

## 切り目のある剛体折紙による曲面近似

## APPROXIMATION OF CURVED SURFACE BY RIGID ORIGAMI WITH CUTTING LINES

早川 健太郎<sup>\*1</sup>, 丸山 悠斗<sup>\*2</sup>, 安達 瑛翔<sup>\*3</sup>, 大崎 純<sup>\*4</sup>*Kentaro HAYAKAWA, Yuto MARUYAMA, Akito ADACHI  
and Makoto OHSAKI*

A form generation method of rigid origami with cutting lines is proposed. A Bézier surface is approximated by the rigid origami whose faces have three or more edges. Three types of approximation errors are defined with respect to the distance between the origami vertices and the target surface, the surface area difference, and the normal vector difference between the origami faces and the target surface. The weighted sum of approximation errors is minimized under the constraints on the developability of the rigid origami. Numerical examples of the HP and dome surfaces with different cutting patterns are shown.

**Keywords :** *Origami, Kirigami, Rigid-fold, Form generation, Discrete Gaussian curvature, Optimization*

折紙, 切り紙, 剛体折り, 形状生成, 離散ガウス曲率, 最適化

## 1. はじめに

剛体折紙<sup>1, 2)</sup>は各面を変形させずに折ることのできる多面体折紙である。折紙には平面や折りたたんだ状態から折り動作によって複雑な立体形状を構成できるなど、優れた性質があり、さまざまな工学的応用が検討されている<sup>3)</sup>。特に、剛体折紙は剛なパネルをヒンジで接続して変形メカニズムを実現できることから展開構造への応用に適しており、人工衛星の太陽光パネル<sup>4)</sup>や折り畳み可能なシェルター<sup>5, 6)</sup>、建築物のファサード<sup>7)</sup>などへの応用が提案されている。

建築物の屋根などへ剛体折紙を応用するためには、設計者の意図した形状に近い形状を実現する折線パターンを得ることが重要である。剛体折紙による曲面近似手法として、Reschのパターン<sup>8)</sup>やwaterbomb tessellationなどの剛体折り可能な折線パターンを一般化した手法が示されている<sup>9, 10)</sup>。四辺形メッシュで構成される折紙が剛体折り可能であるための必要十分条件<sup>11)</sup>にもとづき曲面を近似する手法も提案されている<sup>12, 13)</sup>。また、著者らは曲面を近似する平面展開可能かつ剛体折り可能な形状を特定の折線パターンに依存せず生成する手法を提案している<sup>14, 15)</sup>。提案手法では、多面体が平面展開可能であるための条件と多角形面が平坦であるための条件を満たす形状を最適化手法により求めたのち、剛体折りによる変形メカニズムを有限要素解析ソフトウェアによる大変形解析で求めている。目標曲面の近似精度は剛体折紙の頂点と目標曲面のある軸方向の距離に上限値を与えることで保証している。さらに、多目的最適化を用いて近似誤差を最小化することも試みている<sup>16)</sup>。

一方、平面から折り動作等により曲面を生成するには、ペーパークラフト<sup>17)</sup>や切り紙<sup>18, 19)</sup>など切り目を導入する手法も挙げられる。切り目や穴の無い折紙と比較して、切り目を導入することで平面か

ら生成可能な曲面形状の自由度は大きく向上する。しかし、ペーパークラフトは一般に複数のパーツからなり、建築物スケールの構造物への応用では面を複雑に接合することは困難である。また、切り紙による曲面近似の既往手法では、面同士が非常に狭い幅や点で接合されるなど接合部の大きさが考慮されず、変形自由度の大きい例が多い。施工性や安全性の観点から変形自由度の大きい構造は屋根構造などの現実的なスケールを持つ展開構造への応用に適しているとはいえず、変形自由度の小さい構造を得ることがのぞましい。

そこで、本稿では著者らの既往手法<sup>14, 15)</sup>に切り目を加えることで目標曲面の近似精度の向上を図り、展開構造への応用に適した変形自由度の小さい構造を得ることを試みる。生成する剛体折紙は目標曲面を近似する立体形状では穴を持たず切り目は閉じており、展開時に穴、または面が重なる部分が切り目により生じるものとする。切り目のパターンを限定した例<sup>20)</sup>では、近似精度の向上が確認されており、本稿では切り目のパターンの一般化を試みる。形状生成は、目標曲面を三角形分割した多面体を初期形状とし、平面展開可能であるための条件と多角形面が平坦であるための条件下で目標曲面の近似誤差を最小化することで行う。近似誤差は既往手法で考慮した折紙の頂点と目標曲面との距離に加え、曲面の表面積と面の法線方向の誤差を新たに考慮して定義し、目標曲面に「見た目」に近い折紙形状を得ることを試みる。形状生成過程では順に折線の回転を固定（折線を削除）し、多角形平面を含む剛体折紙の解形状を生成することで変形自由度を削減する。得られた解形状はフレームモデル<sup>14, 15)</sup>でモデル化し、津田ら<sup>21)</sup>の手法を用いて微小変形メカニズムを評価する。周辺の折線の接続状況や配置によって拘束され回転できない折線が解形状に含まれる場合、剛体折り動作による平面展開が

<sup>\*1</sup> 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生・修士（工学）<sup>\*2</sup> 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生<sup>\*3</sup> 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 特定研究員・学博<sup>\*4</sup> 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士（工学）

Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., M.Eng.

Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ.

Research Fellow, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Ph.D.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

できないため、固定折線は微小変形メカニズムを考慮して選択し、回転できない折線の生成を避ける<sup>15)</sup>。また、解形状の平面展開可能性および剛体折り可能性を確認するため、展開図の作成と有限要素解析ソフトウェアを用いたフレームモデルの大変形解析を行う。

## 2. 展開可能条件と多角形面の平坦条件

本稿では、剛体折紙を構成する多面体を折紙曲面とよぶ。既往手法<sup>14, 15)</sup>と同様に折紙曲面は三角形面のみで構成される多面体とし、Figs. 1, 2に示すように、多面体の辺は折線 (crease line)、切り目 (cutting line) の要素、または多角形面を三角形面に分割する分割線 (dividing edge) に対応するものとする。図中、山折線 (mountain fold) は点鎖線、谷折線 (valley fold) は破線、多角形面の分割線は点線で示す。また、切り目は辺の集合として定義し、Fig. 2に示すように太い実線で示す。

以下では、折紙曲面が面を変形させずに平面展開可能であるための必要条件 (展開可能条件) と分割線で三角形面に分割される多角形面が平坦であるための条件 (多角形面の平坦条件) をまとめる。2.1節では、既往手法<sup>14, 15)</sup>で考慮している切り目以外の部分での剛体折紙の展開可能条件および多角形面の平坦条件を示す。次に、2.2節では、本稿で新たに考慮する切り目まわりの展開可能条件を示す。

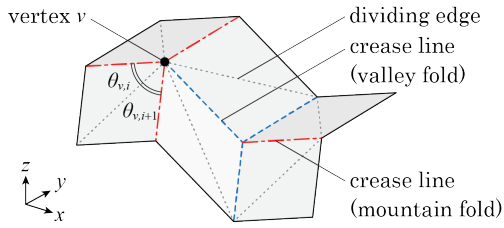


Fig. 1 Configuration of origami surface

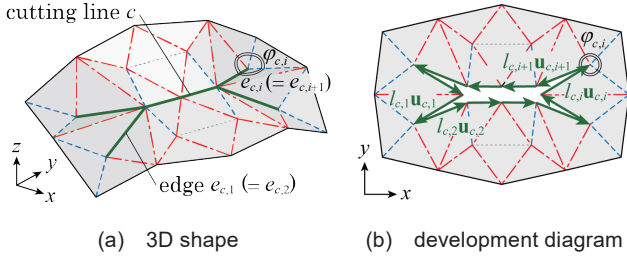


Fig. 2 Interior cutting line

### 2.1 切り目を構成する辺の端点でない内部頂点まわりの展開可能条件と多角形面の平坦条件

切り目を構成する辺の端点でない内部頂点まわりの展開可能条件を示す。切り目を構成する辺の端点でない内部頂点の集合を  $V_{in}$  とし、Fig. 1に示すように頂点  $v \in V_{in}$  のまわりの  $i$  番目の辺の間の角度を  $\theta_{v,i}$  とすると、内部頂点  $v$  まわりの展開可能条件は以下のような<sup>14, 15)</sup>。

$$\kappa_v = 2\pi - \sum_{i=1}^{n_v^{\text{edge}}} \theta_{v,i} = 0 \quad (v \in V_{in}) \quad (1)$$

