

Completely regular codes in Hamming graphs and Johnson graphs with small width

Yoichi Enta (円田 洋一)

International Christian University (国際基督教大学)

Hamming graph $H(D, q)$ と Johnson graph $J(n, D)$ について, code C への距離の総和 $s(x) = s_\ell$ に注目することによって得られた, C が completely regular code になるための条件と, その応用として, C の width w についての bound (Prop.2.6, Prop.3.4) や, cardinality $|C|$ についての制限 (Prop.2.9, Prop.3.7) の結果について報告したい. 証明は省略するが, すべて counting argument によっている. (論文は準備中.)

1 Definitions

$\Gamma = (X, R)$ を distance-regular graph (DRG) とする.

- X : vertex set of Γ , $R = R_1$: edge set of Γ .
- $\partial(x, y)$: distance in Γ ($x, y \in X$).
- $D = D_\Gamma = \max\{\partial(x, y) | x, y \in X\}$: diameter of Γ .
- $\Gamma_i(x) = \{z \in X | \partial(x, z) = i\}$: i -th neighbourhood of x .

X の空でない部分集合 C を Γ の code という. 単に $\Gamma \supseteq C$ とかくこともある. code C に対して, $X = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_t$ を distance partition とする.

- $C_\ell = \{x \in X | \partial(x, C) = \ell\}$: ℓ -th subconstituent (ただし, $\partial(x, C) = \min\{\partial(x, y) | y \in C\}$, $C_0 = C$).
- $t = t_C = \max\{\ell | C_\ell \neq \emptyset\}$: covering radius of C .
- $w = w_C = \max\{\partial(x, y) | x, y \in C\}$: width of C .

Definition 1.1 ([2], [5]) 次の (同値な) 条件を満たす Γ の code C を Γ の completely regular code (CRC) という.

$$C : \text{CRC in } \Gamma \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{for } 0 \leq \forall \ell \leq t, \left\{ \begin{array}{l} \gamma_\ell := |\Gamma_1(x) \cap C_{\ell-1}| \\ \alpha_\ell := |\Gamma_1(x) \cap C_\ell| \\ \beta_\ell := |\Gamma_1(x) \cap C_{\ell+1}| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{depend only on } \ell \\ (x \in C_\ell). \end{array}$$

$$\iff \text{for } \forall i, \forall j, \forall \ell, \quad \eta_{ij}^\ell := |\Gamma_i(x) \cap C_j| \text{ depends only on } \ell \ (x \in C_\ell).$$

Definition 1.2 Γ の code C と $x \in X$ に対して, $s(x) = s_C(x) := \sum_{y \in C} \partial(x, y)$ と定義する. $s(x)$ が $x \in C_\ell$ において ℓ のみによって決まる定数 $s_\ell = s(x)$ であるとき, s_ℓ は constant であるということにする ($0 \leq \ell \leq t$).

s_ℓ によって code の class を次のように定義する. [global, local という terminology は実例の幾何的なイメージによっている. Example 2.1 参照.] $0 \leq \ell \leq t$ に対して,

$$\begin{aligned} C : \ell\text{-global code} & \stackrel{\text{def}}{\iff} s_0, \dots, s_\ell : \text{const.}, \text{ and } s_0 = \dots = s_\ell. \\ C : \ell\text{-local code} & \stackrel{\text{def}}{\iff} s_0, \dots, s_\ell : \text{const.}, \text{ and } C \text{ is not } \ell\text{-global.} \\ C : \text{CRC of global type} & \stackrel{\text{def}}{\iff} C : \text{CRC and } t\text{-global.} \\ C : \text{CRC of local type} & \stackrel{\text{def}}{\iff} C : \text{CRC and } t\text{-local.} \end{aligned}$$

Remark 1.3 CRC ならば $s_0, \dots, s_t$ はそれぞれ constant.

[なぜなら, $s(x) = \sum_{i=0}^D i \cdot \eta_{i0}^\ell$ ($x \in C_\ell$) は ℓ のみによって決まる定数.]

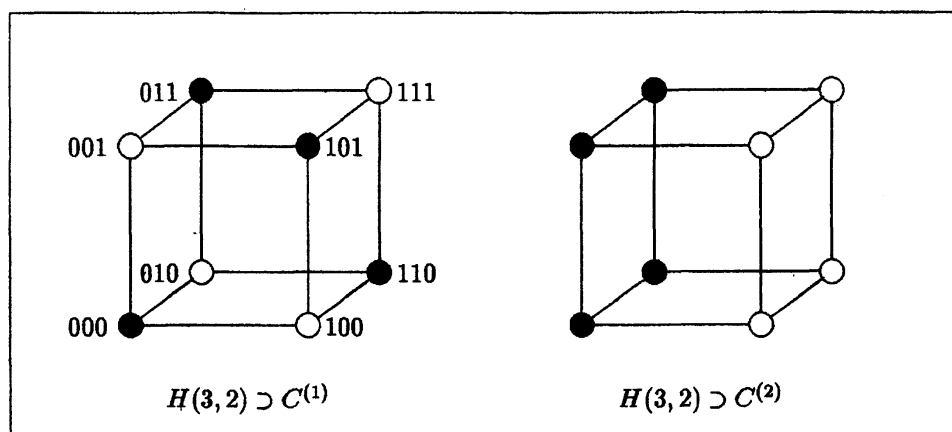
2 In the case of Hamming graphs

$\Gamma = H(D, q) = (X, R)$ を Hamming graph とする. ここで,

- $I = \{1, \dots, D\}$ ($D \geq 1$).
- $\Omega = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ($q \geq 2$).
- $X = \Omega^D = \{x = (x_1, \dots, x_D) \mid x_i \in \Omega (i \in I)\}$.
- $\partial(x, y) = |\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}|$: Hamming distance.

