

Configuration space 上の measure のエルゴード分解

福井大学教育学部 下村宏彰 (Hiroaki Shimomura)

§1. Introduction

X : connected C^∞ -manifold, T_x : X 上の配位空間,
 μ : T_x 上の $\text{Diff}_0(X)$ -quasi-invariant probability measure
とする。(後述の定義参照) ここに

$\text{Diff}_0(X) = \{\psi \mid \psi: \text{diffomorphism on } X \text{ with compact support}\}$ である。この報告の目的は標題のように, μ のエルゴード分解が可能であることを示すことにある。細かい内容に入る前に, この分解の意義について触れておこう。

今, μ から自然に誘導される $\text{Diff}_0(X)$ の標準表現 U_μ ,

$$(1) U_\mu(\psi) : f(x) \in L^2_\mu(T_x) \longrightarrow \sqrt{\frac{d\psi_\# \mu}{d\mu}}(\psi) f(\psi^{-1}(\psi)) \in L^2_\mu(T_x),$$

ここには $T_\psi \{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \{\psi(x_1), \dots, \psi(x_n), \dots\}$ と考えよう。

若し μ がエルゴディクならば, U_μ は既約ユニタリ表現である。更に標準表現と異なる別の type の表現との関わりを論ずることもできる。その為に少しく準備をしよう。

m を X 上の局所的にはルバーク測度と同値で, λ の density

は smooth な σ -finite measure とする。 X の n 個の直積 X^n 上に, m の直積測度 m^n を作る。 $\rho \in n$ 次対称群 $\mathcal{O}_n$ のユ=タリ表現, χ の表現空間を $\mathcal{W}$ としよう。すると表現空間を $H^\rho := \{ f \in L^2_{m^n}(X^n, \mathcal{W}) \mid f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \rho(\sigma)^{-1} f(x_1, \dots, x_n) \}$ にもつ $\mathcal{L}if.(X)$ の表現 $\mathcal{V}^\rho_n$ が,

$$(2) \quad \mathcal{V}^\rho_n(\psi) : f(x_1, \dots, x_n) \in H^\rho \longrightarrow \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{d\psi^m}{dm}(x_i)} f(\psi^{\dagger}(x_1), \dots, \psi^{\dagger}(x_n))$$

として表さる。 Vershick-Gelfand-Graev は [4] において, 以下の表現

$$(3) \quad \mathcal{U}_\mu(\psi) \otimes \mathcal{V}^\rho_n(\psi) = : \mathcal{U}^\rho_\mu(\psi)$$

を基本表現と呼び, χ の性質を特に μ が Poisson measure であるときに詳しく調べた。 $\mathcal{U}^\rho_\mu$ は ρ が既約, μ がエルゴディックであれば既約ユ=タリ表現になる。 ([4]) したがって, quasi-invariant measure のエルゴード分解は表現の立場からいえば, 既約分解に対応してゐることになる。以下の分解が可能であることをこの節を通じてみてゆくことにしよう。

§2 Basic notion

始めに $\mathcal{T}_X = \{ \gamma \mid \gamma \text{ は } X \text{ の高々可算部分集合で, } \forall K : \text{コンパクト集合に対して, } K \cap \gamma \text{ は有限集合} \}$ とおき, $\mathcal{T}_X \subset X$ 上の配位空間と呼ぶ。更に $B_X^n := \{ \gamma \mid |\gamma| = n \}$, $B_X := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_X^n$

X 上 $\Delta_X := \{x \mid |x| = \infty\}$ とおく。ここで $|x|$ は集合 x の要素の個数を表す。 T_X 上には, 各 B : Borel set in X を固定してできる写像: $x \longrightarrow |x \cap B|$ を可測にする最小の σ -field $\mathcal{C}$ を考える。

定理 1. $(T_X, \mathcal{C})$ は測度論的な意味で standard space である。(従って, この上の任意の確率測度は $\mathcal{C}$ の任意の sub- σ -field に関して条件付き確率測度で分解できる) となる。([1], [3])

次に $(T_X, \mathcal{C})$ 上の確率測度 μ について考えよう。若し μ が T_X 上の変換 T_ψ について stable, i.e., $T_\psi \mu \simeq \mu$ for all $\psi \in \text{diff}_0(X)$ となるならば, $\mu \in \text{diff}_0(X)$ -quasi-invariant と呼ぶ。又このような μ が更に条件

