため、今回はこの方法を用いることを避け、ノンパラメトリックな方法を用いて検定を行った。また、Lévy 型のジャンプの検定方法として、Aït-Sahalia and Jacod [1] や Mancini [11] などがある。

*This paper is an abbreviated version of Barada, Kubo and Yasuda [3] and Barada and Yasuda [4].

本論文では第2節で、それぞれの検定方法やアイデアについて概説する。第3節で、ジャンプ型拡散過程に対する結果を与える。この節の結果の多くは Barada, Kubo and Yasuda [3] に述べられているものである。2008年度の日本の株式市場の高頻度データを用いて検定を行った。また、LMの方法はジャンプが起きた時点を特定できるため、LMの方法を用いてジャンプサイズの分布の推定やジャンプの起こる頻度の分布の推定も行った。第4節では、LHの方法を用いて Lévy 型のジャンプの検定を行い、第3節同様、ジャンプサイズの分布やジャンプの頻度の分布の推定を与えている。

2 ジャンプの検定方法について

この節では、Barndorff-Nielsen and Shephard (BNS) [6]、Jiang and Oomen (JO) [7]、Lee and Mykland (LM) [8] と Lee and Hannig (LH) [9] の4種類の検定方法を紹介する。各々の統計量を持つ性質等の詳細に関しては各論文を参照せよ。

2.1 Barndorff-Nielsen and Shephard (BNS) [6] の方法

$t \geq 0$ に対して、 S_t を時刻 t における株価とし、 $Y_t = \log S_t$ を対数株価とする。ジャンプ拡散過程とは、次のように書き表される確率過程を言う：

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + J_t dN_t, \quad (2.1)$$

但し、 W_t はブラウン運動、 Y_0 は Y_t の初期値、 N_t は有限な強度を持つ計数過程、 J_t は時刻 t でのジャンプサイズとし、 W_t, N_t, J_t はそれぞれ互いに独立とする。また、ドリフト a_t とボラティリティ σ_t は càdlàg 過程とする。 $N_t \equiv 0$ のとき、(2.1) は次のようなジャンプの無い確率過程となる：

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \quad (2.2)$$

BNSの方法は2次変分と1, 1-order bipower variation (BPV) の性質を用いて、ジャンプの検定方法を与えている。2次変分を次で定義する：

$$[Y]_t := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2 \quad \text{in prob.},$$

但し、分割 Π : $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$ で $\|\Pi\| = \sup_j \{t_{j+1} - t_j\}$ とする。今、 Y_t の連続部分を Y_t^c 、ジャンプ部分を Y_t^d とすると、2次変分は $[Y]_t = [Y^c]_t + [Y^d]_t$ と分解できることが知られている。また、1, 1-order bipower variation (BPV) を次のように定義する：

$$\{Y\}_t^{[1,1]} := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=2}^n |Y_{t_{j-1}} - Y_{t_{j-2}}| |Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \quad \text{in prob.},$$

Barndorff-Nielsen and Shephard [5] の定理 5 で次のような結果が与えられている: Y_t が (2.1) で与えられ、 $a_t \equiv 0$ とし、 σ_t は W_t と独立としたとき、

$$\{Y\}_t^{[1,1]} = \mu_1^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds = \mu_1^2 [Y^c]_t$$

が成り立つ。但し、 $\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \simeq 0.7979$ [†] である。よって、 $\mu_1^{-2} \{Y\}_t^{[1,1]} = [Y^c]_t$ が成り立つ。従って、 $[Y]_t - \mu_1^{-2} \{Y\}_t^{[1,1]} = [Y^d]_t$ の関係が成り立つ。つまり、ジャンプが存在しなければ $[Y]_t - \mu_1^{-2} \{Y\}_t^{[1,1]} \equiv 0$ である。従って、 $[Y]_t - \mu_1^{-2} \{Y\}_t^{[1,1]}$ の誤差の分布を考察することで、検定が可能となる。今、時間 $\delta > 0$ 間隔でデータが観測出来たとする。このとき、 $[Y]_t$ と $\{Y\}_t^{[1,1]}$ の実現値は次のように与える:

$$[Y]_t \simeq [Y_\delta]_t := \sum_{j=1}^{[t/\delta]} (Y_{j\delta} - Y_{(j-1)\delta})^2, \quad \{Y\}_t^{[1,1]} \simeq \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} := \sum_{j=2}^{[t/\delta]} |Y_{(j-1)\delta} - Y_{(j-2)\delta}| |Y_{j\delta} - Y_{(j-1)\delta}|,$$

但し、 $Y_{j\delta}$ は時刻 $j\delta$ での対数株価とし、 x を実数としたとき $[x]$ は x の整数部分とする。

Theorem 1 (*Theorem 1 of Barndorff-Nielsen and Shephard [6]*) Let Y_t follow equation (2.2) and let t be a fixed, arbitrary time. Suppose the following conditions are satisfied: (a) The volatility process σ_t^2 is pathwise bounded away from zero. (b) The joint process (a_t, σ_t) is independent of the Brownian motion W_t . Then as $\delta \downarrow 0$, we have

$$G := \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta \int_0^t \sigma_u^4 du}} \left(\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} - [Y_\delta]_t \right) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad (2.3)$$

and

$$H := \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta \frac{\int_0^t \sigma_u^4 du}{(\int_0^t \sigma_s^2 ds)^2}}} \left(\frac{\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]}}{[Y_\delta]_t} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad (2.4)$$

where $\theta = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 5 \simeq 0.6090$. Further, if Y_t follows to equation (2.1) and (a) and (b) hold, then

$$\{Y\}_t^{[1,1]} = \mu_1^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

ここで、(2.4) の G は差を用いた統計量であり、 H は比を用いた統計量である。このとき、帰無仮説 H_0 は『時刻 $[0, t]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』となる。また、統計量の構成[‡] から下側の片側検定になる。

(2.4) を統計量に用いるためには、 $\int_0^t \sigma_s^4 ds$ を近似する必要がある。これは、 Y_t が式 (2.2) に従うと仮定する。つまり、帰無仮説の下で、Realized quadpower variation が[§]

$$\frac{1}{\delta} \sum_{j=4}^{[t/\delta]} |Y_{(j-3)\delta} - Y_{(j-4)\delta}| |Y_{(j-2)\delta} - Y_{(j-3)\delta}| |Y_{(j-1)\delta} - Y_{(j-2)\delta}| |Y_{j\delta} - Y_{(j-1)\delta}| \xrightarrow{p} \mu_1^4 \int_0^t \sigma_s^4 ds$$

に従うことが知られている。よって、この量を用いることとする。

[†] u を $N(0, 1)$ の確率変数とし、 $\mu_1 = E[|u|]$ である。

[‡] Y_t にジャンプが存在するとき、 $\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} = [Y^c]_t \leq [Y^c]_t + [Y^d]_t = [Y_\delta]_t$ である。