ここで、 $n_v^{\text{edge}}$  は頂点  $v$  に接続する辺の数であり、 $\kappa_v$  は頂点  $v$  のガウス曲率を angle defect<sup>22)</sup> として定義したものである。

一方、Fig. 1に示すように多角形面の分割線に接続する2面は平行である必要がある。折紙曲面の分割線に対応する辺の集合を  $E_{\text{div}}$  とし、辺  $e \in E_{\text{div}}$  に接続する2面の集合を  $F_e$  とすると、2面  $f_1, f_2 \in F_e$  が平行である条件は  $\mathbf{v}_{f_1}, \mathbf{v}_{f_2} \in \mathbb{R}^3$  をそれぞれ面  $f_1, f_2$  の単位法線ベクトルとして以下のように表せる<sup>14, 15)</sup>。

$$\|\mathbf{v}_{f_1} \times \mathbf{v}_{f_2}\| = 0 \quad (f_1, f_2 \in F_e, e \in E_{\text{div}}) \quad (2)$$

### 2.2 切り目まわりの展開可能条件

切り目まわりの展開可能条件を示す。本稿では、切り目の導入により面が複数に分離されない場合のみ考慮し、切り目は複数存在してよいものとする。また、立体形状において、それぞれの切り目はグラフとみなしたときに閉経路を持たない木構造であるとする。Fig. 2に示すような端点が折紙曲面外周部に存在しない切り目の集合を  $C_{in}$  とし、立体形状で切り目  $c \in C_{in}$  をなす辺の数を  $n_c^{\text{cut}}$  とする。また、Fig. 2(b)のように  $xy$  平面上に展開図を作成するとき、 $z$  軸正側から見て左側に切り目による穴、右側に面が存在するように切り目をなす辺を順に辿ったときに各辺を  $e_{c,1}, \dots, e_{c,2n_c^{\text{cut}}}$  とおく。このとき、辺  $e_{c,i} (i=1, \dots, 2n_c^{\text{cut}})$  のうち2辺ずつが立体形状での同一辺である。辺  $e_{c,i} (i=1, \dots, 2n_c^{\text{cut}})$  の長さを  $l_{c,i}$  とし、 $\mathbf{u}_{c,i} \in \mathbb{R}^2$  を単位ベクトルとして、Fig. 2(b)に示すように展開図上で辺  $e_{c,i-1}$  と共有する端点を始点とし、 $e_{c,i+1}$  と共有する端点を終点とする辺  $e_{c,i}$  に沿ったベクトルを  $l_{c,i}\mathbf{u}_{c,i}$  とおく。また、Fig. 2のように辺  $e_{c,i}$  と辺  $e_{c,i+1}$  の間の頂点のまわりの面の内角の和を  $\varphi_{c,i}$  とおくと、 $i=1, \dots, 2n_c^{\text{cut}}-1$  に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{c,i+1} &= \mathbf{R}(\varphi_{c,i} - \pi) \mathbf{u}_{c,i} \\ &= \mathbf{R}(\varphi_{c,i} - \pi) \cdots \mathbf{R}(\varphi_{c,1} - \pi) \mathbf{u}_{c,1} \\ &= \mathbf{R}\left(\sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} - i\pi\right) \mathbf{u}_{c,1} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{R}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  は角度  $\alpha$  だけ反時計回りに平面上のベクトルを回転させる回転行列であり、以下のように表される。

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4)$$

辺  $e_{c,1}$  と辺  $e_{c,2n_c^{\text{cut}}}$  の間の頂点まわりの面の内角の和を  $\varphi_{c,2n_c^{\text{cut}}}$  とし、式(3)において  $i=2n_c^{\text{cut}}$  とした場合を考えると、 $\mathbf{u}_{c,2n_c^{\text{cut}}+1} = \mathbf{u}_{c,1}$  である必要があることから、 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  を単位行列として次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\left(\sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}} \varphi_{c,i} - 2n_c^{\text{cut}}\pi\right) \mathbf{u}_{c,1} &= \mathbf{u}_{c,1} \\ \Leftrightarrow \left[\mathbf{R}\left(\sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}} \varphi_{c,i} - 2n_c^{\text{cut}}\pi\right) - \mathbf{I}\right] \mathbf{u}_{c,1} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

切り目上の辺  $e_{c,1}$  の選び方は任意であり、 $\mathbf{u}_{c,1}$  の取り方は座標系に依らないため、式(5)は任意の  $\mathbf{u}_{c,1}$  に対して成り立つ。したがって、 $k$  を  $k > -n_c^{\text{cut}}$  を満たす整数として  $\varphi_{c,i}$  は次式を満たす。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}} \varphi_{c,i} - 2n_c^{\text{cut}}\pi &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}} \varphi_{c,i} &= 2(n_c^{\text{cut}} + k)\pi \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)より、 $k$  は展開図上で切り目をなす辺を一周した際に  $\mathbf{u}_{c,1}$  が反時

計回りに回転する回数を表しており、回転数とよばれる。Fig. 2(b)のように展開図において切り目のまわりの面が重ならず、切り目を構成する辺が交差しない場合は明らかに $k=1$ である。一方、切り目のまわりで面が重なる場合は $k=1$ とは限らないが、本稿では回転数が0以下または2以上の場合は考慮せず、 $k=1$ を仮定する。一方、立体形状で切り目は木構造であり、切り目を構成する辺の端点である立体形状の頂点（以下、切り目上の頂点）数は $n_c^{\text{cut}}+1$ であることから、切り目 $c$ 上の頂点の集合を $V_c^{\text{cut}}$ とおくと次式が成り立つ。

$$\sum_{v \in V_c^{\text{cut}}} \kappa_v = 2(n_c^{\text{cut}}+1)\pi - \sum_{j=1}^{2n_c^{\text{cut}}} \varphi_{c,j} \quad (7)$$

ゆえに、式(6)は $k=1$ の仮定より切り目上の頂点のガウス曲率の条件として以下のように表すことができる。

$$\sum_{v \in V_c^{\text{cut}}} \kappa_v = 2(1-k)\pi = 0 \quad (c \in C_{\text{in}}) \quad (8)$$

一方、Fig. 2(b)のように切り目を構成する辺は展開図上で1周して閉じる必要があるため、次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}} l_{c,i} \mathbf{u}_{c,i} = \left[ l_{c,1} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \mathbf{R} \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) \right] \mathbf{u}_{c,1} = \mathbf{0} \quad (9)$$

式(9)を満たす $\mathbf{u}_{c,1}$ が存在する条件は以下の通りである。

$$\begin{aligned} & \det \left[ l_{c,1} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \mathbf{R} \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) \right] \\ &= \left\{ l_{c,1} + \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \cos \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \sin \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) \right\}^2 \\ &= 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} l_{c,1} + \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \cos \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{2n_c^{\text{cut}}-1} (-1)^i l_{c,i+1} \sin \left( \sum_{j=1}^i \varphi_{c,j} \right) = 0 \end{cases} \quad (c \in C_{\text{in}}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)を $l_{c,i}$ ,  $\varphi_{c,i}$ が満たすとき、任意の $\mathbf{u}_{c,1}$ に対して式(9)が成り立つ。なお、本稿では展開過程での面の自己交差および展開図上で面が重なることを許容する。このとき、端点が折紙曲面外周部に存在しない切り目での展開可能条件は式(8), (10)である。また、面の重なりを許容するとき、端点が外周部に存在する切り目に接続する面は任意の形状で平面展開可能である。以上より、展開可能条件は式(1), (8), (10)、多角形面の平坦条件は式(2)で表される。