" $\mu(T_\psi^{-1}(A) \ominus A) = 0$ for all $\psi \in \text{diff}_0(X)$ が成り立つのは, $\mu(A) = 1$ 或 0 の時に限る" を満たす時, $\mu \in \text{diff}_0(X)$ -ergodic と呼ぶ。当面の目標は, 適当に測度空間 (Λ, ν) を定め, $\mu = \int \mu_\lambda \nu(d\lambda)$, $\mu_\lambda \in \text{diff}_0(X)$ -ergodic, かつ $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \mu_\lambda \perp \mu_{\lambda'}$ と μ を分解する = ところにある。

さて $\alpha := \mu(B_X)$, $\beta := \mu(\Delta_X)$ とおくと, $\mu = \alpha \mu_1 + \beta \mu_2$, $\mu_1(E) := \mu(E \cap B_X) / \alpha$, $\mu_2(E) := \mu(E \cap \Delta_X) / \beta$ である。 μ_1 のほうは $\mu_n := \mu_1(B_X^n)$ とおいて更に分解させ,

$\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mu_{1,n}$, $\mu_{1,n}(E) := \mu_1(E \cap B_X^n) / \alpha_n$ となる。
 B_X^n は $\text{diffeo.}(X)$ の作用に閉じて不変な集合だから, $\mu_{1,n}$ は
 $\text{diffeo.}(X)$ -quasi-invariant measure である。特に, 次の定理が
 成り立つ。

定理2. B_X^n 上の $\text{diffeo.}(X)$ -quasi-invariant measure は,
 0でないものは m_n と同値になる。ここで m_n は X^n 上の直積
 測度 m^n , (X は $\tilde{X}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$ 上の
 測度とみなす), の写像 $p_n: (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{X}^n \rightarrow$
 $\{x_1, \dots, x_n\} \in B_X^n$ による image measure である。

定理2は後述の補題2の系としても得られ, 略述を述べるつもり
 であるから, ここでは, X の証明を省略するが, この定理の
 直接の帰結として, B_X^n 上の $\text{diffeo.}(X)$ -準不変測度は, 0でない
 ものは, 必ずエルゴード的になることがわかる。したがって
 μ_1 については $\{\mu_{1,n}\}$ の形での解ができてくることになる。
 μ_2 のほうについては考えよう。以後 $\mu(\Delta_X) = 1$ とする。

ここで集合 $\tilde{X}^\infty := \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in X^\infty \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$
 X は, $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ は集積点を持たない $\}$ を表に出し, $\tilde{X}^\infty$
 から Δ_X への自然な写像 $p: (x_1, \dots, x_n, \dots) \rightarrow \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$
 の cross section S について考えよう。

今, X の相対コンパクトな連結開集合の増大列 $\{X_n\}$ で
 $\overline{X_n} \subset X_{n+1}$, $X_n \uparrow X$ となるものをいって固定する。

すると, この列に附随して次のような性質をもつ, measurable
 cross section S が存在する。([4])

" $y \in \Delta_X$ に対し $S(y) = (X_1, \dots, X_n, \dots)$ と y の元を list
 up する手順は, まず X_1 の元を最初に並べ, 次に $X_2 \setminus X_1$
 の元を並べ, $\dots$ 以下 $X_n \setminus X_{n-1}$ の元をというように $\mathbb{N}_k$ に並
 べていったものである" S を admissible という。

S は one-to-one な可測写像であるから Δ_X の measurable
 set の S による image は $\tilde{X}^\infty$ の measurable set である。

$\text{Diff}_0(X)$ の元 g は $\tilde{X}^\infty$ の元 x に対用射的に作用させる = とに
 よって $\tilde{X}^\infty$ 上の変換 T_g が定義 (既に与えられたものと同じ記
 号を使う) $\tilde{X}^\infty$ 上の measure の quasi-invariance, ergodicity
 も以前と同様に定義される。

定理 3. ([4]) $\tilde{X}^\infty$ 上の $\text{Diff}_0(X)$ -quasi-invariant prob. meas
 μ が ergodic であるとき, tail- σ -field $\mathcal{B}_\infty$ 上で μ が
 trivial i.e., $\mu(A) = 1$ or 0 if $A \in \mathcal{B}_\infty$, とは同値であ
 る。ここには $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty))$, $P_n: X = (X_1, \dots, X_n, \dots)$
 $\longrightarrow (X_{n+1}, \dots)$, $\mathcal{B}(\tilde{X}^\infty)$ は $\tilde{X}^\infty$ の Borel 集合族である。