[§] Y_t にジャンプが存在するとき、 $\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} = [Y^c]_t \leq [Y^c]_t + [Y^d]_t = [Y_\delta]_t$ である。

Remark 1 H の $\int_0^t \sigma_s^4 ds$ 部分を近似したものに対して、次のような統計量でも検定が可能である:

$$J := \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta \max(t^{-1}, \frac{\{Y_\delta\}_t^{[1,1,1,1]}}{(\{Y_\delta\}_t^{[1,1]})^2})}} \left(\frac{\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]}}{[Y_\delta]_t} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (2.5)$$

2.2 Jiang and Oomen (JO) [7] の方法

この節では、Jiang and Oomen [7] の検定方法について紹介する。ここでも、BNS のとき同様、 Y_t を対数株価とし、式 (2.1) に従うものとする。このとき、株価 S_t は次のような確率微分方程式に従うことになる:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(a_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t + (\exp(J_t) - 1) dN_t.$$

これを、式 (2.1) を併せると次のようになる:

$$2 \int_0^t \left(\frac{dS_u}{S_u} - dY_u \right) = \int_0^t \sigma_u^2 du + 2 \int_0^t (\exp(J_u) - J_u - 1) dN_u. \quad (2.6)$$

これは、収益率と対数収益率がテイラー展開による近似の関係にあることを用いた式となる。このとき、ジャンプが存在しなければ、上式の第 2 項目が 0 になる。

以降 $t = 1$ として考えていく。第 1 項目は Realized volatility RV_N によって近似できる:

$$\int_0^t \sigma_u^2 du \simeq RV_N := \sum_{i=1}^N |Y_{i/N} - Y_{(i-1)/N}|^2,$$

但し、 N は時刻 $[0, 1]$ 上のデータ数を表すものとする。また、式 (2.6) の左辺は収益率と対数収益率の差の合計で近似できる:

$$((2.6) \text{ の左辺}) \simeq SwV_N := 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{i/N} - S_{(i-1)/N}}{S_{(i-1)/N}} - (Y_{i/N} - Y_{(i-1)/N}) \right).$$

従って、式 (2.6) の関係から、 $SwV_N - RV_N$ の極限が $[0, 1]$ 上にジャンプが無ければ 0 に収束し、ジャンプが存在すれば (2.6) の第 2 項目に収束する。

Jiang and Oomen [7] では、次のような漸近定理が与えられている。

Theorem 2 (*Theorem 2.1 in Jiang and Oomen [7]*) For the price process specified in equation (2.1) with the assumptions that (a) the drift a_t is a predictable process of locally bounded variation, and (b) the instantaneous variance σ_t^2 is well-defined strictly positive càdlàg semimartingale process of locally bounded variation with $\int_0^T \sigma_t^2 dt < +\infty$, arbitrary $T > 0$, and under the null hypothesis of no jumps, we have as $N \rightarrow \infty$,

$$(i) \text{ the difference test: } \frac{N}{\sqrt{\Omega_{SwV}}} (SwV_N - RV_N) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

(ii) the logarithmic test: $\frac{N \int_0^1 \sigma_t^2 dt}{\sqrt{\Omega_{SwV}}} (\log(SwV_N) - \log(RV_N)) \xrightarrow{d} N(0, 1),$

(iii) the ratio test: $\frac{N \int_0^1 \sigma_t^2 dt}{\sqrt{\Omega_{SwV}}} \left(1 - \frac{RV_N}{SwV_N}\right) \xrightarrow{d} N(0, 1),$

where $\Omega_{SwV} := \frac{1}{9} \mu_6 \int_0^1 (\sigma_t^2)^3 dt$ and $\mu_p := E[|u|^p]$ for $u \sim N(0, 1)$ and $p \in \mathbb{R}$.

この漸近定理から、帰無仮説 H_0 を『時刻 $[0, 1]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』として、両側検定を用いることとなる。この定理を用いるためには、あとは Ω_{SwV} の近似が必要となる。Jiang and Oomen [7] では、次のような量が提案されているため、我々もこの量を用いた: $p = 4, 6$ に対して、

$$\hat{\Omega}_{SwV}^{(p)} := \frac{\mu_6}{9} \frac{N^3 \mu_{6/p}^{-p}}{N - p + 1} \sum_{i=0}^{N-p} \prod_{k=1}^p |Y_{\frac{i+k}{N}} - Y_{\frac{i+k-1}{N}}|^{\frac{6}{p}}.$$

2.3 Lee and Mykland (LM) [8] の方法

ここでは、Lee and Mykland [8] の検定方法について紹介する。BNS や JO の検定では、ある時間区間 $[0, T]$ でジャンプの有無を検定できるだけであったが、LM の方法では、どの時間にジャンプがあったかを特定できるメリットがある。LM の方法は、極値論の Fischer-Tippett の定理をベースとして構成されている。

$T > 0$ を固定し、 N を $[0, T]$ 上で観測されたデータ数とする。また、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ を離散観測時点とし、ここでは等間隔 $\Delta t = \frac{T}{N}$ で観測できるものとする。 K を window size とする。この K の選び方については後述する。今、時刻 t_i でジャンプがあったかどうかを検定するための検定統計量 L_i を次のように定義する:

$$L_i := \frac{Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}}{\hat{\sigma}_{t_i}}, \quad (2.7)$$

但し、 $\hat{\sigma}_t^2$ は次のように定義される:

$$\hat{\sigma}_t^2 := \frac{1}{K-2} \sum_{j=i-K+2}^{i-1} |Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| |Y_{t_{j-1}} - Y_{t_{j-2}}|.$$

この統計量 L_i に対して、Lee and Mykland [8] では次のような漸近定理が与えられている。

Theorem 3 (Lemma 1 in Lee and Mykland [8]) Let $L(i)$ be as in (2.7) and the window size $K = O_p(\Delta t^\alpha)$ [§], where $-1 < \alpha < -0.5$. Suppose the process Y_t follows (2.1) or (2.2) and for any $\varepsilon > 0$,

$$\sup_i \sup_{t_i \leq u \leq t_{i+1}} |a(u) - a(t_i)| = O_p(\Delta t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad \text{and} \quad \sup_i \sup_{t_i \leq u \leq t_{i+1}} |\sigma(u) - \sigma(t_i)| = O_p(\Delta t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad (2.8)$$

[§]確率的オーダーの定義は次のように与えられる。確率ベクトル列 $\{X_n\}$ と確率変数列 $\{d_n\}$ に対して、 $X_n = O_p(d_n)$ は次のように定義される: 任意の $\delta > 0$ に対して、同時に $P(|X_n| > M_\delta d_n) < \delta$ を満たす有限定数 M_δ が存在する。

are satisfied. Let $\bar{A}_N$ be a set of $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ so that there is no jump in $(t_i, t_{i+1}]$. Then as $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{\max_{i \in \bar{A}_N} |L_i| - C_N}{s_N} \xrightarrow{d} \xi, \quad (2.9)$$

where ξ has a cumulative distribution function $P(\xi \leq x) = \exp(-e^{-x})$, and we set

$$C_N := \frac{(2 \log N)^{\frac{1}{2}}}{\mu_1} - \frac{\log \pi + \log(\log N)}{2\mu_1(2 \log N)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{and} \quad s_N := \frac{1}{\mu_1(2 \log N)^{\frac{1}{2}}}.$$

