

Circle Packing に関する Thurston のアルゴリズムの収束について.

Yves Colin de Verdière :

Empilements de cercles :

Convergence d'une méthode de point fixe

Forum. Math. 1. (1989) 395 - 402

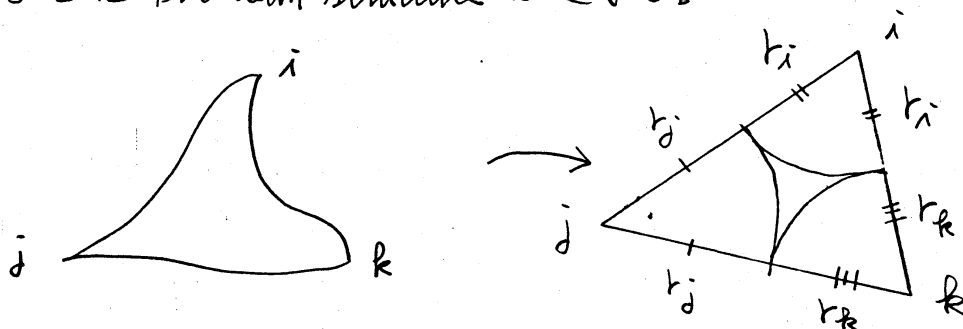
の紹介

大阪市立大学 理、数学 小森洋平 (Yohei Komori)

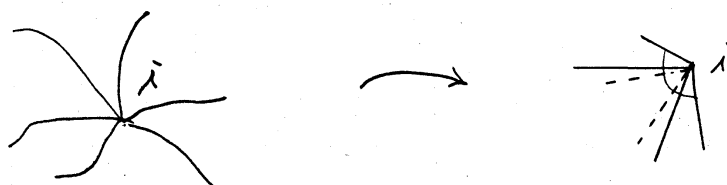
§ 序.

Thurston (とその他の人々) により、閉曲面上の組みあわせた的なデータ (三角形分割) から、(ある意味で) 一意的に定曲率な距離 (Circle Packing) が定まることが知られている。この Colin de Verdière さんの論文では、特にトーラス上の与えられた三角形分割から出発して、その上の flat metric をみつけ出して、Thurston のアルゴリズムの収束性について解説している。つまり、 X をトーラスとし、 $\mathcal{T}$ を X 上の有限な三角形分割とし、 $\mathcal{T}$ の頂点の全体を $v_1, \dots, v_N$ とする。そこで任意の N 上の正の実数の組 $(k_i) = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ を与えると、

頂点を i, j, k にもつ $\mathcal{T}$ の三角形 (i, j, k) の三辺を長さを、それぞれ $r_i + r_j, r_j + r_k, r_k + r_i$ とする ことにより、 $\mathcal{T}$ の各三角形ごとに Euclidean structure が定まる。



そして、同時に頂点 i, j, k の内角たちも一意に定まるが、この操作を $\mathcal{T}$ の三角形全部で一勢に行うと、各頂点の周りに集まってくる内角の総和は 2π になるとは限らない。



つまり $\forall (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ に対し、高々頂点で cone singularity をもつ singular Riemann metric が X 上に定まるが、Thurston (とその他の人々) の結果は、スカラー倍を除いて一意に $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ が存在し、三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し、上の構成で (r_i) から X 上の metric を定義すると、各頂点の周りで頂度 2π になる、つまり flat metric になっているということである。そこで Thurston の アルゴリズム とは、この $\mathcal{T}$ に対する flat metric $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ をみつめてくる手順のことである。

スカラ一倍を消すため、

$$\Delta := \{ (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N \mid \sum_{i=1}^N r_i = 1 \}$$

なる、 $N-1$ 次元 cell を与える。この Δ は、($\mathcal{T}$ を固定した時の) X 上の、 $\mathcal{T}$ の頂点で高々 cone singularity のみをもつ metric 全体である。Thurston のアルゴリズムは具体的に は 変換

$$G: \Delta \rightarrow \Delta$$

の iteration $G^k := \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ 回}}$ で得られる。つまり、任意の