### 3. 曲面近似精度

目標曲面を $m_\xi \times m_\psi$ 次のテンソル積ベジエ曲面を用いて表す。 $\xi, \psi$ を0以上1以下のパラメータとするとベジエ曲面上の点の位置ベクトル $\bar{\mathbf{r}}(\xi, \psi) \in \mathbb{R}^3$ は以下のように表される<sup>23)</sup>。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}(\xi, \psi) &= \sum_{i=0}^{m_\xi} \sum_{j=0}^{m_\psi} \mathbf{P}_{ij} B_i^{m_\xi}(\xi) B_j^{m_\psi}(\psi) \\ B_k^m(t) &= \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ は制御点の位置ベクトル、 $B_k^m(t)$ はバーンスタイン基底関数である。また、点 $\bar{\mathbf{r}}(\xi, \psi)$ におけるベジエ曲面の単位法線ベ

クトル $\bar{\mathbf{v}}(\xi, \psi) \in \mathbb{R}^3$ は以下のように表すことができる<sup>24)</sup>。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}(\xi, \psi) &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}(\xi, \psi)}{\|\tilde{\mathbf{v}}(\xi, \psi)\|} \\ \tilde{\mathbf{v}}(\xi, \psi) &= \sum_{i=0}^{2m_\xi-1} \sum_{j=0}^{2m_\psi-1} \mathbf{Q}_{ij} B_i^{2m_\xi-1}(\xi) B_j^{2m_\psi-1}(\psi) \\ \mathbf{Q}_{ij} &= \frac{m_\xi m_\psi}{\binom{2m_\xi-1}{i} \binom{2m_\psi-1}{j}} \\ &\quad \sum_{\substack{k_1+k_2=i \\ 0 \leq k_1 \leq m_\xi-1 \\ 0 \leq k_2 \leq m_\psi-1}} \left\{ \binom{m_\xi-1}{k_1} \binom{m_\xi}{k_2} \binom{m_\psi}{h_1} \binom{m_\psi-1}{h_2} \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{P}_{(k_1+1)h_1} - \mathbf{P}_{k_1 h_1}) \times (\mathbf{P}_{k_2(h_2+1)} - \mathbf{P}_{k_2 h_2}) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

折紙を構成する多面体の全頂点の集合を $V$ とし、頂点 $v \in V$ の位置ベクトルを3つのパラメータ $\xi_v, \psi_v, \zeta_v$  ( $0 \leq \xi_v, \psi_v \leq 1$ )の関数として以下のように定義する。

$$\mathbf{r}(\xi_v, \psi_v, \zeta_v) = \bar{\mathbf{r}}(\xi_v, \psi_v) + \zeta_v \bar{\mathbf{v}}(\xi_v, \psi_v) \quad (13)$$

このとき、折紙曲面の頂点と目標曲面の距離に関する折紙曲面による目標曲面の近似誤差 $G_D$ を以下のように定義する。

$$G_D = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \zeta_v^2 \quad (14)$$

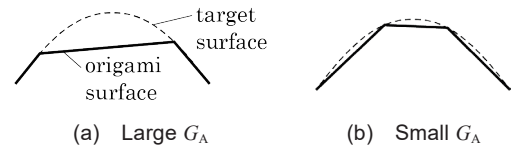


Fig. 3 Origami surfaces with  $G_D = 0$  but different  $G_A$

Fig. 3に示すように $G_D = 0$ であっても折紙曲面の「見た目」が目標曲面と近いといえない場合がある。そこで、折紙曲面の表面積を $A$ 、目標曲面の表面積を $\bar{A}$ として、表面積に関する近似誤差 $G_A$ を以下のように定義する。

$$G_A = |A - \bar{A}| \quad (15)$$

なお、 $A$ は折紙曲面の各面の面積の和として計算できる。目標曲面であるベジエ曲面の表面積の厳密解を求めることは困難なため、本稿では目標曲面を十分な精度で三角形分割し、三角形面の面積の和でベジエ曲面の表面積を近似する。

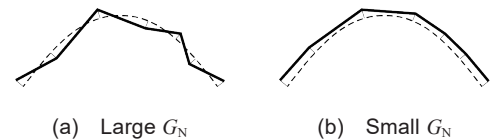


Fig. 4 Origami surfaces with same  $G_D$  but different  $G_N$

また、Fig. 4に示すように $G_D$ の値が同じでも折紙曲面の面の向きにより「見た目」が大きく異なる場合がある。そこで、面の単位法線ベクトルの向きに関する近似誤差 $G_N$ を定義する。折紙曲面の全三角形面の集合を $F$ とし、面 $f \in F$ の頂点の集合を $V_f^m$ とおく。さらに、面

$f$ の頂点に対応する目標曲面上の点における目標曲面の単位法線ベクトルの平均を $\bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}}$ とおくとき、 $G_N$ を以下のように定義する。

$$G_N = \sum_{f \in F} \|\mathbf{v}_f - \bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}}\|^2 \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}} = \frac{\sum_{v \in F_f^{\text{int}}} \bar{\mathbf{v}}(\xi_v, \psi_v)}{\left\| \sum_{v \in F_f^{\text{int}}} \bar{\mathbf{v}}(\xi_v, \psi_v) \right\|}$$

ただし、面 $f$ の単位法線ベクトル $\mathbf{v}_f$ の向きは形状生成の初期形状において $\mathbf{v}_f \cdot \bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}} \geq 0$ を満たすように定める。以上より、折紙曲面と目標曲面の距離、表面積、法線ベクトルの向きを考慮した折紙曲面による目標曲面の近似精度 $G$ を、非負のスケーリングパラメータ $w_A, w_N$ を用いて以下のように定義する。

$$G = G_D + w_A G_A + w_N G_N \quad (17)$$

#### 4. 切り目を有する剛体折紙の形状生成

##### 4.1 独立変数の抽出

折紙曲面の頂点位置を定めるパラメータ $\xi_v, \psi_v, \zeta_v$ を変数として形状生成を行う。目標曲面および折線パターンが対称性を有する場合、パラメータの対称性を考慮する。例えば、式 $\beta_1 \xi + \beta_2 \psi + \beta_3 = 0$ で表される平面 $S$ に対してパラメータ空間上で対称な位置にある頂点の組 $\{v, v'\}$ の集合を $V_S^{\text{sym}}$ とおくと、 $\xi_v, \psi_v, \zeta_v, \xi_{v'}, \psi_{v'}, \zeta_{v'}$ は次式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{\beta_1}{2}(\xi_v + \xi_{v'}) + \frac{\beta_2}{2}(\psi_v + \psi_{v'}) + \beta_3 = 0 \\ \beta_2(\xi_v - \xi_{v'}) - \beta_1(\psi_v - \psi_{v'}) = 0 \\ \zeta_v - \zeta_{v'} = 0 \end{cases} \quad (\{v, v'\} \in V_S^{\text{sym}}) \quad (18)$$

一方、初期形状においてパラメータ $\xi_v$ の値が0または1である頂点に関して $\xi_v$ の値を初期値に固定し、パラメータ $\psi_v$ についても同様とする。ここで、折紙曲面の頂点数を $n_v$ とし、パラメータ $\xi_v, \psi_v, \zeta_v$ を全頂点に関してまとめたベクトルを $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{3n_v}$ とおく。このとき、式(18)で表される等式の数と値を初期値に固定するパラメータの数の和を $n_{\text{eq}}$ とおくと、対称条件式(18)およびパラメータの固定条件式は定行列表 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_{\text{eq}} \times (3n_v + 1)}$ を用いてまとめて以下のように表せる。