Remark 2 (i). ξ の分布関数は極値論で現れるグンベル分布である。これは Theorem 3 が対数収益率の *i.i.d.* データに対する最大値に関して与えられていることによる。従って、帰無仮説 H_0 を『時刻 $[0, T]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』の下で、(2.9) ではグンベル分布に対する右側の片側検定が用いられることになる。

(ii). 次に window size K の選び方について述べておく。Theorem 3 で $K = O_p(\Delta t^\alpha)$, $-1 < \alpha < -0.5$ を満たす必要がある。Lee and Mykland [8] では数値実験上、 K を大きくとっても精度に大きな影響を与えず、計算コストが増すだけだと述べられている。従って、 $K = \Delta t^{-0.5}$ と取ることを薦めている。また、nobs を 1 日で使うデータ数とし、 $\Delta t = 1/(252 \times \text{nobs})$ と定める。例えば、5 分間隔のデータを用いた際は、 $K = 270$ となる。Lee and Mykland と同様の数値実験が、Barada and Kubo [2] でも行われ、同様の結果が得られたことが書かれている。

2.4 Lee and Hannig (LH) [9] の方法

最後に、Lee and Hannig [9] の方法を紹介する。ここでは、株価にジャンプがある場合は次のような Lévy 型のジャンプ拡散過程で表現されるものとする：

$$dY_t = a_t dt + \sigma_t dW_t + dZ_t, \quad (2.10)$$

但し、 Z_t は Lévy jump measure ν で W_t と独立な Lévy 過程とする。ここでは、 a_t, σ_t は連続な確率過程で、Theorem 3 の仮定 (2.8) を満たすものとする。このとき、次のような統計量を用いて時刻 $(t_{i-1}, t_i]$ でのジャンプの有無を検定する： $t \in (t_{i-1}, t_i]$ に対して、

$$J_t := \frac{Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}}{\bar{\sigma}_{t_i} \Delta t^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.11)$$

但し、任意の $g > 0, 0 < \omega < \frac{1}{2}$ と $t \in (t_{i-1}, t_i]$ に対して、

$$\bar{\sigma}_t^2 := \frac{\Delta t^{-1}}{K} \sum_{j=i-K}^{i-1} (Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})^2 \mathbf{1}_{|Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \leq g \Delta t^\omega},$$

但し、 $\mathbf{1}$ は定義関数を表すものとする。 $K \rightarrow \infty$ かつ $\Delta t K \rightarrow 0$ で、 $Y(t)$ は (2.10) に従い、Lee and Hannig [9] の Assumption 1 を仮定すると、 $\Delta t \rightarrow 0$ で、 $Y(t)$ と独立な任意の停止時刻 $\tau > 0$ に対して $\bar{\sigma}(\tau) \xrightarrow{P} \sigma_\tau$ となることが Lee and Hannig [9] の Proposition 1 で与えられている。

このとき、Lévy 過程の大きいジャンプの検定に対する漸近定理が次のように与えられる。

Theorem 4 (*Proposition 2 in Lee and Hannig [9]; Big Lévy jump-detection rule*) Let $J(t)$ be as in (2.11) and $K \rightarrow \infty$ and $\Delta t K \rightarrow 0$. Suppose the process follows (2.2) and assumptions (2.8) in Theorem 3 is satisfied. Then, as $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{\max_{t \in (t_{i-1}, t_i] \text{ for } 0 \leq i \leq N} |J(t)| - C_N}{s_N} \rightarrow \xi,$$

where set

$$C_N := (2 \log N)^{\frac{1}{2}} - \frac{\log \pi + \log(\log N)}{2(2 \log N)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{and} \quad s_N := \frac{1}{(2 \log N)^{\frac{1}{2}}}.$$

Remark 3 (i) Lee and Mykland [8] のとき同様、帰無仮説 H_0 を『時刻 $[0, T]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』の下で、極値論で用いられるグンベル分布の右側の片側検定を用いる。

(ii) Window size K に関しては Lee and Hannig [9] で述べられている $b\Delta t^c$ ($-1 < c < 0$) の形を用いる。また、前節の Lee and Mykland [8] の方法による結果と比較し易くするため、 $b = 1$, $c = -0.5$ を採用した。更に、 ω に関しては、[1] や [9] 同様、 $\omega = 0.47$ を使い、 g は 2008 年度のヒストリカルボラティリティを推定し、その平均値の 4 倍の値を用いた。

次に、Lévy 型の小さいジャンプの検定方法について述べる。Lee and Hannig [9] では、QQ-test と呼んでいる方法を提案している。まずは、Lee and Hannig で与えられている命題を書いておく。

Theorem 5 (*Propositoin 3 in Lee and Hannig [9]*) Let J_t be as in (2.11) and $K \rightarrow \infty$ and $\Delta t K \rightarrow 0$. Suppose the process follows (2.2) and Assumption 1 in Lee and Hannig [9] is satisfied. Then, as $\Delta t \rightarrow 0$,

$$J_t \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

where $N(0, 1)$ denotes a standard normal random variable, and hence, as $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\Phi(J_t) \xrightarrow{d} U(0, 1),$$

where $\Phi(z)$ is the cumulative distribution function of standard normal variable z and $U(0, 1)$ denotes a uniform random variable.

この定理が述べていることは、株価過程がジャンプを持たない場合、統計量 J_t の分布が標準正規分布に収束していくことを言っている。従って、帰無仮説 H_0 として『時刻 $[0, t]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』とおくと、 J_t のデータ集合を QQ-plot したとき、概ね斜め 45 度の直線上に並

ぶことを言っている。よって、QQ-plot と 45 度の直線のグラフに、更に考えたい有意水準の信頼区間を付け、その信頼区間の外に位置するデータがあるときは、ジャンプが存在すると判定する。その後、Lee and Hannig [9] で belief measure と呼んでいる関数 $b(t)$ を計算し、“ $b(t) \geq 1 - (\text{有意水準})$ ”となっている時刻にジャンプがあったと判定する。この様にジャンプと判定されたデータから、Theorem 4 で大きいジャンプと判定したデータを除去すると、小さいジャンプが検出されたことになる。Belief measure などの詳細な説明、計算方法は Lee and Hannig [9] の Section 3.4 を参照せよ。