$(r_i) \in \Delta$ に対し、 $G^k(r_i)$ が $k \rightarrow \infty$ で、unique flat metric

(つまり circle packing) に収束していくことを示す。証明のアイデアとしては、 Δ に ノルム を定義し、 G の iteration G^k が その ノルム に関し、縮小写像 になっていること、 G の微分を計算することによってみる。その時、本質的なのは G の微分の行列の性質であり、それは離散論の Harnack matrix になっている。このことは §0 でまとめておく。そして §1 で、与えられた三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し、

circle packing の存在と一意性を示し、§2 で上に述べたアルゴリズムの収束性をみる。この論文は短かいが、初等的な方法で深い結果を示しているのが感心した。しかし、index 等のまちがいの多さに素人の私は、たいへん読むのに苦労したことと、(一応読み終えた今となっては) 一言、言っておきたい。

§0. 道具

以下の2つの節において、一番大切(かつこればかり使わない)なアイデアは次の Lemma である(証明はとてもやさしい)。

key lemma.

$A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ なる $N \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し、ある正の定数 $\alpha > 0$ が存在し、

$$a_{ij} \geq \alpha > 0 \quad (\forall i, j = 1, \dots, N)$$

$$\text{かつ} \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} = 1 \quad (\forall i = 1, \dots, N)$$

とする。この時、 $(x_i) \in \mathbb{R}^N$ に対し、 $(x_i') := A(x_i)$ とおくと、

$\forall i = 1, \dots, N$ で

$$(1-\alpha) \inf_j x_j + \alpha \sup_j x_j \leq x_i' \leq (1-\alpha) \sup_j x_j + \alpha \inf_j x_j$$

が成り立つ。特に $(y_i) \in \mathbb{R}^N$ が A の固定点 (i.e. $(y_i) = A(y_i)$)

ならば

$$(y_1, \dots, y_N) = (c, \dots, c) \quad (\exists c \in \mathbb{R})$$

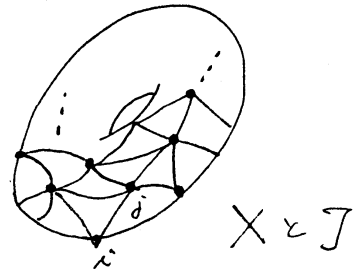
//

(⑤注) 上で表れた行列 $A = (a_{ij})$ は確率論で出てくる
遷移行列 (transfer matrix) のものである。

§1. トーラス上の circle packing の存在と一意性.

以下、 X をトーラス、 $\mathcal{T}$ を X 上の三角形分割.

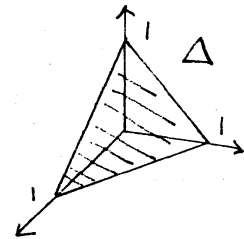
$\{1, \dots, N\}$ を $\mathcal{T}$ の頂点の全体とし、頂点 i と j が隣接している時、 $i \sim j$ とかくことにする.



正の実数全体を $\mathbb{R}^{>0}$ とかき.

$$\Delta := \{ \rho = (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N \mid \sum r_i = 1 \}$$

とかくと、 Δ は $N-1$ 次元 cell になる.



任意の $\rho = (r_1, \dots, r_N) \in \Delta$ に対し.

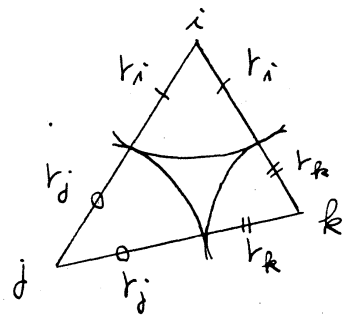
$\mathcal{T}$ の三角形 (i, j, k) の三辺を $r_i + r_j$, $r_j + r_k$, $r_k + r_i$ とおき.

Euclidean triangle の構造を与えることで.