Example 2.1

- (1) $C^{(1)} = \{(000), (011), (101), (110)\}$ は $H(3, 2)$ の CRC of global type ($s_0 = s_1 = 6$).
- (2) $C^{(2)} = \{(000), (001), (010), (011)\}$ は $H(3, 2)$ の CRC of local type ($s_0 = 4, s_1 = 8$).



$H(D, q)$ の code C に対して, $r(i; j) = r_C(i; j) := |\{y \in C | y_i = j\}|$ ($i \in I, j \in \Omega$) と定義する. このとき, Hamming distance ∂ の定義によりただちに次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.2 $x, x' \in X$, $\partial(x, x') = 1$, $x_i \neq x'_i$ とする.

(1) $y \in X$ に対して,

$$\partial(x', y) = \begin{cases} \partial(x, y) + 1 & (\text{if } y_i = x_i), \\ \partial(x, y) - 1 & (\text{if } y_i = x'_i), \\ \partial(x, y) & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

(2) code C に対して,

$$\sum_{y \in C} \partial(x', y) = \sum_{y \in C} \partial(x, y) + r(i; x_i) - r(i; x'_i).$$

この Lemma をもとに, C が CRC of global type になるための必要条件である, 次の同値な各命題を得る.

Theorem 2.3 $H(D, q)$ の code C について, 次の命題は同値. [これらは, C が CRC of global type になるための必要条件.]

- (1) C is 1-global (i.e. $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $s_0 = s_1$).
- (2) C is t -global.
- (3) $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $r(i; j) > 0$ (for $\forall i \in I, \forall j \in \Omega$).
- (4) $r(i; j) : \text{const.}$ (for $\forall i \in I, \forall j \in \Omega$).

一方, CRC of local type は次のように分類され, また特徴付けられる.

Theorem 2.4 $H(D, q)$ の code C について, 次の命題は同値.

- (1) C is 1-local (i.e. $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $s_0 \neq s_1$).
- (1)' C is 1-local, and $s_0 < s_1$.
- (2) C is t -local, and $s_0 < \dots < s_t$.
- (3) $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $r(i; j) = 0$ (for $\exists i \in I, \exists j \in \Omega$).
- (4) C is a CRC of local type.
- (5) $\phi \neq \exists I' \subseteq I, \phi \neq \exists \Omega' \subset \Omega$ such that $C = \{y \in X | y_i \in \Omega' (i \in I')\}$. [このとき induced subgraph としては, $C \simeq H(D', q') \times H(D - D', q)$ ($D' = |I'|, q' = |\Omega'|$).]

Remark 2.5 (cf. [4]) Theorem 2.3(4) は C が (Delsarte の意味での) 1-design であることに, Theorem 2.4(3) は C が strength 0 の design であることに対応している.

Theorem 2.3(4) により, width w に関する次の bound が得られる.

Proposition 2.6 $H(D, q)$ の CRC of global type C について, $w \geq \frac{|C|-1}{|C|-1} \frac{q-1}{q} D$. 特に,

$$w > \frac{q-1}{q} D.$$

[いいかえると, $w \leq \frac{q-1}{q} D$ を満たす CRC C は local type であり, したがって $C \simeq H(w, q)$.]

Corollary 2.7 $w \geq 0$ を fix するとき, $w < D$ を満たす CRC of global type が存在するような Hamming graph $H(D, q)$ は高々有限個.

[なお, $w = D$ となる例は $C = \Gamma$ の場合を含め無数に存在する.]

Example 2.8 (cf. [1])

- (1) Proposition 2.6 により, $w = 2 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Hamming graph は $H(3, 2)$ のみ. 実際そのような CRC が次の 1 例のみであることは簡単に確かめられる.

$$H(3, 2) \supset \{(000), (011), (101), (110)\}.$$

- (2) 同様に, $w = 3 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Hamming graph は $H(4, 2), H(5, 2), H(4, 3)$ のみ. 実際そのような CRC は次の 2 例のみ.

$$H(4, 2) \supset \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H(4, 3) \supset \begin{pmatrix} 0000 \\ 0111 \\ 0222 \\ 1012 \\ 2021 \\ 1201 \\ 2102 \\ 1120 \\ 2210 \end{pmatrix} \text{ (perfect code).}$$

また, Theorem 2.3(4), Theorem 2.4(5) により, cardinality $|C|$ については次の制限が成り立つ.