3 ジャンプ型拡散過程の検定結果

この節では、第 2 節で紹介した 4 種類のジャンプの検定方法のうち、ジャンプ型拡散過程に用いることができる BNS、JO、LM の 3 方法による結果を与える。2008 年度（2008 年 4 月 1 日から 2009 年 3 月 31 日）の日経 225 及び日経 225 を構成している 208 銘柄[¶]を各業種ごとに分け、それらの 5 分間隔のデータを中心に解析した結果を紹介する。昼休みや夜間の取引が無い時間の（対数）収益率は単純に無視することとする。有意水準は特に断りがない限り 1% とする。データは日経 NEEDS から購入したティックデータを使用する。

3.1 ジャンプの有無に関する結果

3.1.1 Barndorff-Nielsen and Shephard と Jiang and Oomen の方法による結果

本節では、BNS と JO の方法を用いた 2008 年度の日本の株式市場における、ジャンプの存在に関する検定を行った結果を与える。これらの方法は、前述した通り、ある一定の期間内にジャンプが存在したか、しなかったかを検定することが可能だが、ジャンプが存在した時刻まで特定することはできない。日経 225 及び各業種の各統計量の平均値は表 1 のようになった。BNS の方法による G, H, J はそれぞれ式 (2.3)、(2.4)、(2.5) で与えられている。また、JO の方法による diff、log、ratio はそれぞれ Theorem 2 の式 (i)、(ii)、(iii) で与えられている。

まず、BNS の検定方法による結果について述べる。BNS の検定方法は前述の通り、帰無仮説 H_0 は『時刻 $[0, t]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』としたとき、標準正規分布に対する下側の片側検定となる。表 1 の統計量 G, H, J の列は、各業種内での各統計量の平均値を与えている。統計量 G, H, J のいずれも大きく負の値になっていて、すべての株価に対して帰無仮説 H_0 を棄却した。特に、統計量 G の方が統計量 H, J よりも大きく負の値になっている。この傾向は BNS の論文でも報告され、ボラティリティが急激に減少した際に起こるとされている。2008 年度は 10 月までボラティリティが上昇し、11 月以降に下降していった。この点を詳しく調べるために、2008 年度のデータを 4 月からと 11 月からに分けて解析した。この場合、いずれの期間も帰無仮説 H_0 を棄却したが、11 月からの方がより大きく負の値を取った。

[¶]2008 年度及び 2009 年度に株式分割等があり、解析するのに不適切と思われる銘柄は除いた。

次に、JOの検定方法による結果について述べる。表1に、各統計量の平均値と各業種内での帰無仮説が棄却された企業数が書かれている。これも前述した通り、JOの検定方法は帰無仮説 H_0 は『時刻 $[0, t]$ 上で Y にはジャンプが存在しない』としたとき、標準正規分布に対する両側検定となる。表1の統計量diff, log, ratioの列も、BNSの検定同様、各業種内での各統計量の平均値を与えている。JOの検定方法ではほとんどの株価に対して帰無仮説 H_0 を棄却することができず、採択する結果となった。表1の棄却数の列が、各検定統計量での各業種内で、帰無仮説 H_0 を棄却した企業数を表している。この要因として考えられるのが、統計量(i), (ii), (iii)の持つ性質である。ジャンプには正の方に変化するものと、負の方に変化するものとが存在する。JO以外の検定方法では、2乗や絶対値を考えることで大きな変化を一方向に統一し統計量を考え、その統計量に対して片側検定を行えば良かった。しかし、JOの検定方法は正方向へのジャンプと負方向へのジャンプをそのまま足しているため、下落直後の反発などが存在すると大きな変動を打ち消す結果となる。従って、異方向への大きな変化が同程度存在する場合、その期間内での検出力が弱まる結果となる。後述のLMの検定方法から計算された2008年度のジャンプサイズの平均値を見てみると、負の値ではあるものの0に近く、異方向への変化同士が打ち消しあっていると考えられる。

3.1.2 Lee and Mykland の方法による結果

この節では、LMの方法によるジャンプの存在に関する検定結果を与える。その検定結果は、表2の回数の列に各業種内での2008年度のジャンプがあった平均回数、統計量の列に各業種内での平均統計量 L_i と $\hat{\sigma}_i$ の値を与えられている。

日経225を中心に検定結果を述べていく。日経225のジャンプの回数は他の個別企業のジャンプの回数に比べると小さくなっているのが分かる。これは、日経225が市場を平均化した指標であるためだと考えられる。また、図1は日経225で2008年度にジャンプが存在した時刻を日経平均株価と共にプロットしたものである。この図1の中央辺りで多くのジャンプを検出している。これは、リーマンショックが起きた2008年9月に当たる。また、リーマンショック以外の時刻にもジャンプを検出していることが分かる。リーマンショックの近辺を詳しく見ていく。9月に連続でジャンプを検出した後、日経平均株価が大きく変動しているにも関わらず、その後ジャンプの検出がなくなっていることが分かる。このジャンプを検出していない期間が2008年10月になる。この点を詳しく調べるために、2008年9月と10月の日経平均株価、統計量 L_i と $\hat{\sigma}_i$ の変化を図2に与えている。図2の一番上のグラフが、日経平均株価の推移である。これを見ると、9月よりも10月の方が激しく変動しているのが分かる。図2の真ん中のグラフが統計量 L_i の値を与えているが、9月に比べ10月の方が変動が小さくなっているのが見て取れる。図2の一番下のグラフが統計量 $\hat{\sigma}_i$ の値を与えている。統計量 $\hat{\sigma}_i$ は、粗く言うと5分間隔のボラティリティ（標準偏差）と考えられる。この値は、10月に急激に大きくなっていくことが分かる。つまり、9月の変化はジャンプによってもたらされ、10月の変化はボラティリティが大きくなったことによる変化だったと考えられ、ジャンプを検出しなかったと考えられる。日経225のような現象が他の個別株にも言えた。また、日経225に対してジャンプを検出した際に、それに連動するニュースがある程