そこで, 上のような admissible section S をとって ΔX 上の確率測度 μ から次のような方法で, $\tilde{X}^\infty$ 上の確率測度 $\hat{\mu}$ を定義することにしよう。

$$\hat{\mu}(E) := \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\infty} C(\sigma) (S\mu)\sigma(E) \quad \text{for } E \in \mathcal{B}(\tilde{X}^\infty),$$

すなわち $\{C(\sigma)\}$ は positive sequence で $\sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\infty} C(\sigma) = 1$,

$\mathcal{C}_\infty$ は N 上の finite permutation 全体を表す。又 $(S\mu)\sigma$ は

写像 $\gamma \in \Gamma_X \xrightarrow{S} S(\gamma) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) \xrightarrow{\sigma} (\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)}, \dots)$
 $=: (S(\gamma))\sigma \in \tilde{X}^\infty$ に与える μ の image measure である。

定理 4. ([4])

(a) $\mu: \text{Diff}_0(X)$ -quasi-inv iff $\hat{\mu}$ is so.

(b) $\mu: \text{Diff}_0(X)$ -ergodic iff $\hat{\mu}$ is so

(c) $\tilde{X}^\infty$ 上の $\mathcal{C}_\infty$ -quasi-inv prob meas μ_1 が

$$\mu_1\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_\infty} S(\Gamma_X)\sigma\right) = 1 \quad \text{を満たせば } p\mu_1 = \mu \quad \text{とすると}$$

$$\hat{\mu} \cong \mu_1.$$

証明は $p\hat{\mu} = \mu$ であること, 及び $\forall \gamma \in \Delta_X$ と $\forall \psi \in \text{Diff}_0(X)$
 によって, $\exists \sigma(\psi, \gamma) \in \mathcal{C}_\infty$, s.t., $S(\psi^{-1}(\gamma)) = \psi^{-1}(S(\gamma))\sigma(\psi, \gamma)$
 であることに注意すれば容易に check できる。

§3. B_Y 上の $\mathcal{L}iff_0(Y)$ -quasi-invar measure と $\mathcal{L}iff_0(X)$ の 1 径数部分群について.

始めに, X の support が相対コンパクトな連結開集合 Y に含まれる $\mathcal{L}iff_0(X)$ の元全体を $\mathcal{L}iff_0(Y)$ で表すことにする. §2 の admissible cross section に用いた P の記号を使うと, $\mathcal{L}iff_0(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}iff_0(X_n)$ となる. (以後 Y は X_n のうちの任意のひとつを表わすものとする.)

さて $\overline{T}_X$ の元を $\sigma = (\gamma \cap Y) \cup (\gamma \cap Y^c)$ と分解して考えることにすると, $\overline{T}_X \simeq B_Y \times \overline{T}_{Y^c}$ とみなすことができる. $\pi_Y: \sigma \in \overline{T}_X \longrightarrow \gamma \cap Y$, $\pi_{Y^c}: \gamma \in \overline{T}_X \longrightarrow \gamma \cap Y^c \in \overline{T}_{Y^c}$ とおこう. $X \subset B_Y$ には, Y の各 Borel set B に対してできる写像: $\sigma \in B_Y \longrightarrow |\gamma \cap B|$ が可測となる最小の σ -field $\mathcal{C}_Y$ がある. $\overline{T}_{Y^c}$ にも同様に σ -field $\mathcal{C}_{Y^c}$ を定義すると, 上の対応は可測空間として同型である.

$(\overline{T}_X, \mathcal{C})$ 上の $\mathcal{L}iff_0(Y)$ -quasi-inv prob meas μ を $\pi_{Y^c}^{-1}(\mathcal{C}_{Y^c})$ に關して条件付き確率測度分解すると, 自然に $(B_Y, \mathcal{C}_Y)$ 上の確率測度が得られる. X についての開 B_Y 上の, 特に X の support が B_Y^n にある $\mathcal{L}iff_0(Y)$ -準不変測度 ν について考えてみることにしよう. $f_n \in \tilde{Y}^n$ から B_Y^n への自然な写像: $(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ として, f_n の

可測 cross section S をとり 以前のように,

$$\widehat{v} = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} (Sv) \sigma \quad \text{と定義してやると } \widehat{v} \text{ が } \psi\text{-quasi-inv}$$