Proposition 2.9 $H(D, q)$ の CRC C について, $|C| \equiv 0 \pmod{q}$ または $|C| = q^D$ ($1 \leq q' < q$).

[特に, $H(D, 2)$ の CRC C について, $|C| \equiv 0 \pmod{2}$ または $|C| = 1$.]

3 In the case of Johnson graphs

$\Gamma = J(n, D) = (X, R)$ を Johnson graph ($1 \leq D \leq n$, 主に $1 \leq D \leq n/2$) とする. ここで,

- $N = \{1, \dots, n\}$ ($n \geq 2$).

- $X = \begin{pmatrix} N \\ D \end{pmatrix}$.

- $\partial(x, y) = D - |x \cap y|$.

code C に対して, $r(i) = r_C(i) := |\{y \in C \mid i \in y\}|$ ($i \in N$) とすると, 前節と同様な手法で以下が成立する.

Theorem 3.1 $J(n, D)$ の code C について, 次の命題は同値. [これらは, C が CRC of global type であるための必要条件.]

- (1) C is 1-global (i.e. $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $s_0 = s_1$).
- (2) C is t -global.

- (3) $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $0 < r(i) < |C|$ (for $\forall i \in N$).
 (4) $r(i) : \text{const.}$ (for $\forall i \in N$).

Theorem 3.2 $J(n, D)$ の code C について, 次の命題は同値.

- (1) C is 1-local (i.e. $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $s_0 \neq s_1$).
 (1)' C is 1-local, and $s_0 < s_1$.
 (2) C is t -local, and $s_0 < \dots < s_t$.
 (3) $s_0, s_1 : \text{const.}$, and $(r(i) = 0 \text{ or } r(i) = |C| \text{ for } \exists i \in N)$.
 (4) C is a CRC of local type.
 (5) $\phi \neq \exists N' \subset N$ such that $C = \{y \in X | y \subseteq N'\}$ or $C = \{y \in X | y \supseteq N'\}$. [このとき induced subgraph としては, $C \simeq J(n', D)$ または $C \simeq J(n - n', D - n')$ ($n' = |N'|$).]

Remark 3.3 (cf. [3]) Theorem 3.1(4) は C が 1-design であることに, Theorem 3.2(3) は C が strength 0 の design であることに対応している.

Proposition 3.4 $J(n, D)$ の CRC of global type C について, $w \geq \frac{|C|}{|C|-1} \frac{(n-D)D}{n}$. 特に,

$$w > \frac{(n-D)D}{n}.$$

[いいかえると, $w \leq \frac{(n-D)D}{n}$ を満たす CRC C は local type であり, したがって $C \simeq J(D+w, D)$ または $C \simeq J(n-D+w, w)$.]

Corollary 3.5 $w \geq 0$ を fix するとき, $w < D$ を満たす CRC of global type が存在するような Johnson graph $J(n, D)$ は高々有限個.

Example 3.6 (cf. [1]) Proposition 3.4 により, $w = 2 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Johnson graph は $J(6, 3)$, $J(7, 3)$, $J(8, 3)$ のみ. 実際そのような CRC は次の 2 例のみ.

$$J(6, 3) \supset \begin{pmatrix} 000111 \\ 001011 \\ 010101 \\ 100110 \\ 101001 \\ 110001 \\ 011010 \\ 110010 \\ 011100 \\ 101100 \end{pmatrix} \quad (\text{Petersen graph}),$$

$$J(7,3) \supset \begin{pmatrix} 0000111 \\ 0011001 \\ 1100001 \\ 0101010 \\ 1010010 \\ 1001100 \\ 0110100 \end{pmatrix} \quad (\text{Fano plane} = 2-(7,3,1) \text{ design}).$$

Proposition 3.7 $J(n, D)$ の CRC C について, $|C|D \equiv 0 \pmod{n}$ または $|C| = \binom{n'}{D}$ ($D \leq n' \leq n$) または $|C| = \binom{n-n'}{D-n'}$ ($0 \leq n' \leq D$).

Further problems.

- (1) CRC of global type の分類. さらなる bound や tool は?
- (2) 大きい strength をもつ CRC の構成や分類.
- (3) 大きい minimum distance $d = d_C := \min\{\partial(x, y) | x, y \in C, x \neq y\}$ をもつ CRC の構成や分類.
- (4) 一般の DRG(あるいは graph) の CRC への一般化は?

References

- [1] A.E.Brouwer, C.D.Godsil, J.H.Koolen, and W.J.Martin, *Width and dual width of subsets in polynomial association schemes*, J.Combin.Theory, Series A 102(2003) 255-271.
- [2] P.Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Phillips Research Reports Suppl. 10(1973).
- [3] A.D.Meyerwitz, *Cycle-balanced partitions in distance-regular graphs*, J.Combin. Inform.System Sci. 17(1992) 39-42.
- [4] A.D.Meyerwitz, unpublished.
- [5] A.Neumaier, *Completely regular codes*, Discrete Math. 106/107(1992) 353-360.