度特定できた。その関連は、Barada and Kubo [2] で報告されている。

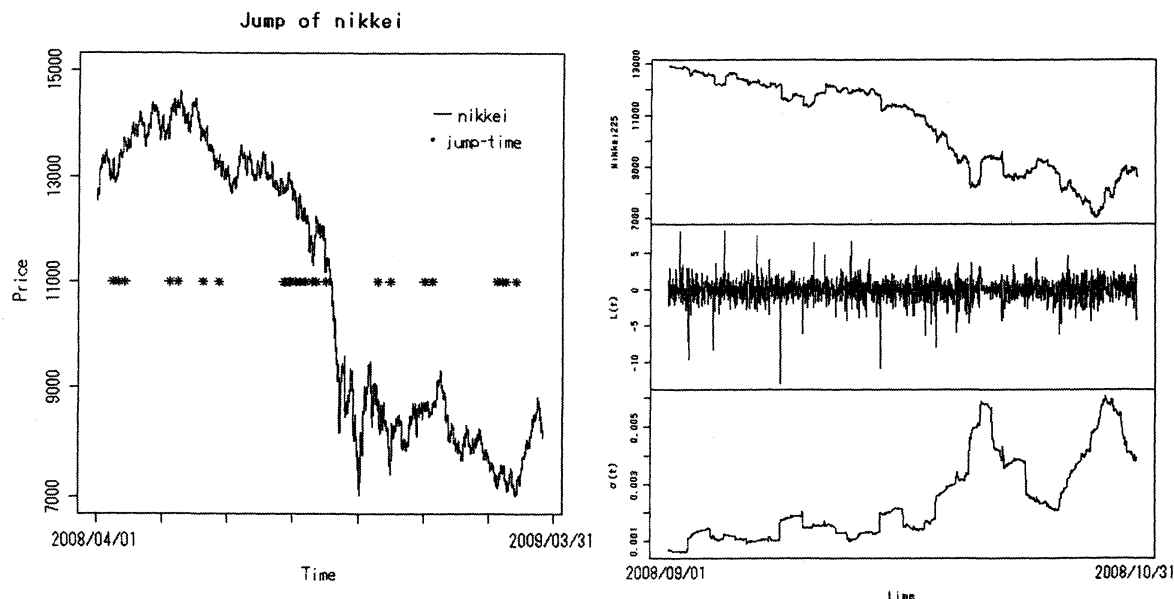


図 1: 日経 225 におけるジャンプが存在した時刻 図 2: 日経平均株価、統計量 L_i と $\hat{\sigma}_t$ の値

3.2 Lee and Mykland の方法によるジャンプサイズや頻度の分布の推定

LM の方法では、BNS の方法や JO の方法と異なり、ジャンプが存在した時間を特定することが可能であった。そのため、この節では、LM の方法を用いて、ジャンプサイズと頻度の分布を推定する。各業種のジャンプサイズの平均値は表 2 のサイズの列、頻度の平均値は表 2 の頻度の列に与えられている。また、それぞれの p 値というのは、各業種のジャンプサイズ及び頻度の分布と日経 225 のジャンプサイズもしくは頻度の分布を、Kolmogorov-Smirnov 検定で一致性を検定した際の p 値である。全体を通じて、2008 年度のジャンプサイズの平均値は負になっていることが分かる。金融危機があり、下げ基調であったことから妥当な結果である。

図 3 と図 4 に日経 225 との p 値が最も小さい不動産業界と、最も大きい電力業界のジャンプサイズの分布を描いた。分布の推定はガウス型のカーネルを用いたカーネル型推定 (KDE) を使った。また、同時に日経 225 のジャンプサイズの分布も描いている。実線が各業種で点線が日経 225 のジャンプサイズである。不動産業界は日経 225 に対して、より大きなジャンプが多数存在する。一方、安定株と考えられている電力業界は、個別株を平均化した日経 225 と同様のジャンプサイズの分布であったことが分かる。

図 5 では、2008 年度と 2009 年度の日経 225 のジャンプサイズの分布を同時に描いたグラフを与えている。ここでも KDE を用い、ガウス型とイパネクニコフ型のカーネルを用いている。外側の 2 つの山が 2008 年度の分布になる。2009 年度のジャンプサイズの平均値は 0.00083 であった。また、2008 年度と 2009 年度の Kolmogorov-Smirnov 検定の p 値は 0.001 である。従って、有意水

準 1% でも分布が同じであるという帰無仮説を棄却することとなる。よって、2008 年度のジャンプサイズの分布は、比較的市場が落ち着いていた 2009 年度のものと比べて、異なった分布であると言える。

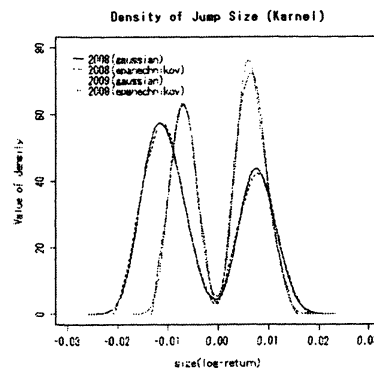
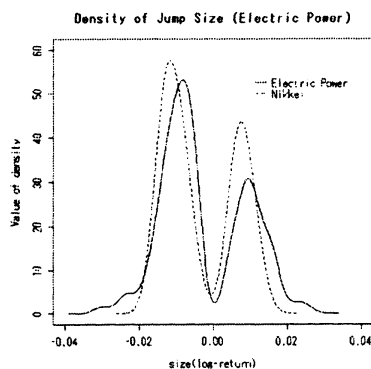
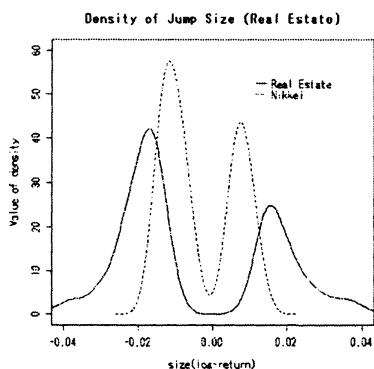


図 3: 不動産業界のジャンプサイ 図 4: 電力業界のジャンプサイズ 図 5: 2008 年度と 2009 年度の日
ズの分布と日経 225 の分布と日経 225 経 225 のジャンプサイズの比較

次に、ジャンプの頻度について述べる。ここでは、 x 軸の “1” は 1 年を意味する。これは表 2 の頻度の列でも同様である。従って、表 2 から日経 225 は、約 2 週間に 1 度の割合でジャンプが起きていることが分かる。ここでは同じ金融業界である銀行業界と保険業界を取り上げ、2008 年度の日経 225 のジャンプ頻度の分布を比較した。それぞれのグラフが図 6 と図 7 で与えられる。ここでもガウス型のカーネルを用いた KDE を使って分布を推定した。表 2 から分かる通り、それぞれの p 値は 1.15×10^{-5} と 0.692 である。グラフからも分かる通り、銀行業界は日経 225 とは大きく異なり、保険業界は類似しているのが分かる。同じ金融業界でも、違いが表れていることが分かる。

また、2008 年度と 2009 年度の日経 225 のジャンプ頻度の分布に対する比較を行った結果が図 8 で与えられている。2009 年度の分布との p 値は 0.287 であり、有意水準を 5% としても同じ分布であるという帰無仮説を棄却することが出来ない。

4 Lévy 型の確率過程の検定結果

本節では、Lee and Hannig [9] の検定方法により、Lévy 型のジャンプの存在の有無の検定及びその特徴をまとめる。特に、日経平均株価を中心に書き、LM の方法と比較する。

まず、日経平均株価に対する Lévy 型のジャンプの存在の有無に関して述べる。2008 年度の日経平均株価に対する QQ-plot (実線) とその信頼区間 (点線) を図 9 で与えている。2 本の直線は大きいジャンプとの境界となる。この QQ-plot や多くの論文等で報告されている通り、日経平均株価の対数収益率は正規分布から外れていることが分かり、別のノイズ、ここでは Lévy 型のノイズを考慮に入れることが妥当と判断される。従って、Lévy 型のジャンプの存在の有無を確認するための検定は必要なものとなる。