高々各頂点にのみ、cone singularity をもつ

Singular Riemann metric g_ρ が X 上に

定まる。その時、三角形 (i, j, k) の各頂点



の内角が一意的に定まるが、頂点 i の周りで

metric g_ρ が smooth であるための必要十分条件は、頂点 i の周り

での内角の和が頂度 2π になることである。そこで metric g_ρ

の頂点 i での曲率 K_i を

$$k_i := 2\pi - (\text{頂点 } i \text{ の周りの内角の和})$$

と置く。この時、次の Gauss-Bonnet の定理がある。

Gauss-Bonnet の定理

$$\sum_{i=1}^N k_i = \chi(X) = 0 \quad (\chi(X) \text{ は } X \text{ のオイラー数})$$

//

そこで

$$Z := \{ k = (k_i) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N k_i = 0 \}$$

なる $N-1$ 次元 affine space を考えると、次の写像 φ が定まる。

$$\begin{array}{ccc} \varphi : (\mathbb{R}^{>0})^N & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho = (r_i) & \mapsto & (k_i) \quad (\text{metric } g_\rho \text{ の頂点 } i \text{ での曲率}) \end{array}$$

つまり φ は metric g_ρ の“特異性”を取り出す写像であるが、Thurston の結果は次である。

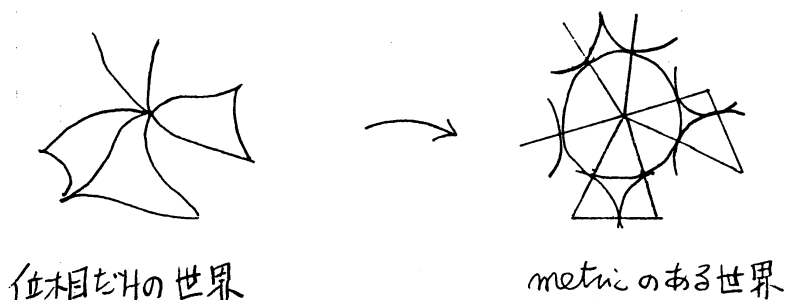
Theorem 1.

$$\varphi|_{\Delta} : \Delta \longrightarrow \varphi(\Delta) \subset Z$$

は diffeomorphism. さらに $\varphi(\Delta)$ は bounded convex

polyhedron で $0 \in \varphi(\Delta)$. //

つまり、 $0 \in \varphi(\Delta)$ から φ は単射より、任意の三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し、スケーリングを除いて一意的に X 上の flat metric g_ρ (これを circle packing といい) が存在し、 $\mathcal{T}$ の各三角形は Euclidean triangulation の構造が定まる。



証明は次の Lemma 1, Lemma 2 の順に行う。

Lemma 1.

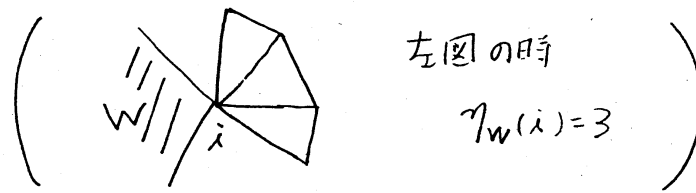
$\varphi|_{\Delta} : \Delta \rightarrow Z$ は locally diffeo. つまり微分 $\varphi'|_{\Delta}$ は
全単射. (おと φ は open map お $\varphi(\Delta) \subset Z$ は open). //

Lemma 2.

三角形分割 $\mathcal{T}$ の、proper connected complete subcomplex W
に対し (ここで subcomplex W が "complete" とは、 $\mathcal{T}$ の辺で両端
の頂点が2つとも W に入るならばこの辺自身も W に含まれ、また
 $\mathcal{T}$ の三角形で3辺とも W に入るならば、この三角形自身も W に含まれ
ることという)、その頂点全体を W_0 , 辺全体を W_1 , 面全体を W_2 と
する。さらに $\mathbb{R}^N$ 上の線型不等式 E_W を次のように定義する。

$$E_W: \sum_{i \in W_0} k_i > 2\pi \chi(W) - \pi \left(\sum_{i \in W_0} \eta_W(i) \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } \chi(W) := \#W_0 - \#W_1 + \#W_2 \quad (W \text{ のオイラー数}) \\ \eta_W(i) := i \text{ を頂点に持つ } \mathcal{T} \text{ の三角形で、} W \text{ に辺が含まれない} \\ \text{ものの数} \end{array} \right)$$