$\eta = \text{とと}$, v が $\psi\text{-quasi-inv } \eta = \text{とと}$ は同じになる。

さて $\widehat{Y}^n$ は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の形の可算個の開集合, (こゝで O_i は写像 ψ_i によつて $\mathbb{R}^d$ ($d = \dim(X)$) と diffeomorphic な相対コンパクトな開集合であり, $i \neq j \Rightarrow O_i \cap O_j = \emptyset$) によつて被覆される。 $\text{Lift}_0(Y)$ は $\widehat{Y}^n$ 上に推移的に作用するから $\text{Lift}_0(Y)$ のある可算部分集合 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があり,

$\widehat{Y}^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(O_1 \times \cdots \times O_n)$ がこのような任意の $O_1 \times \cdots \times O_n$ によつて成り立つ。従つて $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から生成した群 G_Λ によつて,

$\widehat{v}$ が単不変であるのは $\widehat{v}(O_1 \times \cdots \times O_n) > 0$ である。こゝで次の補題を準備する。

補題 1. $\mathbb{R}^d$ 上での性質をもつ cpt support をもつ diffeomorphism の 1 径数部分群 $\pi_i^l(t)$ が存在する。すなわち

$\forall l \in \mathbb{N}$ と $\max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i| < l$, $|t| < l$ なる任意の $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ と $t \in \mathbb{R}$ によつて, $\pi_i^l(t)(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_i + t, \dots, \xi_d)$.

このような 1 径数部分群の存在は, $\mathbb{R}$ 上で $f_l(s) = 1$, $\text{if } |s| \leq 2l$, $f_l(s) = 0$, $\text{if } |s| \geq 3l$ とする C^∞ -class の関数 f_l をとり $\mathbb{R}^d$ 上での微分方程式:

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X_1) \cdots f_d(X_d) e_i, \quad e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

を解き, $t=0$ の初期値 ξ をもつ解 $\pi_i^l(t, \xi)$ をとることにし, 2 得らる。

l と i をすべし 2 動かして得らる $\{\pi_i^l(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ から生成さる $\text{diffe}_0(\mathbb{R}^d)$ の部分群 G_0 とおくと, 容易に判るようには,

$$0 \leq l, \quad \forall t = (t_1, \dots, t_n), \quad \exists \psi \in G_0 \text{ s.t.}, \quad \max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i| < l \Rightarrow$$

$$\psi(\xi) = \xi + t. \quad \text{また}$$

$\mathbb{R}^d$ 上 G_0 の作用で準不変な σ -finite measure m はルベーグ測度と等値である。

G_0 の元を $\psi_i (i=1, 2, \dots, n)$ で引く序として $\text{diffe}_0(Y)$ の元を生成しておく。 X の全体と $G_{0,1}$ とおくと $0, X, \dots, X O_n$ が最初に述べた可算個の範囲を動くとき, $G_{0,i}$ は高々可算個の部分群を形成する。よって G_1 と合わせ 2 次群とななり立つ。

補題 2. $\text{diffe}_0(Y)$ に高々可算個の 1 径数部分群 π_i^n と可算群 G_λ^n が存在して B_r^n 上の任意の確率測度 ν について 2 次群とは同値になる。

(a) ν : $\text{diffe}_0(Y)$ -quasi-inv.

(b) ν : π_i^n and G_λ^n -quasi-inv. for $i=1, 2, \dots$

補題2の証明を再考すれば, 次のことが成り立つことも容易にみえてくる。

(系) B_Y^n 上の $\text{diffeo}(Y)$ -quasi-inv meas はそれが0でない場合は m_n と同値である。

更に B_Y 上の確率測度 ν に対して, Π_i^n と G_Λ^n をすべて動かすことにより, 2,

補題3. $\text{diffeo}(Y)$ に高々可算個の1径数部分群 $\Pi_{i,Y}$ と可算群 G_Y が存在して, B_Y 上の任意の確率測度 ν について次は同値となる。

(a) ν : $\text{diffeo}(Y)$ -quasi-invariant

(b) ν : $\Pi_{i,Y}$ and G_Y -quasi-invariant for $i=1,2,\dots$

つまり, Y を相対コンパクトな連結開集合とし, $(\bar{X}, \mathcal{C})$ 上の確率測度 μ を sub- σ -field $\Pi_{Y^c}^{-1}(\mathcal{C}_{Y^c}) = \mathcal{I}$ に関する条件付き確率測度で分解すると,

$$\mu(A \times B) = \int_B \mu^A(A) \Pi_{Y^c} \mu(d\nu) \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{C}_Y, \forall B \in \mathcal{C}_{Y^c}$$

ここで μ^A は $(B_Y, \mathcal{C}_Y)$ 上の確率測度で $\forall A \in \mathcal{C}_Y$ に対して $\mu^A(A)$ は μ の関数として, $\mathcal{C}_{Y^c}$ -measurable である。

補題4. 次の二つは同値である.