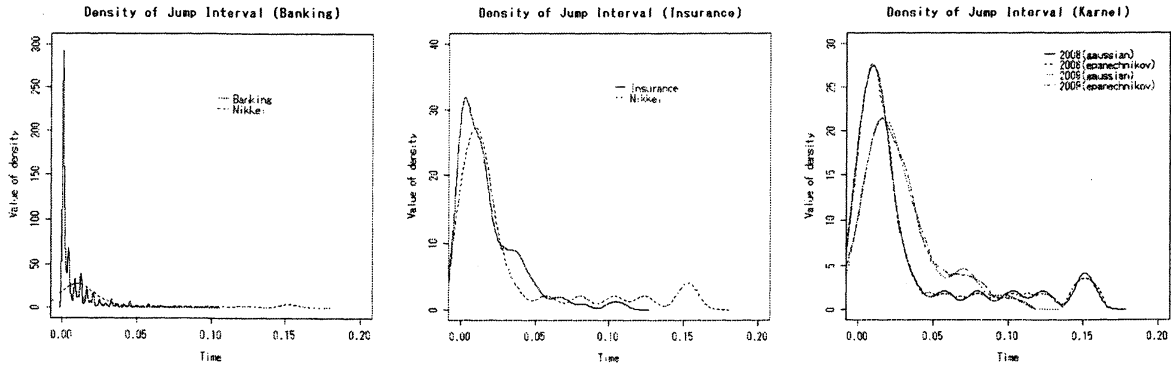


図 6: 銀行業界のジャンプの頻度 図 7: 保険業界のジャンプの頻度 図 8: 2008 年度と 2009 年度の日
の分布と日経 225 の分布と日経 225 経 225 のジャンプの頻度の比較

図 10 では、2008 年度の日経平均株価とそのボラティリティ、* が LM の方法で検出したジャンプ、△ が LH の方法で検出した大きいジャンプ、× が LH の方法で検出したすべてのジャンプ（大きいジャンプと小さいジャンプ）があった時点を意味する。この図 10 から分かる通り、LM の方法では検出されなかった、2008 年 10 月にも Lévy ジャンプを検出している。また、Lévy ジャンプはコンスタントに年間を通じて発生していることが分かる。LH の方法による 2008 年度の日経 225 の大きいジャンプの検出個数は 32 個、小さいジャンプの検出個数は 22 個であった。全体のジャンプの個数も LM の方法よりも増える結果となった。||

次に、2008 年度と 2009 年度の Lévy ジャンプ、大きいジャンプ、小さいジャンプのジャンプサイズの分布をガウス型の KDE を用いて推定した。それぞれの形状は図 11、図 12、図 13 である。また、2008 年度のそれぞれの平均値は -0.0058 , -0.0053 , -0.0066 で、2009 年度の平均値は 0.00054 , 0.0007 , -0.00048 であった。** 更に、2008 年度と 2009 年度の分布の一致性を表す p 値はそれぞれ 5.37×10^{-8} , 5.89×10^{-6} , 6.66×10^{-3} であった。いずれも分布に有意差があると考えられる。但し、2009 年度の小さいジャンプの検出個数は 4 個であるため、信用度は低いと考えられる。最後に、2008 年度と 2009 年度の Lévy ジャンプ、大きいジャンプ、小さいジャンプのジャンプ頻度の分布をガウス型の KDE を用いて推定した。それぞれの形状は図 14、図 15、図 16 である。また、2008 年度のそれぞれの平均値は 0.0179 , 0.0305 , 0.0435 で、2009 年度の平均値は 0.0239 , 0.0279 , 0.1622 であった。†† 更に、2008 年度と 2009 年度の分布の一致性を表す p 値はそれぞれ 0.3486 , 0.1843 , 0.3647 であった。いずれも分布に有意差があるとは考えられない。但し、ここでも 2009 年度の小さいジャンプの検出個数は少ないため、信用度は低いと考えられる。

|| 個別株に関してはこの限りではなく、LH の方法の方が小さいジャンプを考慮に入れているにも関わらず、ジャンプ全体の個数が減る結果もある。このような結果が生じるのは、当然、検定統計量は類似しているが異なるものであるため、LM の大きいジャンプの個数より、LH の Lévy ジャンプ全体の個数の方が少なくなる結果が生じ得ると考えられる。特に、 $\hat{\sigma}_t^2$ と $\hat{\sigma}_t^2$ で BPV か 2 乗和かの違いが考えられる。しかし実際に、市場での真のジャンプの個数を把握することは不可能であるため、どちらがより正確なのか区別をつけることも不可能である。いずれにせよ、今後、更なる研究が必要である。

