

# Radial growth of starlike holomorphic mappings in the unit ball in $\mathbb{C}^n$

東京電機大学工学部 鶴見 和之

(Kazuyuki Tsurumi)

## 1. 序

単位円  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  で正則単葉な函数の半径方向の増大についての問題及び関連する問題については Duren の本 [2] (文献中に) に見られる。

$f(z)$  を  $\mathbb{D}$  で正則な函数とし,  $M_\infty(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|$  ( $0 < r < 1$ ) とおく。いま,  $f(z)$  が単葉ならば, 歪曲定理により,

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha$$

となる  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) が存在する ([2], p. 157. lemma), この  $\alpha$  を  $f$  の Hayman index という。このとき,  $f$  の最大増大方向に属して, 次の定理が成り立つ:

定理 A ([2], p. 158, Theorem 5.4).  $f(z)$  を  $\mathbb{D}$  で正則単葉な函数とし,  $f(z)$  の Hayman index  $\alpha > 0$  ならば,

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^2 |f(r a)| = \alpha \quad (|a| = 1)$$

となるただ1つの方向  $a$  が存在する。

本講の目的は、定理 A を  $\mathbb{C}^n$  の単位球  $B$  で正則星型な星型写像に拡張することである。ここで、定理 A の方向  $a$  がただ1つであるという事は成り立たない。また、正則星型な星型写像のいくつかの例を与える。

## 2. Starlike mappings

$n$ -次元複素ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  の実数を列ベクトルで表す:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

また、 $z'$ ,  $z^*$  をそれぞれ  $z$  の転置ベクトル, 転置共役ベクトルを表す。 $z$  のノルムを  $\|z\| := \sqrt{z^* z}$  と表す。また、原点  $0$  を中心とする  $\mathbb{C}^n$  の単位球を  $B := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$  と書く。

$B$  から  $\mathbb{C}^n$  への写像を列ベクトルで表す:

$$f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}.$$

ここで、各成分函数  $f_j(z)$  が  $B$  で正則であるとき、写像  $f(z)$  は正則であるという。 $B$  で正則な写像の全体を  $\mathcal{H}(B)$  と書く。

写像  $f(z) \in \mathcal{H}(B)$  の Jacobian 行列を

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

を表し, Jacobian ( $Df(z)$  の行列式) を  $J_f(z)$  と書く。

そうすると,  $J_f(z_0) \neq 0$  ならば,  $f(z)$  は  $z_0$  で *locally injective* (局所単射) である。写像  $f(z) \in \mathcal{H}(B)$  が,  $f(0) = 0$  且  $Df(0) = I$  (単位行列) のとき,  $f(z)$  は正規化された写像であるという。

写像  $f(z) \in \mathcal{H}(B)$  が,  $f(0) = 0$  且  $\sqrt{(1-t)} f(B) \subset f(B)$  ( $0 < t < 1$ ) となるとき,  $f(z)$  は (原点  $0$  に関して) 星型 (starlike) であるといい,  $B$  において正規化された星型写像の全体を  $S^*(B)$  と書く。

このとき, 次の定理が成り立つ:

定理 B ([3], [6]).  $f(z) \in \mathcal{H}(B)$  を正規化された単射写像とすると, 次の3条件は同値である:

- (i)  $f(z) \in S^*(B)$ .
- (ii)  $\operatorname{Re} \{ z^* (Df(z))^{-1} f(z) \} > 0 \quad (z \in B \setminus \{0\})$ .
- (iii)  $\forall X \in f(B)$  に対して, 初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -w, \quad w(0) = X$$

は解  $w(t) := w(t, x)$  を持ち,  $w(t) \in f(B) (t \geq 0)$   
 で  $w(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  である。

次の増大定理 (歪曲定理) は本講で基本的である:

定理 C. ([1], p. 16. Theorem 2.1).  $f(z) \in S^*(B)$  に対して, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|z\|}{(1 + \|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1 - \|z\|)^2} \quad (z \in B).$$

(一般の正則写像に対しては, 定理 C の式は成り立たない。)

### 3. 主定理.

正則写像  $f(z) \in \mathcal{H}(B)$  に対して,

$$M_\infty(r, f) := \max_{\|z\|=r} \|f(z)\| \quad (0 \leq r < 1)$$

とおく。このとき, 次の補題が成り立つ

補題.  $f(z) \in S^*(B)$  に対して,  $r^{-1}(1-r)^2 M_\infty(r, f)$  は ~~増大~~ 増大方向  $(0, 1)$  において  $r$  の減小関数であり, 次の式が成り立つ:

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha \leq 1$$

(この  $\alpha$  を  $f(z)$  の Hayman index とする。)

証明.  $\gamma_1, \gamma_2$  を  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$  なる様にとる。

実数  $z_2 \in B$  を  $\|z_2\| = \gamma_2$ ,  $\|f(z_2)\| = M_\infty(\gamma_2, f)$  とする様にとる。  $K$  を原点  $O$  と実数  $f(z_2)$  とを結ぶ線分の原像とある。 そうありと,  $K$  は  $B$  内の解析曲線である。  $s$  を原点から実数  $z \in K$  までの  $K$  の長さとする, として, 実数を  $s$  をパラメーターとして  $z(s)$  と書き,  $g(s) := \|f(z(s))\|^2$  とおき,  $s_j$  ( $j=1, 2$ ) を  $\|z(s_j)\| = \gamma_j$  とするものとする。 そうありと, 文献 [2, p. 18] の不等式によつて

$$\begin{aligned} & \log g(s_2) - \log g(s_1) \\ & \leq 2 \left[ \left\{ \log \|z(s_2)\| - 2 \log (1 - \|z(s_2)\|) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \log \|z(s_1)\| - 2 \log (1 - \|z(s_1)\|) \right\} \right] \end{aligned}$$