(a) $\mu : \mathcal{L}(\mathcal{H}_0(Y))$ -quasi-invar

(b) $\pi_{Y^c}\mu$ -a.e. ν μ^ν は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(Y))$ -quasi-invar.

略証 (2) $\Rightarrow$ (1) は容易, (1) $\Rightarrow$ (2) を示そう. $\forall \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0(Y))$
 とし, $T_\psi \mu(A \times B)$ を通常の手法で計算する.

$$T_\psi \mu(A \times B) = \mu(T_\psi^{-1}(A) \times B) = \int_B T_\psi \mu^\nu(A) \pi_{Y^c} \mu(d\nu)$$

他方,

$$T_\psi \mu(A \times B) = \int_B \int_A \frac{d T_\psi \mu(\nu')}{d \mu}(\nu') \mu^\nu(d\nu') \pi_{Y^c} \mu(d\nu).$$

これからより, $\pi_{Y^c} \mu$ -a.e. ν で $T_\psi \mu^\nu \simeq \mu^\nu$ が成り立つ.

この時, 除外値集合は一般に個々の ν に関係するもので, 残る所は ν が共通に測度0の集合でとれることを示す必要がある.

χ の為には補題3を用い, χ として各一径数部族群 $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

($\subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_0(Y))$) について $\{(t, \nu) \mid T_{\psi_t} \mu^\nu \simeq \mu^\nu\}$ が2変数の jointly-measurable set にとりうることを示す必要がある.

詳細については紙数の関係で省略しよう.

補題3, 補題4 およびこの節の冒頭の部分から次のことがわかる.

定理5 $\text{Diff}_0(X)$ に高々可算個の1径数部分群, および
ある可算群があり, これらの union を G とすると, 次の
ことが成り立つ。($\bar{X}, \mathcal{C}$) 上の任意の確率測度 μ について, 次
は同値。

(a) μ : $\text{Diff}_0(X)$ -quasi-invariant

(b) μ : G -quasi-invariant.

84. ($\bar{X}, \mathcal{C}$) 上の $\text{Diff}_0(X)$ -quasi-inv prob meas μ の
エルクート分解について。

μ を標題のような測度, 但し $\mu(\Delta_X) = 1$ とし, したがって
 X^∞ 上の測度 $\hat{\mu}$ を admissible section $S \in \mathcal{U}$ とつとつて,
§2 のようにして作る。そして $\hat{\mu}$ を sub- σ -field $\mathcal{B}_\infty$ に關
して条件付き確率測度 $\{\hat{\mu}^X\}$ を分解する。いつもの通り,
(a) 固定した x について, $\hat{\mu}^x(\cdot)$ は $\mathcal{B}(X^\infty)$ 上の確率測度で,
(b) $\forall B \in \mathcal{B}(X^\infty)$ については, $\hat{\mu}^x(B)$ は x の関数として $\mathcal{B}_\infty$ -
measurable,

$$(c) \forall A \in \mathcal{B}_\infty, \forall B \in \mathcal{B}(X^\infty), \quad \hat{\mu}(A \cap B) = \int_A \hat{\mu}^x(B) \hat{\mu}(dx)$$

が成り立つ。更に $\mathcal{B}_\infty$ は可算生成 sub- σ -field $P_n^{-1}(\mathcal{B}(X^\infty))$
(n について減少する) の交わりとして得られ, したがって,

(d) $\exists A_1 \in \mathcal{B}_\infty$ with $\widehat{\mu}(A_1) = 1$ s.t., $\forall x \in A_1$, $\widehat{\mu}^x$ is $\mathcal{B}_\infty$ trivial となる (例は [2] 参照)

又 $\widehat{\mu}^x$ は X の作りが Ω によって決まることは容易にわかる。

(c) $\exists A_2 \in \mathcal{B}_\infty$ with $\mu(A_2) = 1$ s.t., $\forall x \in A_2$, $\widehat{\mu}^x: \mathcal{C}_\infty$ -quasi-inv $\Rightarrow \widehat{\mu}^x(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_\infty} S(\overline{T_x})\sigma) = 1$.