$P := \{ (k_i) \in \mathbb{Z} \mid (k_i) \text{ は 全ての } W \text{ で 不等式 } E_W \text{ をみたす} \}$
 とおく時、次の a), b), c) が成立する、

a) $\varphi(\Delta) \subset P$

b) $\varphi: \Delta \rightarrow P$ は proper (おと $\varphi: \Delta \hookrightarrow P$)

c) $0 \in P$ //

Lemma 2 の証明は、相馬さんの解説の方がより一般的でわかりやすい
 と思うのでここでは省略し、以下 Lemma 1 の証明をみる。

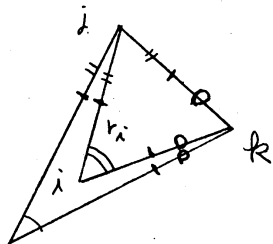
(Lemma 1 の証明)

まず $\frac{\partial k_i}{\partial r_i} > 0$

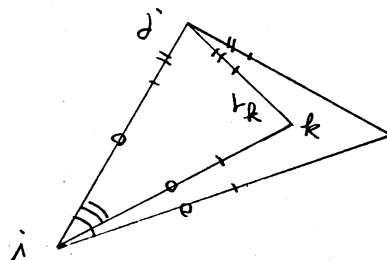
$\frac{\partial k_i}{\partial r_j} < 0 \quad (i \neq j \text{ かつ } i \sim j)$

$\frac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0 \quad (i \neq j \text{ かつ } i \not\sim j)$

理由は次の図と、 k_i の定義式からわかる(と思う)。



(r_i が大きくなると頂点 i の
内角は小さくなる。)



(r_k が大きくなると頂点 i の
内角は大きくなる)

また $\varphi(\lambda r) = \varphi(r)$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$) より

$$\sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

そこで $\ker(\varphi'(r_0))$ の元を (x_j) とおくと、

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial k_i}{\partial r_j} x_j = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

おと $y_j := \frac{x_j}{r_j}$ とおくと、 $\sum_{j=1}^N \frac{\partial k_i}{\partial r_j} r_j \cdot y_j = 0$. ($i=1, \dots, N$)

そこで $N \times N$ 行列 (b_{ij}) を

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 0 \\ b_{ij} &= - \frac{r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j}}{r_i \frac{\partial k_i}{\partial r_i}} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N b_{ij} &= 1 \quad (\forall i) \\ b_{ij} &> 0 \quad (i \sim j) \\ y_i &= \sum_{j=1}^N b_{ij} y_j \quad (\forall i) \end{aligned}$$

ここで、三角形分割 $\mathcal{T}$ は有限より、その直径 $\text{diam } \mathcal{T}$ が与えられ、

$k \geq \text{diam } \mathcal{T}$ の時、 $(b_{ij})^k$ は §0 の key lemma の条件を満たす、

よって 特に $(y_i) \in \mathbb{R}^N$ は $(y_1, \dots, y_N) = (c, \dots, c)$ ($\exists c \in \mathbb{R}^N$)

とかける。つまり $\ker(\varphi'(r_0))$ は $\sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$ 方向の 1 次元のみ、

よって $\Delta \subset (\mathbb{R}^{2N})^N$ の接空間の方向と直交しており、また Δ と Z の

次元が共に $N-1$ であることから $\varphi'(r_0)$ ($\forall r_0 \in \Delta$) は全単射である

ことがわかった。 //

§2. Thurston の algorithm とその収束.