** 個別株でも、概ねすべてのジャンプの種類に対して負の平均値を持った。

†† 個別株でも小さいジャンプの方が大きいジャンプに比べて頻度が少なくなる傾向がみられた。

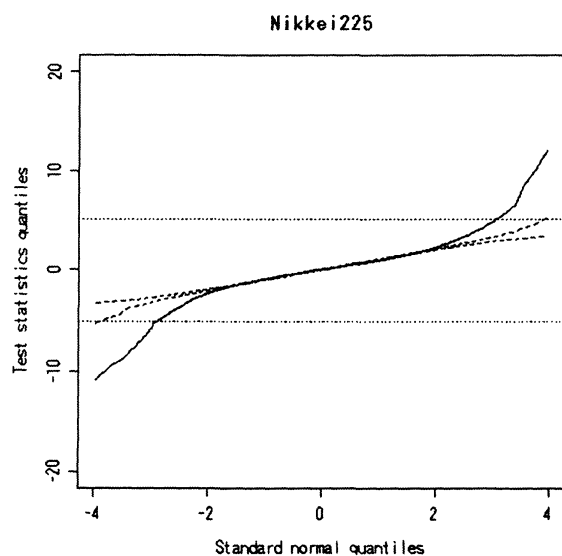


図 9: 日経平均株価の QQ-plot

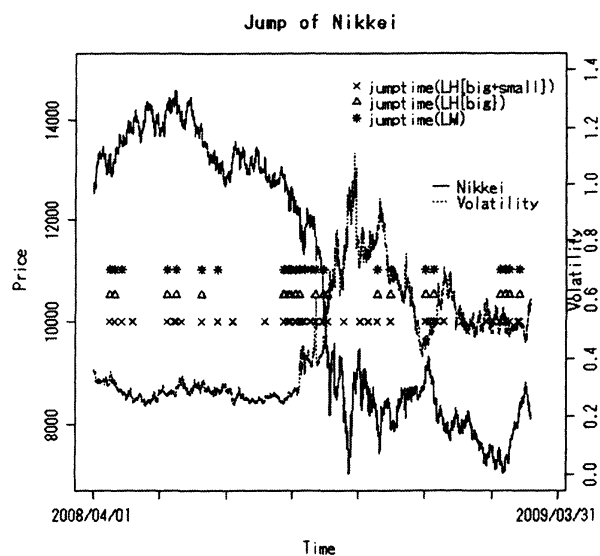


図 10: 日経平均株価とボラティリティ及び LM と LH によるジャンプの存在の検定結果

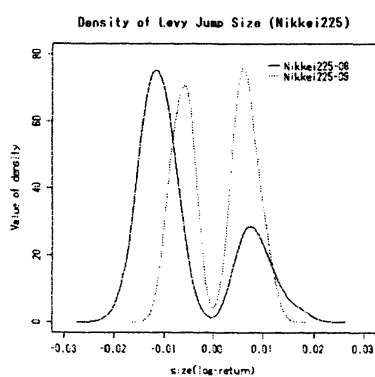


図 11: Lévy ジャンプサイズ

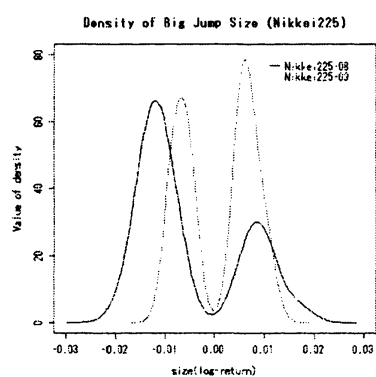


図 12: 大きいジャンプサイズ

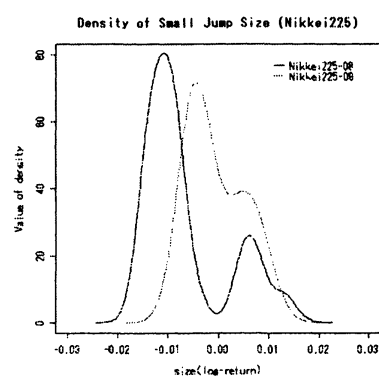


図 13: 小さいジャンプサイズ

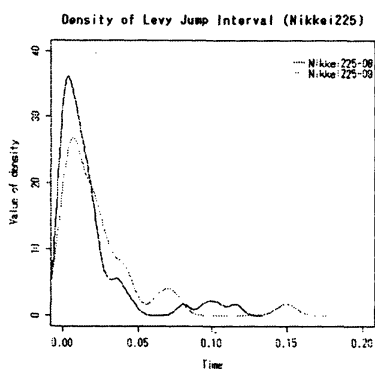


図 14: Lévy ジャンプ頻度

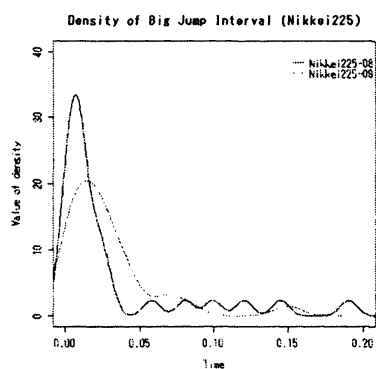


図 15: 大きいジャンプ頻度

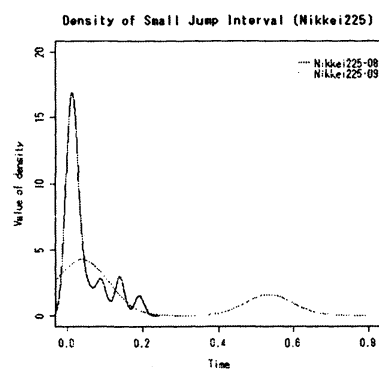


図 16: 小さいジャンプ頻度

参考文献

- [1] Y. Aït-Sahalia, and J. Jacod, *Testing for jumps in a discretely observed process*, Ann. Statist., Vol.37, No. 1, pp.184-222, 2009.
- [2] Y. Barada, and Y. Kubo, *Test for existence of jumps in Japanese stock market under the financial crisis (in Japanese)*, Bachelor thesis (Hosei university), 2010.1.
- [3] Y. Barada, Y. Kubo, and K. Yasuda, *Testing for jumps in Japanese stock market under the financial crisis through high-frequency data*, submitted.
- [4] Y. Barada, and K. Yasuda, *Testing for Levy type jumps in Japanese stock market under the financial crisis using high-frequency data*, in preparation.
- [5] O.E. Barndorff-Nielsen, and N. Shephard, *Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps*, Journal of Financial Econometrics, Vol.2, No.1, pp.1-48, 2004.
- [6] O.E. Barndorff-Nielsen, and N. Shephard, *Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation*, Journal of Financial Econometrics, Vol.4, No.1, pp.1-30, 2006.
- [7] G.J. Jiang, and R.C.A. Oomen, *Testing for jumps when asset prices are observed with noise a “swap variance” approach*, Journal of Econometrics, Vol.144, pp.352-370, 2008.
- [8] S.S. Lee, and P.A. Mykland, *Jumps in Financial Markets: A New Nonparametric Test Jump Dynamics*, The Review of Financial Studies, Vol.21, no.6, pp.2535-2536, 2008.
- [9] S.S. Lee, and Jan Hannig, *Detecting jumps from Lé jump diffusion processes*, Journal of Econometrics, Vol.96, pp.271-290, 2010.
- [10] C. Mancini, *Estimation of the characteristics of the jumps of a general poisson-diffusion model*, Scandinavian Actuarial Journal, No.1, pp.42-52, 2004.
- [11] C. Mancini, *Non-parametric Threshold Estimation for Models with Stochastic Diffusion Coefficient and Jumps*, Scandinavian Journal of Statistics, Vol.36, Issue 2, pp.270-296, 2009.
- [12] Y. Shimizu, and N. Yoshida, *Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations*, Statistical Inference for Stochastic Processes, Vol.9, No.3, pp.227-277, 2006.
- [13] Y. Shimizu, *Threshold Estimation for Jump-type Stochastic Processes from Discrete Observations (in Japanese)*, Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics, Vol.57, No.1, pp.97-118, 2009.