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (19)$$

行列 $\mathbf{A}$ のランクを $\text{rank}(\mathbf{A})$ と表すと、 $\mathbf{A}$ のreduced row-echelon form (RREF)<sup>25)</sup>より式(19)を満たす $\bar{\mathbf{X}}$ の独立な成分 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n_v - \text{rank}(\mathbf{A})}$ と従属な成分 $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{\text{rank}(\mathbf{A})}$ を抽出でき、ベクトル $\mathbf{X}$ を形状生成の変数とする。文献<sup>26)</sup>付録に示す導出過程より、行列 $\mathbf{A}$ のRREFのpivot行とよばれる行を取り出した行列から、さらにpivot列とよばれる列を取り出したフルランク行列 $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{\text{rank}(\mathbf{A}) \times \text{rank}(\mathbf{A})}$ とpivot列以外の列を取り出した行列 $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{\text{rank}(\mathbf{A}) \times (3n_v - \text{rank}(\mathbf{A}) + 1)}$ を用いて $\hat{\mathbf{X}}$ は次式のように $\mathbf{X}$ で表せる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\mathbf{X}} = -\hat{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

#### 4.2 折紙曲面の形状最適化問題

展開可能条件と多角形面の平坦条件を満たし目標曲面を近似する折紙曲面を生成するため、展開可能条件(1), (8), (10)および多角形の平坦条件(2)を制約条件として式(17)に示す近似誤差を最小化する。最適化の過程で折紙曲面の面が線や点に縮退することを避けるため、各辺 $e \in E$  ( $E$ は全辺の集合)の長さ $l_e$ に下限値 $l_{\min}$ を定める。また、極端に鋭角な三角形面を避けるため三角形面の内角 $\theta_{v,i}$  ( $v \in V, i = 1, \dots, n_v^{\text{edge}}$ )に上下限値 $\theta_{\max}, \theta_{\min}$ を定める。さらに、折紙曲面の各面の法線ベクトルの向きが目標曲面に対して大きく異なることがないよう、面の単位法線ベクトル $\mathbf{v}_f$  ( $f \in F$ )と式(16)中の単位ベクトル $\bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}}$ のなす角は $\pi/2$ 以内に制限する。独立変数 $\mathbf{X}$ のうち $\xi_v, \psi_v$ に対応する成分は0以上1以下であり、 $\zeta_v$ に対応する成分には上下限値を与える。各成分が取得値の範囲内にある $\mathbf{X}$ の集合を $\chi$ とし、展開可能条件と多角形面の平坦条件を満たし目標曲面を近似する折紙曲面を得るための非線形計画問題を以下のように定める。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & G(\mathbf{X}) = G_D(\mathbf{X}) + w_A G_A(\mathbf{X}) + w_N G_N(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{展開可能条件(1), (8), (10)} \\ & \text{多角形面の平坦条件(2)} \\ & l_e(\mathbf{X}) \geq l_{\min} \quad (e \in E) \\ & \theta_{\min} \leq \theta_{v,i}(\mathbf{X}) \leq \theta_{\max} \quad (v \in V; i = 1, \dots, n_v^{\text{edge}}) \\ & \mathbf{v}_f(\mathbf{X}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_f^{\text{ref}}(\mathbf{X}) \geq 0 \quad (f \in F) \\ & \mathbf{X} \in \chi \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.3 変形メカニズムの評価と固定折線の選択

4.2節の最適化問題を解いて得られた折紙曲面をフレームモデル<sup>14, 15)</sup>でモデル化し、微小変形および大変形メカニズムの評価と固定折線の選択を行う。フレームモデルはFig. 5に示すようにフレーム要素を三角形面の重心および分割線の中点で剛接合し、折線の中点でヒンジ接合したモデルである。微小変形メカニズムの評価は津田ら<sup>21)</sup>の手法を用いて行う。さらに、文献<sup>15)</sup>と同様に微小変形メカニズムの評価をもとに回転を固定する折線（分割線に変更する折線）の選択を行う。また、汎用の有限要素解析ソフトウェアを用い、フレームモデルの節点に強制変位を与えて平面展開することで大変形メカニズムを評価する。大変形解析では部材の弾性を仮定し、解析過程で節点変位より計算できる折紙曲面の辺の長さの変化と多角形面の面外変形量が十分に小さいとき、得られた解形状は剛体折り可能であるとみなす。なお、多角形面の面外変形量は分割線上の節点および分割線を共有する三角形面の分割線以外の辺上の節点の変位から求まる2つの三角形面の二面角で表す。

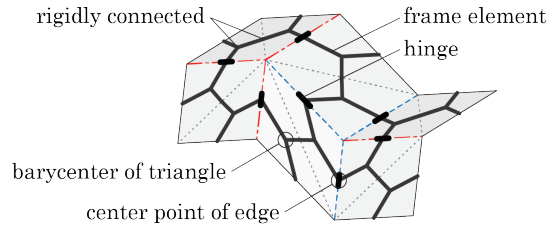


Fig. 5 Configuration of frame model

#### 4.4 形状生成過程

形状生成では目標曲面を三角形分割した多面体を初期形状とし、形状生成過程で頂点の接続関係を維持する。すなわち、剛体折紙の折線パターンは目標曲面の分割パターンに依存する。分割パターンは任意であるが、折線が回転できるように各頂点に4本以上の辺が接続するように定める。また、切り目の位置もあらかじめ定める。例えば、紙状の薄い面を平面から伸縮させずに変形させた際の「しわ」や「ひだ」を無視して巨視的に曲面全体を捉えた近似曲面のガウス曲率を「外在的」なガウス曲率とよぶとき、Tachi<sup>27)</sup>が示すように「外在的に正」のガウス曲率をもつ曲面をつくる場合には周辺部、「外在的に負」のガウス曲率をもつ曲面をつくる場合には中央部にしわができることを考慮し、ガウス曲率が正の目標曲面では周辺部、負の曲面では中央部に切り目を配置することが考えられる。

以上より、目標曲面を近似する平面展開可能かつ剛体折り可能な折紙曲面の形状生成過程は以下のようにまとめられる。なお、展開図の生成は既往手法<sup>15)</sup>と同様に立体形状と展開図上での辺の長さの誤差を最小化する最適化問題を解くことで行う。

1. 目標曲面の三角形分割パターンおよび折紙曲面上の切り目の位置を指定する。
2. 式(20)中の行列  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}$  の導出過程より、独立な変数を抽出する。
3.  $E_{\text{div}} = \phi$  とし、解候補リストを初期化する。
4. 目標曲面を三角形分割した多面体を初期形状として最適化問題(21)を解く。
5. 4の解形状の展開可能条件式(1), (8), (10)および多角形面の平坦条件式(2)の左辺の値の0からの誤差が許容値以下の場合には6に、許容値より大きい場合は9に進む。
6. 4の解形状の微小変形メカニズムの評価を行い、変形自由度を計算する。全ての折線が回転可能であれば7に、それ以外の場合は9に進む。
7. 4の解形状を解候補リストに追加する。
8. 固定折線の候補が存在する場合は  $E_{\text{div}}$  に新たな折線を追加して4に戻る。固定折線の候補が存在しない場合は10に進む。
9.  $E_{\text{div}} = \phi$  の場合は形状生成を終了する。  $E_{\text{div}} \neq \phi$  かつ固定折線の候補が存在する場合は前段階で  $E_{\text{div}}$  に追加した折線を  $E_{\text{div}}$  から削除し、前段階で指定したものと異なる折線を  $E_{\text{div}}$  に追加して4に戻る。その他の場合は10に進む。
10. 解候補リストの解形状の展開図を生成し、辺長誤差を評価する。
11. 解候補リストの解形状の大変形解析を行い、変形過程でのフレームモデルの節点変位から折紙曲面の辺長変化と多角形面の面外変形(面の変形)を評価する。
12. 展開図の辺長誤差および大変形過程での面の変形が十分小さい解を平面展開可能かつ剛体折り可能な解として出力する。

#### 5. 数値例題

##### 5.1 解析条件

4節で示した形状生成過程を実行するプログラムをPython 3で作成し、非線形計画問題(21)および展開図生成の最適化問題のソルバーとしてpyOpt<sup>28)</sup>より逐次二次計画法のライブラリSNOPT Ver. 7<sup>29)</sup>を用いる。また、フレームモデルによる大変形解析にはAbaqus 2020<sup>30)</sup>を用いる。以下の例では目標曲面上の点が  $x, y$  座標に対して