§1 では、トーラス上の与えられた三角形分解了に対し、flat metric がスカラー倍を除いて、一意に決まることをみたが、この節では、任意の singular metric $\rho \in \Delta$ から出発して、 Δ から Δ への変換 G (Thurston の algorithm) の合成により、 $G^n(\rho) \in \Delta$ が $n \rightarrow \infty$ で、三角形分解了に付随する flat metric (i.e. packing) $\rho_0 \in \Delta$ に収束することを見る。

以下、スカラー倍の作用を translation に直すため、変数変換

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{>0})^N & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r_i) & \mapsto & (x_i) := (\log r_i) \end{array}$$

とする。また $\mathbb{R}^N$ を translation の作用で割った空間を $\mathbb{R}^N/D$ とする。(ここで $D := \{(t, t, \dots, t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$)

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^{>0})^N & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^N & \ni & (t_i) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^N/D & \ni & [t_i] \end{array}$$

おて、目的の Thurston の algorithm $G: \Delta \rightarrow \Delta$ のかわりに、translation D の作用と可換な写像 $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ をまず定義し、それによって、写像 $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$ を定める。

Lemma 3.

$u \geq 3$ を固定する。この時、任意の元 $(r_1, \dots, r_u) \in (\mathbb{R}^{>0})^u$ に対し、ある $r_0 > 0$ が unique に存在して、3辺の長さが $(r_0 + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r_0)$ なる u 角の三角形 $(0, i, i+1)$ の頂点 0 での内角の和が丁度 2π にできる。

(注) 中心 i , 半径 r_i の円 C_i ($0 \leq i \leq u$) をかくと、 C_0, C_i, C_{i+1} は外接しあうが、 $|i-j| \geq 2$ の時は C_i と C_j は交わるかもしれない。

(右図の 2 と 4)

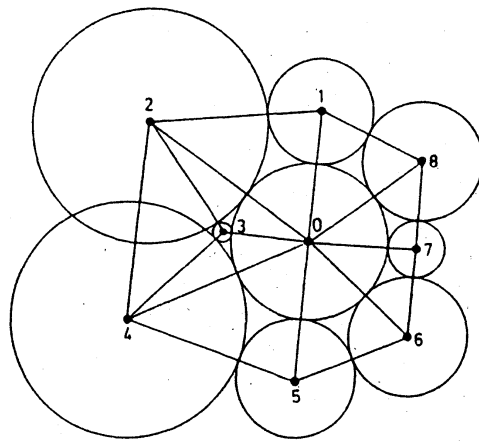


Fig. 4: Choix de r_0 ; les cercles C_2 et C_4 recourent!

(証明)

$$\begin{array}{ccc}
 k: \mathbb{R}^{>0} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 r & \mapsto & k(r) := 2\pi - \sum_{i=1}^u \alpha_i
 \end{array}$$

(ここで α_i は 3辺の長さが $(r + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r)$ の三角形 $(0, i, i+1)$ の頂点 0 での内角)

とおくと、 $k(0) = (2-u)\pi < 0$ (☺ $u \geq 3$)

$$k(+\infty) = 2\pi > 0$$

かつ K は連続で単調より、中間値の定理より、条件を満たす $t_0 > 0$ が unique に存在する。 //

そこで写像 $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}: \mathbb{R}^N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (t_i) & \mapsto & (F_i(t_1, \dots, t_N)) := (\log k_i^*) \end{array}$$

ここで t_i^* は、三角形分割 $\mathcal{T}$ において、頂点 i と隣接する頂点 j ($j \sim i$) たちに対し、 $t_j := e^{t_j}$ として、この (t_j) に対し、Lemma 3 で一意に定まる t_0 を t_i^* とする。別の言い方をすると、頂点 i での曲率 k_i が 0 になるような metric ρ

$$\rho = (r_1, \dots, r_{i-1}, t_i^*, r_{i+1}, \dots, r_N)$$

の i 成分のこと。この時、次のことは明らか。

Claim

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\tilde{F}(t_i + t) = \tilde{F}(t_i) + t$$

つまり $\tilde{F}$ は、translation D の作用と可換より、次の写像 F は well-defined. これを Thurston の algorithm という。

$$\begin{array}{ccc} F: \mathbb{R}^N / D & \rightarrow & \mathbb{R}^N / D \\ \downarrow & & \downarrow \\ [t_i] & \mapsto & [\tilde{F}(t_i)] \end{array}$$

次の主張も、写像 F の定義より明らか。

Claim

トーラス上の三角形分割 J に対し、スカラー倍を除き一意に定まる flat metric (つまり packing) を $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$ とすると、 $[a_i]$ は写像 $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$ の unique fixed point. //

この節の主結果は次の、 F の収束性である。

Theorem 2.