業種	企業数	統計量			統計量			棄却数 (JO)		
		<i>G</i>	<i>H</i>	<i>J</i>	diff	log	ratio	diff	log	ratio
電気機器	30	-44.157	-13.649	-7.185	0.251	0.167	0.167	5	2	2
化学工業	16	-53.439	-16.282	-12.234	0.545	0.394	0.394	2	1	1
機械	14	-56.386	-15.323	-12.631	1.735	1.019	1.019	2	2	2
非鉄金属	12	-60.954	-16.793	-11.207	1.394	0.884	0.883	4	3	3
食品	10	-35.812	-12.015	-9.311	0.372	0.236	0.234	2	1	1
銀行	9	-48.453	-14.086	-10.251	0.098	-0.048	-0.049	1	0	0
自動車	9	-62.825	-18.228	-10.402	-0.699	-0.634	-0.635	3	2	2
窯業	8	-62.915	-18.329	-12.624	0.166	-0.035	-0.035	2	0	0
建設	8	-46.511	-14.847	-11.524	-0.064	0.0001	3.39E-05	0	0	0
医薬品	8	-41.347	-13.514	-12.229	-0.910	-0.725	-0.725	0	0	0
サービス	7	-36.691	-12.161	-7.497	-1.82	-1.534	-1.536	5	3	3
商社	7	-39.455	-12.380	-10.287	-0.324	-0.291	-0.291	1	1	1
小売	7	-38.325	-12.898	-8.142	0.559	0.423	0.422	2	2	2
鉄道	7	-61.339	-18.661	-11.753	1.954	1.496	1.495	1	1	1
繊維	6	-132.397	-28.507	-13.048	6.529	3.972	3.967	4	3	3
不動産	5	-42.031	-14.125	-12.470	0.893	0.742	0.742	1	1	1
精密機器	5	-33.573	-11.445	-10.832	-1.161	-0.835	-0.835	3	3	3
通信	5	-41.840	-13.615	-12.036	-1.617	-1.337	-1.337	1	1	1
鉄鋼	4	-67.901	-19.349	-17.250	0.445	0.288	0.288	0	0	0
電力	3	-57.624	-18.013	-16.631	-0.226	-0.194	-0.194	0	0	0
紙	3	-56.222	-17.102	-13.271	1.923	1.130	1.129	1	1	1
海運	3	-34.883	-12.052	-11.052	-0.696	-0.592	-0.592	0	0	0
他製造	3	-34.841	-11.907	-10.663	-1.835	-1.553	-1.553	1	1	1
証券	3	-41.395	-13.473	-13.001	0.621	0.463	0.463	0	0	0
ゴム	2	-44.224	-14.824	-14.073	0.341	0.277	0.277	0	0	0
保険	2	-34.068	-11.886	-11.601	-0.683	-0.593	-0.593	0	0	0
陸運	2	-46.921	-15.177	-15.144	-1.160	-0.933	-0.933	0	0	0
造船	2	-109.386	-28.824	-27.539	1.300	0.834	0.833	0	0	0
ガス	2	-51.721	-16.417	-13.277	0.060	0.048	0.048	0	0	0
倉庫	1	-44.834	-15.165	-15.165	-4.117	-3.437	-3.438	1	1	1
石油	1	-6.054	-4.473	-6.133	0.498	0.430	0.430	0	0	0
他金融	1	-38.693	-13.112	-13.112	5.401	4.514	4.511	1	1	1
水産	1	-74.493	-21.147	-21.147	0.045	0.032	0.032	0	0	0
空輸	1	-74.008	-20.650	-20.650	2.789	1.920	1.920	1	0	0
鉱業	1	-60.734	-18.712	-18.712	0.194	0.148	0.148	0	0	0
日経 225	1	-25.926	-9.064	-9.064	-1.684	-1.453	-1.453	0	0	0

表 1: BNS 及び JO の検定方法による各統計量の平均値と JO の方法で棄却された企業数

業種	企業数	回数	統計量		サイズ	頻度		
			L_i	$\hat{\sigma}_t$	サイズ	p 値	頻度	p 値
電気機器	30	94.4	-0.049	0.0027	-0.0035	0.007	0.010	0.0002
化学工業	16	87.5	-0.050	0.0024	-0.0037	0.012	0.011	0.001
機械	14	108.8	-0.052	0.0029	-0.0032	0.073	0.009	1.45E-05
非鉄金属	12	115.7	-0.052	0.0027	-0.0028	0.076	0.008	1.95E-06
食品	10	71.1	-0.037	0.0023	-0.0038	0.028	0.013	0.057
銀行	9	114.3	-0.054	0.0027	-0.0035	0.075	0.008	1.15E-05
自動車	9	129.5	-0.054	0.0026	-0.0023	0.205	0.007	7.83E-06
窯業	8	89.5	-0.051	0.0028	-0.0046	0.015	0.010	0.001
建設	8	68.1	-0.034	0.0026	-0.0058	0.0008	0.014	0.045
医薬品	8	81.2	-0.034	0.0021	-0.0042	0.086	0.011	0.009
サービス	7	75.7	-0.051	0.0026	-0.0044	0.035	0.012	0.033
商社	7	73.7	-0.053	0.0027	-0.0029	0.088	0.013	0.003
小売	7	71	-0.043	0.0026	-0.0038	0.007	0.013	0.031
鉄道	7	90.2	-0.058	0.0016	-0.0028	0.281	0.010	0.001
繊維	6	214.0	-0.078	0.0022	-0.0035	0.096	0.004	9.70E-09
不動産	5	58.2	-0.039	0.0033	-0.0047	4.74E-06	0.016	0.153
精密機器	5	68.2	-0.038	0.0027	-0.0055	0.007	0.013	0.077
通信	5	86.0	-0.028	0.0023	-0.0028	0.259	0.011	0.0007
鉄鋼	4	99.7	-0.059	0.0007	-0.0050	0.017	0.009	0.0003
電力	3	75.0	-0.047	0.0017	-0.0026	0.734	0.013	0.072
紙	3	109.3	-0.050	0.0026	-0.0043	0.038	0.009	0.0003
海運	3	47.6	-0.043	0.0029	-0.0022	0.0007	0.019	0.523
他製造	3	65.3	-0.045	0.0023	-0.0063	0.067	0.015	0.031
証券	3	53.3	-0.045	0.0030	-0.0030	0.0007	0.018	0.459
ゴム	2	68.0	-0.032	0.0027	-0.0022	0.002	0.014	0.329
保険	2	51.5	-0.035	0.0034	-0.0056	0.001	0.018	0.692
陸運	2	62.0	-0.054	0.0021	-0.0045	0.034	0.015	0.405
造船	2	113.0	-0.057	0.0027	-0.0052	0.005	0.008	0.0005
ガス	2	87.5	-0.042	0.0020	-0.0022	0.656	0.011	0.003
倉庫	1	54.0	-0.041	0.0027	-0.0084	0.001	0.018	0.633
石油	1	44.0	-0.026	0.0024	-0.0036	0.113	0.020	0.648
他金融	1	43.0	-0.053	0.0037	-0.0078	0.0005	0.023	0.899
水産	1	122.0	-0.048	0.0023	-0.0019	0.061	0.008	0.0005
空輸	1	187.0	-0.104	0.0011	-0.0015	0.001	0.005	9.75E-07
鉱業	1	220.0	-0.072	0.0027	-0.0029	0.011	0.004	6.09E-10
日経 225	1	30.0	-0.022	0.0015	-0.0033	-	0.032	-

表 2: LM の方法によるジャンプ回数、統計量 L_i , $\hat{\sigma}_t^2$ 、サイズ (及び p 値)、頻度 (及び p 値)