一意に定まることを考慮し、展開図は解形状を  $xy$  平面に投影した形状を初期形状として  $xy$  平面上に生成する。大変形解析では、フレームモデルの面上の節点に  $xy$  平面への  $z$  軸方向の強制変位を与える。式(17)のスケーリングパラメータ  $w_A, w_N$  の値や展開可能条件・多角形面の平坦条件の誤差の許容値などのパラメータは各節に示す。形状生成において長さの単位の選択は結果に影響を与えないため表示を省略するが、大変形解析における材料特性等の設定の便宜上、長さの単位を  $m$  とする。大変形解析では外径  $0.04 m$ 、板厚  $0.001 m$  の円筒形断面の3次元梁要素でフレームをモデル化する。材料のヤング率とポアソン比はそれぞれ  $200 GPa, 0.03$  とする。また、ヒンジにはコネクター要素の3次元ヒンジを用いる。解析の安定性を考慮し、ヒンジには微小な回転剛性 ( $0.001 N \cdot m$ ) を与える。なお、以上の大変形解析の設定は解析結果に大きな影響を与えない。

##### 5.2 HP 曲面

Fig. 6に示す正方形平面をもつHP曲面を目標曲面とし、Fig. 7のように三角形分割した多面体を初期形状として形状生成を行う。Fig. 6中の点と数字はベジエ曲面の制御点とその座標を表す。形状生成ではFig. 7に示す2平面に関する対称性を考慮する。切り目はFig. 8(a), (c)に示す端点が外周上に存在しないパターンX, HおよびFig. 8(b)に示す端点が外周上に存在するパターンEを用いる。式(17)のスケーリングパラメータは初期形状における  $G_D, G_A, G_N$  の値を参考にそれぞれ  $w_A = 0.2, w_N = 1.0$  とする。最適化問題(21)の制約条件中の各パラメータはそれぞれ  $l_{\min} = 1, \theta_{\min} = \pi/6, \theta_{\max} = 5\pi/6$  とし、変数  $\zeta_i$  の範囲は  $-5$  以上  $5$  以下とする。また、展開可能条件と多角形面の平坦条件の誤差の許容値は  $10^{-5}$  とする。

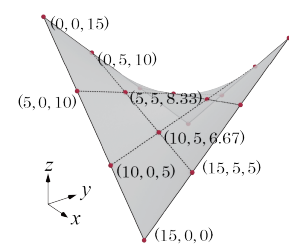


Fig. 6 Target HP surface and its control points

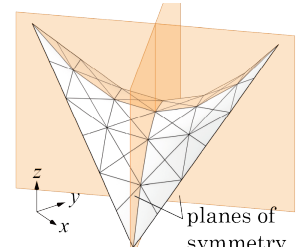


Fig. 7 Initial shape for approximating HP surface

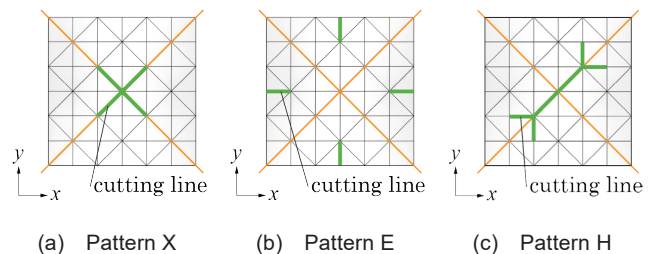


Fig. 8 Cutting patterns for approximating HP surface

Fig. 9に得られた各解の近似誤差関数  $G(X)$  の値、Fig. 10に各解の変形自由度をそれぞれ示す。各解は、展開図作成時の各辺の長さの立体形状に対する誤差が  $1.5 \times 10^{-3} \%$  以下であり、大変形解析過程での辺の長さの変化量の絶対値の平均値がもとの辺の長さに対して  $0.2 \%$  以下、多角形面の面外変形が  $0.015 \text{ rad}$  以下である。したがって

て、各解の平面展開時の誤差および剛体折りの誤差は十分に小さい。

形状生成では折線を順次固定しながら逐次的に最適化問題を解くとともに切り目の有無により固定する折線の位置が異なるため、変形自由度の小さい解では切り目を導入した場合の方が近似精度が悪くなることもありうる。しかし、HP曲面を目標曲面とした場合、Fig. 9に示すように切り目の導入により近似精度は概ね向上した。なお、パターンHの切り目を導入した際に、固定折線数が10および22の場合に近似誤差が他の解と比較して10倍程度大きい解が得られた。パターンXの切り目を導入した場合には他の場合と比較して固定折線数が大きい解でも近似誤差が悪化しにくい傾向がある。固定折線数が小さい範囲ではパターンEの切り目を導入した際に最も近似誤差が小さいが、これは最適化問題(21)の制約条件数が最も小さいことによると考えられる。一方、Fig. 10に示すように切り目の導入により解の変形自由度は大きくなる。最大および最小変形自由度は切り目を導入しない場合それぞれ21, 5であり、パターンXではそれぞれ26, 3, パターンEではそれぞれ29, 7, パターンHではそれぞれ30, 8である。施工性の観点からは変形自由度は小さい方がよいと考えられるが、パターンE, Hでは最小変形自由度が切り目を導入しない場合よりも大きく、固定する折線数が大きいことから最小変形自由度の解においては切り目を導入しない場合より近似精度が悪化している。一方、パターンXでは、切り目を導入しない場合よりも変形自由度が小さい解が得られているものの、近似精度の向上はすべての解において小さい。以上のように、特にパターンE, Hの例では切り目の導入による近似精度の向上と変形自由度の小ささにはおおよそのトレードオフ関係があるといえる。

Figs. 9, 10中に○で示した固定折線数の近い解の形状および展開図を次ページFig. 11にそれぞれ示す。切り目の無い解は中央付近がほぼ平坦で四隅が集中的に折れているのに対し、切り目を有する解は中央付近も平坦ではなく、曲面全体の折線が0よりも十分に大きい折り角度をもっている。なお、パターンE, Hの切り目を導入した解は展開図で切り目の部分がほとんど開いていないことから、HP曲面に対しこれらの切り目パターンを導入した場合には切り目の効果が小さいと考えられ、近似誤差関数も切り目がない解と近い値をとっている。

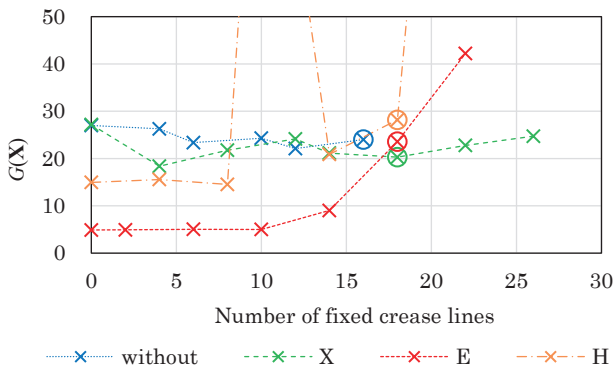


Fig. 9 Value of approximation error function

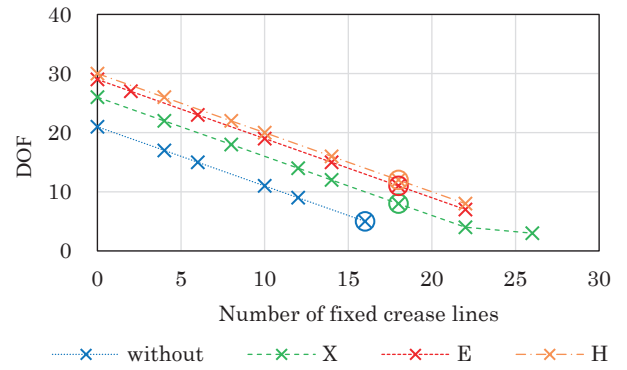


Fig. 10 Degrees of freedom of solutions

### 5.3 ドーム曲面

Fig. 12に示すドーム曲面を目標曲面とし、Fig. 13のように三角形分割した多面体を初期形状として形状生成を行う。形状生成ではFig. 13に示す2平面に関する対称性を考慮し、Fig. 14に示すパターンX, E, およびEEの切り目を用いる。式(17)のスケーリングパラメータはHP曲面の場合と同様にそれぞれ $w_A = 0.2$ ,  $w_N = 1.0$ とし、最適化問題(21)の制約条件中の各パラメータはそれぞれ $l_{\min} = 1$ ,  $\theta_{\min} = \pi/6$ ,  $\theta_{\max} = 5\pi/6$ , 変数 $\zeta_i$ の範囲は-7.5以上7.5以下とする。ドーム曲面では誤差の小さい解が得られにくいことを考慮して、展開可能条件と多角形面の平坦条件の誤差の許容値は $10^{-4}$ とする。