したがって, 定理 4 の (c) により $\widehat{\mu}^x = \mu^{[x]}$ となるので,

$$\widehat{\mu^{[x]}} = \widehat{\mu}^x \text{ for } \forall x \in A_2.$$

そこで, 定理 5 にいう所の G とすると, $G = G_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$, G_0 : 可算群, Π_i : 1 径数部分群 となるので, 補題 4 と同様の議論を行えばよいことがわかる。

(f) $\exists A_3 \in \mathcal{B}_\infty$ with $\widehat{\mu}(A_3) = 1$ s.t., $x \in A_3 \Rightarrow \widehat{\mu}^x: G$ -quasi-inv (但し, $\mathcal{L}iff_0(x)$ -quasi-inv である。)

したがって, 定理 4 の (a) と (b) および上の (d) を用いると,

(g) $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ならば, $\mu^{[x]}: \mathcal{L}iff_0(x)$ -ergodic となる。

そこで, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \Omega$ となる。

$$\mu(S^{-1}(\Omega)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\infty} C(\sigma) (S\mu)\sigma(\Omega) = \widehat{\mu}(\Omega) = 1. \quad * \text{ 故}$$

$\mu^\sigma \in S^{-1}(\Omega)$ 上では $\mu^\sigma = \mu^{[S(\sigma)]}$ として, $S^{-1}(\Omega)$ の外では適当な $\mathcal{L}iff_0(x)$ -ergodic prob meas とし Σ 上では μ とおくと, 次の結果が得られる。

定理6 $(T_X \mathcal{C})$ 上の $\mu(\Delta_X) = 1$ なる $\text{Liff.}(X)$ -quasi-
inv prob meas μ に対し、次の性質をもつ Δ_X 上の
 $\text{Liff.}(X)$ -ergodic prob meas $\{\mu^\gamma\}$ が存在する。

(a) $\forall E \in \mathcal{C}$ に対し、 $\mu^\gamma(E)$ は $\gamma \in \Delta_X$ の関数として
 $S^{-1}(\mathcal{B}_\infty)$ -measurable であり、

(b) $\forall E \in \mathcal{C}, \forall A \in \mathcal{B}_\infty, \mu(E \cap S^{-1}(A)) = \int_{S^{-1}(A)} \mu^\gamma(E) \mu(d\gamma)$

証明は既に述べたこと、 $A \in \mathcal{B}_\infty$ のとき、 $\bar{\mu}(A) = \mu(S^{-1}(A))$
に注意すれば簡単に check できる。

さきの分解を見出し、もう少し拡張してやる。

$\mathcal{O}_\infty := \{B \in \mathcal{C} \mid \forall \psi \in \text{Liff.}(X), T_\psi B = B\}$ とおく。

容易にわかるように、 $S^{-1}(\mathcal{B}_\infty) \subset \mathcal{O}_\infty$ 。更に、 $A \in \mathcal{O}_\infty$
のとき、 $\hat{A} := \{\gamma \in \Delta_X \mid \mu^\gamma(A) = 1\}$ とおくと、 $\mu(\Delta_X) = 1$
のとき、 $\forall E \in \mathcal{C}$ に対し、

$$\mu(E \cap \hat{A}) = \int_{\hat{A}} \mu^\gamma(E) \mu(d\gamma). \quad \text{他は}$$

$$\mu(E \cap A) = \int_{\Delta_X} \mu^\gamma(E) \mu^\gamma(A) \mu(d\gamma) = \int_{\hat{A}} \mu^\gamma(E) \mu(d\gamma)$$

より、 $\mu(\hat{A} \ominus A) = 0$ が成立する。更に Δ_X の外では
任意に μ と μ^γ とを主として $\text{Liff.}(X)$ -ergodic prob meas と
 μ^γ の主として μ とにするのは、§2 の冒頭に述べたことと考
慮して、次の結果が成立する。

定理 7. $(T_X, \mathcal{G})$ 上の任意の $\text{diff}_0(X)$ -quasi-invar prob meas μ に対し $\mathbb{Z}$, ある prob meas γ 集まり $\{\mu^\gamma\}_{\gamma \in T_X}$ があつた次の性質が成り立つ。