$\forall [x_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対し、

$$F^n([x_i]) \rightarrow [a_i] \quad (n \rightarrow \infty)$$

ここで、 $[a_i]$ は J の packing. F^n は F の n 回合成写像

$$F^n := \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ 回}} \text{ とある.} //$$

証明のアイデアは次の通り。

- ① 収束を量的に示すため、 $\mathbb{R}^N/D$ に ノルム $\|\cdot\|$ を定義する。
- ② 収束を局所的に示す。つまり、 $\mathbb{R}^N/D$ 上の任意のコンパクト部分集合上で、 F^k ($\forall k \geq \text{diam} J$) の微分の ノルムが 1未満の定数で一様におさえられることを示す。

まず $\mathbb{R}^N/D$ 上の ノルムを次のように定める。

$$\|[t_i]\| := \frac{1}{2} (\sup_i t_i - \inf_i t_i)$$

この時、§0の key lemma より次がわかる。

Lemma

$A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ を $N \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$ とし、

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1 \quad (\forall i)$$

$$a_{ij} \geq \alpha > 0 \quad (\exists \alpha > 0, \forall i, j)$$

をみたすとする。この時、 $D := \{(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N \mid t_i \in \mathbb{R}\}$ に対し、

$$A(D) \subset D$$

$$\text{すなわち、} \hat{A}: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$$

が定まるがこの写像 $\hat{A}$ のノルム $\|\hat{A}\|$ は次をみたす。

$$\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha < 1 \quad //$$

以下、Theorem 2 の証明に入る。

まず §1 の Lemma 1 と同様に、 $t_1, \dots, t_N$ の函数 $K_i(t_1, \dots, t_N)$

について、

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_i} > 0$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} < 0 \quad (\text{ただし } j \neq i \text{ から } j \sim i)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} = 0 \quad (\text{ただし } j \neq i \text{ から } j \not\sim i)$$

一方 $K_i(t_1, \dots, t_{i-1}, F_i(t_1, \dots, t_N), t_{i+1}, \dots, t_N) \equiv 0$ より、

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = - \frac{\frac{\partial K_i}{\partial t_j}}{\frac{\partial K_i}{\partial t_i}} \quad (\text{ただし } i \neq j)$$

さて写像 $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$ の微分 $(\frac{\partial F_i}{\partial t_j})$ について

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} > 0 \quad (i \neq j \text{ かつ } i \sim j)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 0 \quad (\text{その他})$$

さらに $k_i(t_1+c, \dots, t_N+c) = k_i(t_1, \dots, t_N) \quad (\forall c \in \mathbb{R})$ より

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial k_i}{\partial t_j} = 0$$

$$\therefore \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 1$$

さて §1 の Lemma 1 と同様に、 $\forall k \geq \text{diam. } \mathcal{T}$ に対し F^k の微分

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j} \right)^k$$

は、 $\mathbb{R}^N/D$ の任意のコンパクト部分集合上で §0 の key lemma の条件を満たす。さて 三角形分割 $\mathcal{T}$ に対する packing を $[q_i] \in \mathbb{R}^N/D$ とすると、

$\forall k \geq \text{diam. } \mathcal{T}$, $\forall [t_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対し、 $\|\cdot\|$ の定数 $\mathbb{R}^N/D$ 上の距離を $d(\cdot, \cdot)$ とする時、前のページの Lemma より、

$$d([q_i], F^k([t_i])) < d([q_i], [t_i])$$

さて $\exists C > 0$, $0 < \exists k < 1$

$$d([q_i], F^n([t_i])) \leq C \cdot k^n \quad (\forall n \geq \text{diam. } \mathcal{T})$$

以上で、Thurston の algorithm $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$ の収束が言えて、

Theorem 2 の証明ができた。 //

(以上)