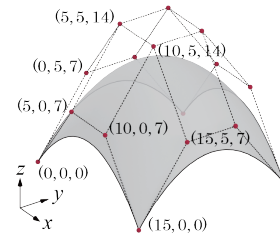


Fig. 12 Target dome surface and its control points

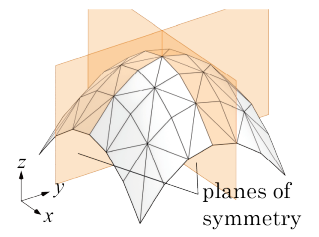


Fig. 13 Initial shape for approximating dome surface

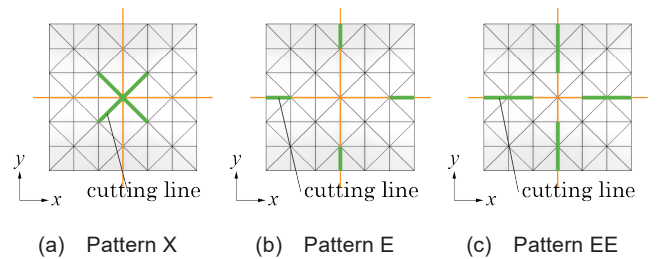


Fig. 14 Cutting patterns for approximating dome surface

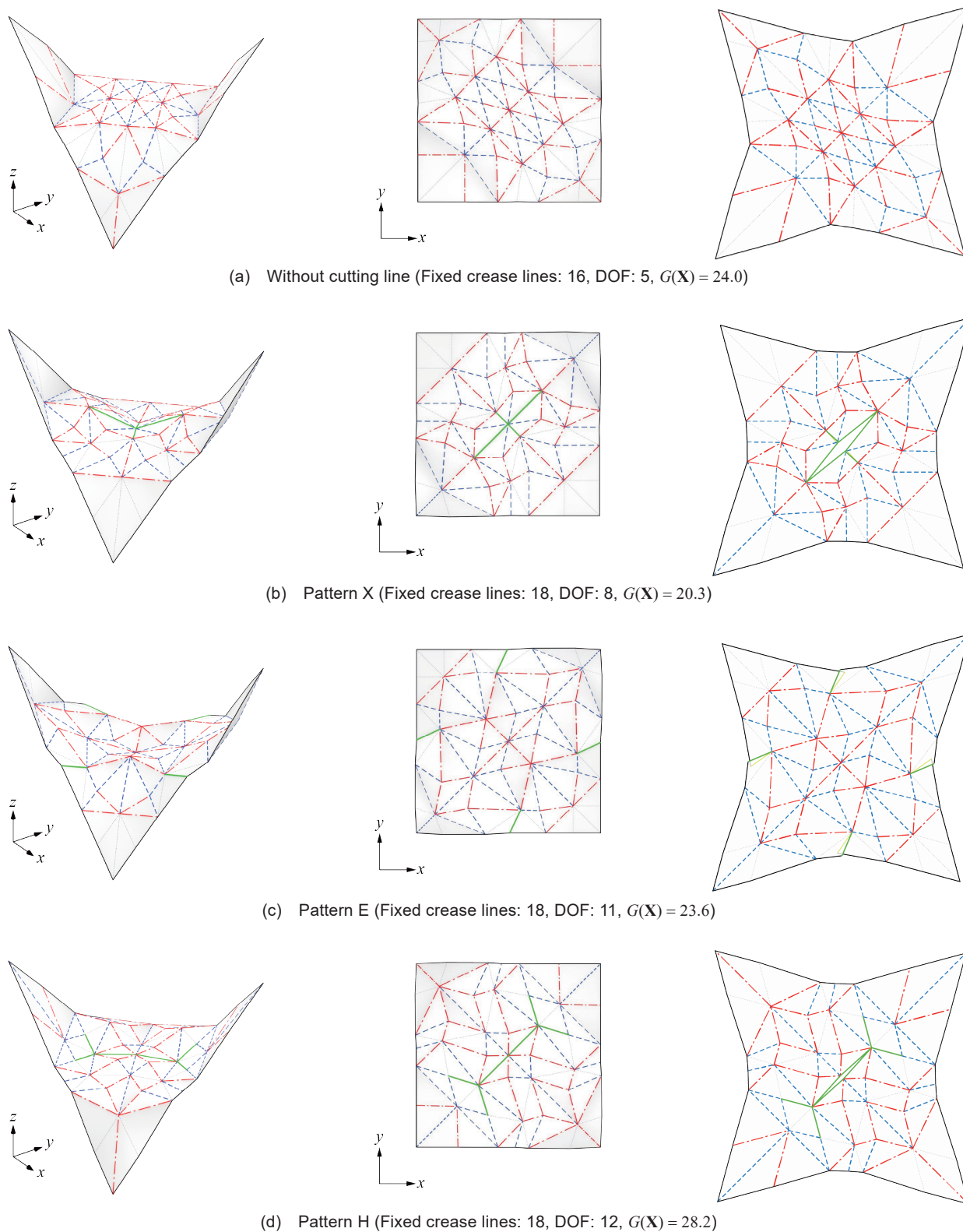


Fig. 11 Optimal shapes for approximating HP surface (left: isometric view, center: plan view, right: development diagram)

Fig. 15に形状生成過程で得られた各解の近似誤差関数 $G(\mathbf{X})$ の値を、Fig. 16に各解の変形自由度をそれぞれ示す。また、Figs. 15, 16中に○で示した解の形状および展開図をFig. 17に示す。得られた各解について、展開図作成時の各辺の長さの立体形状の辺長に対する誤差は $5.0 \times 10^{-3}$  %以下である。また、各解の大変形解析過程での辺

の長さの変化量の絶対値の平均値はもとの辺の長さに対して0.6 %以下であり、多角形面の面外変形は0.040 rad以下と小さく、HP曲面の近似と比較して誤差は大きいものの、各解の平面展開時の誤差および剛体折りの誤差は十分に小さい。

ドーム曲面の近似では、Fig. 15に示すように多面体外周部に端点

が存在するパターンEおよびEEの切り目を導入した場合に近似精度が大きく向上した一方、パターンXを導入した場合には近似精度はあまり向上しなかった。Fig. 17(a)に示すように、ドーム曲面の近似では折紙曲面の外周部で特に近似誤差が大きくなると考えられることから、外周部に端点が存在する切り目を導入することが効果的であると考えられる。また、Fig. 16に示すように得られた解の最大および最小変形自由度は切り目の無い場合はそれぞれ21, 1であり、パターンXではそれぞれ26, 1, パターンEではそれぞれ29, 3, パターンEEではそれぞれ37, 5である。

Fig. 17 (a)に示すように切り目の無い場合には中央付近が凹であるような形状が得られているのに対して、Fig. 17 (b)~(d)に示すように切り目を導入した場合には全体がおおよそ凸な形状が得られている、なお、Fig. 17(c)に示すパターンEの切り目を導入した場合の解形状には、接続する2面がほぼ平行の折られていない折線が含まれる。また、Fig. 17(b)のパターンXの切り目を導入した解形状の展開図では、切り目まわりで面が重なっている。