従つて,

$$\frac{(1 - \|z(s_2)\|)^4}{\|z(s_2)\|^2} g(s_2) \leq \frac{(1 - \|z(s_1)\|)^4}{\|z(s_1)\|^2} g(s_1).$$

$$\therefore \frac{(1 - \|z(s_2)\|)^2}{\|z(s_2)\|} \|f(z(s_2))\| \leq \frac{(1 - \|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|} \|f(z(s_1))\|$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(1 - \gamma_2)^2}{\gamma_2} M_\infty(\gamma_2, f) & \leq \frac{(1 - \gamma_1)^2}{\gamma_1} \|f(z(s_1))\| \\ (*) & \leq \frac{(1 - \gamma_1)}{\gamma_1} M_\infty(\gamma_1, f). \end{aligned}$$

よって,  $(1-\gamma)^2 M_\infty(\gamma, f)$  は  $(0, 1)$  上で  $\gamma$  の減少函数である。従って, 次の極限值が存在する

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} (1-\gamma)^2 M_\infty(\gamma, f) = \alpha.$$

そして, 定理 C により,  $0 \leq \alpha \leq 1$  が得られる。

定理.  $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$  が Hayman index  $\alpha > 0$  を持つならば, 次の様な方向  $a \in \mathbb{C}^m$  ( $\|a\|=1$ ) が存在する:

$$(**) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 1} (1-\gamma)^2 \|f(\gamma a)\| = \alpha.$$

証明. 列  $\{\gamma_k\}$  を  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \dots \rightarrow 1$  なる様にとる。また, 列  $\{a_k\}$  を  $\|a_k\|=1$ ,  $M_\infty(\gamma_k, f) = \|f(\gamma_k a_k)\|$  なる様にとる。そうすると,  $\forall \gamma < \gamma_k$  に対して, 補題の証明における式 (\*) によつて

$$\alpha \leq \frac{(1-\gamma_k)^2}{\gamma_k} \|f(\gamma_k a_k)\| \leq \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} \|f(\gamma, a_k)\|.$$

$a$  を列  $\{a_k\}$  の集積点とすると, 上の不等式によつて,

$$\alpha \leq \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} \|f(\gamma a)\| \leq \frac{(1-\gamma)}{\gamma} M_\infty(\gamma, f)$$

故に, 補題によつて, (\*\*) が得られる。

(1変数の単変函数においては, 定理の方向  $a$  はただ1つであるが,  $n \geq 2$  のときは  $a$  はただ1つではない。) 星型写像の

4. 例.  $\mathbb{C}^2$  における例を与えるが,  $n > 2$  の場合も同様である。

[1] ([1], p. 19)

$$f(z) := \begin{pmatrix} \frac{z_1}{(1-z_1)^2} \\ \frac{z_2}{(1-z_2)^2} \end{pmatrix}$$

Hayman index  $\alpha = 1$  で, 最大増大方向  $a$  は  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  の2方向である

[2]  $\zeta \in \mathbb{C}^2, \|\zeta\| = 1$  に対し

$$f(z) := \frac{1}{(1-\zeta^* z)} \zeta$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^2} [(1-\zeta^* z)I + z\zeta^*] \quad (I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$J_f(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^3}$$

$$(Df(z))^T f(z) = (1-\zeta^* z) \zeta = (1-\zeta^* z) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \zeta^* (Df(z))^T f(z) = (1-\zeta^* z) \|\zeta\|^2$$

Hayman index  $\alpha = 0$ .

$$[3] \quad f(z) := \frac{1}{(1-\zeta^* z)^2} z \quad (\zeta \neq [2] \text{ と同じ})$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^3} [(1-\zeta^* z)I + 2z\zeta^*]$$

$$J_f(z) = \frac{1 + \zeta^* z}{(1-\zeta^* z)^5}$$

$$(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-\zeta^* z}{1+\zeta^* z} z, \quad z^*(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-\zeta^* z}{1+\zeta^* z} \|z\|^2$$

Hayman index  $\alpha = 1$ , 最大増大方向  $a = \zeta(1\uparrow)$ .

$$[4] \quad f(z) := \frac{1}{(1-z'z)^2} z$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-z'z)^2} \begin{bmatrix} 1-(z_2^2-z_1^2) & 2z_1 z_2 \\ 2z_1 z_2 & 1-(z_1^2-z_2^2) \end{bmatrix}$$

$$J_f(z) = \frac{1+z'z}{(1-z'z)^3}$$

$$z^*(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-z'z}{1+z'z} \|z\|^2$$

Hayman index  $\alpha = 0$ .

文 献

- [1] R. W. Bernard, C. H. FitzGerald and S. Gong, The growth and  $\frac{1}{4}$ -theorems for starlike mappings in  $\mathbb{C}^n$ , Pacific J. Math, 150 (1991) 13-22.
- [2] P. L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg and Tokyo, 1983.
- [3] K. R. Gurganus,  $\Phi$ -like holomorphic functions in  $\mathbb{C}^n$  and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975) 389-406.
- [4] L. F. Heath and T. J. Suffridge, Starlike, convex, close-to-convex, spirallike, and  $\Phi$ -like maps in a commutative Banach algebra with identity, Trans. A. M. S. 250 (1979) 195-212.
- [5] J. A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in  $\mathbb{C}^n$ , Math. Ann. 210 (1974) 55-68.
- [6] J. A. Pfaltzgraff and T. J. Suffridge, Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, Pacific J. M. 57 (1975) 271-279.
- [7] T. J. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. M. 33 (1970) 241-248.
- [8] T. J. Suffridge, Starlike and convex maps in Banach spaces, Pacific J. M. 46 (1973) 575-585.