(a) 固定した γ について, μ^γ は $(T_X, \mathcal{G})$ 上の $\text{diff}_0(X)$ -ergodic meas $\mathbb{Z}$

(b) $\forall E \in \mathcal{G}$, $\mu^\gamma(E)$ は γ の $\mathcal{O}_\infty$ -measurable 関数,

(c) $\forall E \in \mathcal{G}$, $\forall A \in \mathcal{O}_\infty$, $\mu(E \cap A) = \int_A \mu^\gamma(E) \mu(d\gamma)$.

定理 7 から次の補題が従う。

補題 5. μ, ν : $\text{diff}_0(X)$ -quasi-invar prob meas $\alpha \geq 1$,

$\mu \geq \nu \xLeftrightarrow{\text{N.S.}} \exists A \in \mathcal{B}_\infty$ s.t., " $\nu(B)=0 \iff \mu(A \cap B)=0$ ".

定理 8.

(a), μ, ν : $\text{diff}_0(X)$ -quasi-invar prob meas $\alpha \geq 1$,

$\mu \geq \nu \xLeftrightarrow{\text{N.S.}} \mu \geq \nu \text{ on } \mathcal{O}_\infty$

(b) μ : $\text{diff}_0(X)$ -quasi-invar $\alpha \geq 1$

μ : ergodic $\xLeftrightarrow{\text{N.S.}} \mu = 1 \text{ or } 0 \text{ on } \mathcal{O}_\infty$.

(c) μ, ν : $\text{diff}_0(X)$ -ergodic $\alpha \geq 1$, $\mu \geq \nu$ or $\mu \perp \nu$.

定理 8 は "すなわち補題 5 から簡単に導くことができる。"

若し因子測度を互いに singular になるようにとりたいならば、次のような工夫がある。

$\forall E \in \mathcal{G}$ に対し $\mathbb{Z}$, 写像 $\gamma \longrightarrow \mu^\gamma(E)$ を可測にするような最小の σ -field $\mathcal{Q}$ は可算生成であることに注意すると,

$\exists p: \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ s.t., $\mathcal{Q} = p^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. このより

$$p(\gamma) = p(\delta) \iff \mu^\gamma = \mu^\delta \text{ となり, 定理 7 の (c) を使$$

って推論すれば, $\mu^\gamma(p^{-1}(p(\gamma))) = 1$ for μ -a.e. γ .

従って, $t = p(\gamma)$ かつ $\mu_t = \mu^\gamma$ とおき, $\mu_t \in \mathcal{P}\mu$ -measure の集合上で補正することにより, 次の結果が得られる。

定理 8. $(\overline{X}, \mathcal{G})$ 上の任意の $\text{diff}_0(X)$ -quasi-inv prob meas μ に対し $\mathbb{Z}$, map p と確率測度の集り $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が存在して, 次のことが成り立つ。

$$(a) \quad p: (\overline{X}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \text{ measurable map}$$

$$(b) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu_t: \text{diff}_0(X)\text{-ergodic}$$

$$(c) \quad \forall E \in \mathcal{G}, \quad \mu_t(E): \text{measurable func of } t,$$

$$(d) \quad \exists T_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ with } p\mu(T_0) = 1 \text{ s.t., } \forall t \in T_0$$

$$\mu_t(p^{-1}(t)) = 1, \text{ 特 } \mu_t \text{ は } t \in T_0 \text{ のとき, 互いに}$$

singular である

$$(e) \quad \forall E \in \mathcal{G}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(E \cap p^{-1}(B)) = \int_B \mu_t(E) p\mu(dt).$$

References

- [1] K.R.Parthasarathy, Probability measure on metric spaces, Academic Press, 1967.
- [2] H. Shimomura, Ergodic decomposition of quasi-invariant measures, PUBL RIMS, Kyoto Univ., 14, (1978) 359-381.
- [3] ———, Poisson measures on the configuration space and unitary representations of the group of diffeomorphisms, To appear in J. of Math. Kyoto Univ.34 (1994).
- [4] A.M.Vershik, I.M.Gel'fand and M.I.Graev, Representations of the group of diffeomorphisms, Usp.Mat.Nauk, 30 (1975) 3-50 (= Russ.Math.Surv.,30 (1975) 1-50).