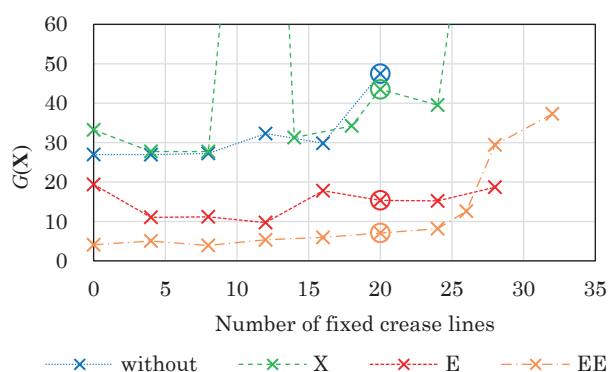


Fig. 15 Value of approximation error function

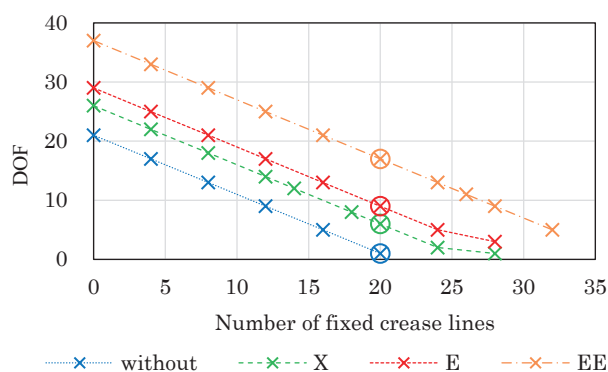


Fig. 16 Degrees of freedom of solutions

## 6. 結論

本稿では、著者らの既往の剛体折紙の形状生成法に新たに切り目を導入し、切り目の無い場合と比較して近似精度の向上を図った。また、既往手法では生じた「見た目」が折紙曲面と目標曲面の間で乖離することを避けるために新たな近似誤差関数を定義した。提案した手法では、まず、切り目を構成する辺の端点でない内部頂点での展開可能条件をガウス曲率の条件式として表し、切り目まわり

の展開可能条件を、切り目上の内部頂点のガウス曲率の和の条件式と、切り目を構成する辺の長さで切り目まわりの面の内角の条件式で表す。次に、展開可能条件と多角形面の平坦条件のもとで目標曲面の近似誤差を最小化する最適化問題を解くことで平面へ展開可能であるための必要条件を満たす折紙曲面の形状を得る。得られる折紙曲面の「見た目」が目標曲面に近くなるよう、近似誤差を表す関数は折紙曲面の頂点と目標曲面との距離に加え、折紙曲面と目標曲面の表面積の誤差および折紙曲面の面と目標曲面の単位法線ベクトルの誤差を考慮して定義する。また、折紙曲面の頂点座標を目標曲面であるベジエ曲面上の点の位置を定めるパラメータおよび目標曲面の法線方向へのオフセット量を変数として表すことで、折紙曲面の頂点と目標曲面の距離の計算を容易にしている。剛体折紙の変形メカニズムの解析にはフレームモデルを用い、変形自由度の大きな解は屋根構造などへの応用が困難なことから、既往手法と同様に形状生成の過程で折線を順に固定することで変形自由度を削減し、変形自由度の小さい解を得ることを試みている。解形状の展開可能性は展開図の作成により確認し、剛体折り可能性はフレームモデルを用いた大変形解析で確認する。

数値例題では、HP曲面とドーム曲面を剛体折紙によって近似した。端点が折紙曲面の外周部に存在しない切り目および存在する切り目に関して切り目の無い場合と比較して近似精度を検証した。特に、折紙曲面外周部に端点が存在する切り目を導入した際に、最適化問題の制約条件数の削減に伴い近似精度が大きく向上した。また、HP曲面を近似する際には、曲面中央部に切り目を導入することで固定折線数の増大に伴う近似精度の悪化を軽減できることが確認された。一方、ドーム曲面の近似では、外周部に端点が存在する切り目を導入することで近似精度が大きく向上したのに対し、曲面中央部へ切り目を導入することによる効果は小さいことが確認された。

本稿では、折線パターンの基礎となる目標曲面の分割パターンおよび切り目の位置に関しては事前に与えるものとした。しかし、目標曲面の形状と切り目の位置の組み合わせにより近似精度が大きく異なり、場合によっては切り目導入の効果が小さくなることから、切り目の位置に関する何らかの指標を提案することが今後の課題として挙げられる。また、目標曲面の近似誤差関数内の2つのスケールパラメータの組み合わせは本稿では1種類のみ用いたが、スケールパラメータを変更した際に得られる形状の差異の検証も検討すべき課題である。

## 謝辞

本研究はJSPS科研費JP20J21650, JST CREST JPMJCR1911の助成を受けた。

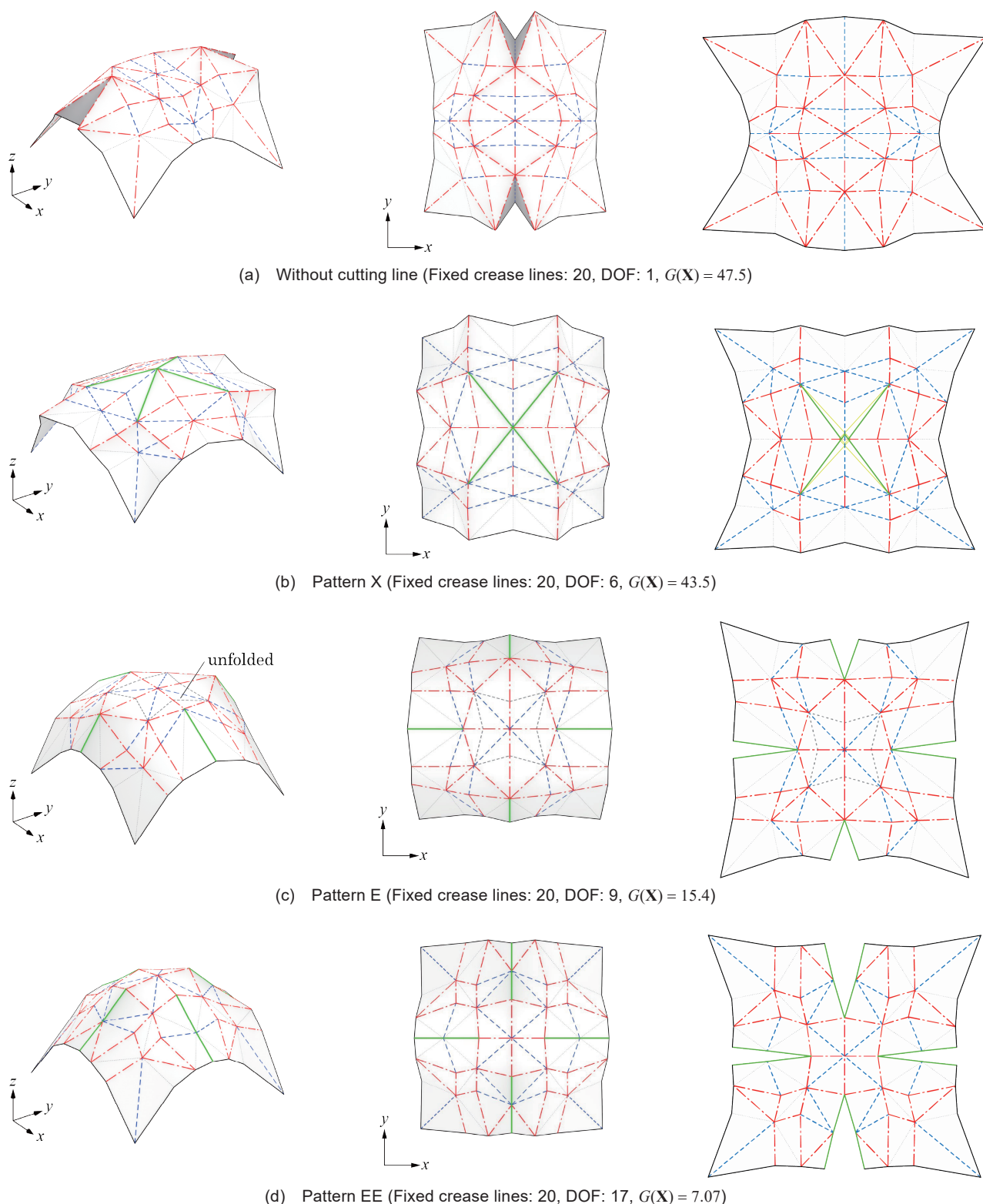


Fig. 17 Optimal shapes for approximating dome surface (left: isometric view, center: plan view, right: development diagram)

#### 参考文献

- 1) E. D. Demaine and J. O'Rourke: Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra, Cambridge University Press, 2007
- 2) T. Tachi: Rigid origami mechanisms, Journal of the Robotics Society of Japan, Vol. 34, No. 3, pp. 184–191, 2016 (in Japanese)  
館 知宏: 剛体折紙メカニズム, 日本ロボット学会誌, Vol. 34, No. 3, pp. 184–191, 2016 (DOI: <https://doi.org/10.7210/jrsj.34.184>)
- 3) M. Meloni, J. Cai, Q. Zhang, D. S. Lee, M. Li, M. Ruijun, T. Parashkevov, and J. Feng, Engineering origami: A comprehensive review of recent applications, design methods, and tools, Advanced Science, Vol. 8, Paper No. 2000636, 2021 (DOI: <https://doi.org/10.1002/advs.202000636>)
- 4) S. A. Zirbel, R. J. Lang, N. M. Thomson, D. A. Sigel, P. E. Walkemeyer, B. P. Trease, S. P. Magleby, and L. L. Howell: Accommodating thickness in origami-based deployable arrays, Journal of Mechanical Design, Vol. 135 No. 11, Paper No. 111005, 2013 (DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4025372>)

- 5) N. De Temmerman, M. Mollaert, T. Van Mele, and L. De Laet: Design and analysis of a foldable mobile shelter system, *International Journal of Space Structures*, Vol. 22, No. 3, pp. 161–168, 2007 (DOI: <https://doi.org/10.1260/026635107782218868>)
- 6) S. Tsuda, Y. Nakamura, and M. Ohsaki: Design of deployable bar structure developed from Yoshimura-pattern rigid-origami, *AIJ Journal of Technology and Design*, Vol. 24, No. 56, pp. 111–116, 2018 (in Japanese)  
津田勢太, 中原嘉之, 大崎 純: ヨシムラ折り剛体折紙の変形機構を拡張した展開型骨組構造の開発, *日本建築学会技術報告集*, Vol. 24, No. 56, pp. 111–116, 2018 (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijt.24.111>)
- 7) P. M. Reis, F. L. Jimenez, and J. Marthelot: Transforming architectures inspired by origami, *Proc. National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 112, No. 40, pp. 12234–12235, 2015 (DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1516974112>)
- 8) R. D. Resch: Self-supporting structural unit having a series of repetitious geometrical modules, United States Patent No. 3,407,558, 1968
- 9) T. Tachi: Designing freeform origami tessellations by generalizing Resch's patterns, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 135, No. 11, pp. 111066-1–111066-10, 2013 (DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4025389>)
- 10) Y. Zhao, Y. Endo, Y. Kanamori, and J. Mitani: Approximating 3D surfaces using generalized waterbomb tessellations, *Journal of Computational Design and Engineering*, Vol. 5, pp. 442–448 2018 (DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2018.01.002>)
- 11) T. Tachi: Generalization of rigid foldable quadrilateral mesh origami, *Journal of International Association of Shell and Spatial Structures*, Vol. 50, Issue 162, pp. 173–179, 2009
- 12) L. Dudte, E. Vouga, T. Tachi, and L. Mahadevan: Programming curvature using origami tessellations, *Nature Materials*, Vol. 15, pp. 583–588, 2016 (DOI: <https://doi.org/10.1038/nmat4540>)
- 13) Z. He and S. D. Guest: On rigid origami II: quadrilateral creased papers, *Proc. Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 476, No. 2237, pp. 20200020, 2020 (DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0020>)
- 14) K. Hayakawa and M. Ohsaki: Form generation of rigid foldable origami structure using frame model, *Journal of Environmental Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 84, No. 760, pp. 597–605, 2019 (in Japanese)  
早川健太郎, 大崎 純: フレームモデルを用いた折紙構造の形状生成法, *日本建築学会環境系論文集*, 第 84 巻, 第 760 号, pp.597–605, 2019 (DOI: <https://doi.org/10.3130/aije.84.597>)
- 15) K. Hayakawa and M. Ohsaki, Form generation of rigid origami for approximation of a curved surface based on mechanical property of partially rigid frames, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 216, pp.182–199, 2021 (DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.12.007>)
- 16) K. Hayakawa and M. Ohsaki, Form generation of rigid origami by multiobjective optimization for approximating curved surface, *Proc. IASS symposium 2020/21*, Guilford, UK, 2021
- 17) K. Takahashi, T. Tachi, and Y. Yamaguchi: An approximation method of triangular mesh models for generating development diagrams with creases and slits, *IPSJ SIG Technical Report*, Vol. 2013-CG-153, No. 10, pp. 1–6, 2013 (in Japanese)  
高橋都子, 舘 知宏, 山口 泰: 折り目と切れ目を利用した三角形メッシュの近似展開図作成について, *情報処理学会研究報告*, Vol. 2013-CG-153, No. 10, pp. 1–6, 2013
- 18) M. Konaković-Luković, J. Panetta, K. Crane, and M. Pauly: Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 37, Issue 4, pp 1–13, 2018 (DOI: <https://doi.org/10.1145/3197517.3201373>)
- 19) G. Choi, L. Dudte, and L. Mahadevan: Programming shape using kirigami tessellations, *Nature Materials*, Vol. 18, pp. 999–1004, 2019 (DOI: <https://doi.org/10.1038/s41563-019-0452-y>)
- 20) K. Hayakawa and M. Ohsaki: Optimization of crease line alignment of rigid origami with cutting lines for approximating curved surface, *Proc. 2020 JSIAM Annual Meeting*, 2021 (in Japanese)  
早川健太郎, 大崎 純: 切れ目を有する剛体折紙の曲面近似のための折線配置最適化, *日本応用数理学会 2021 年度年会講演予稿集*, 2021
- 21) S. Tsuda, M. Ohsaki, S. Kikugawa and Y. Kanno: Analysis of stability and mechanism of frames with partially rigid connections, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 78, No. 686, pp. 791–798, 2013 (in Japanese)  
津田勢太, 大崎 純, 菊川翔平, 寒野善博: 部分剛接合骨組の安定性評価とメカニズムの解析, *日本建築学会構造系論文集*, Vol. 78, No. 686, pp. 791–798, 2013
- 22) J. M. Sullivan: Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces, *Discrete Differential Geometry, Oberwolfach Seminars*, Vol. 38, pp. 175–188, 2008 (DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8621-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8621-4_9))
- 23) G. Farin: *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 5th edition, 2001
- 24) Y. Yamaguchi: Normal cones and visibility cones of Bézier type surfaces, *Proc. The 51th National Convention of IPSJ*, pp. 2-277–2-278, 1995 (in Japanese)  
山口 泰: ベジエ型曲面の法線及び可視線ベクトルの存在域, *情報処理学会第 51 回大会講演論文集*, pp. 2-277–2-278, 1995
- 25) G. J. Borse: *Numerical Methods with MATLAB*, International Thomson Publishing Inc., 1997
- 26) K. Hayakawa and M. Ohsaki: Shape design of membrane structure using geometric invariants of discrete surface, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 86, No. 783, pp. 772–782, 2021 (in Japanese)  
早川健太郎, 大崎 純: 離散的な曲面の幾何学的不変量を用いた膜構造の形状設計, *日本建築学会構造系論文集*, Vol. 86, No. 783, pp. 772–782, 2021 (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.86.772>)
- 27) T. Tachi: Introduction to structural origami, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 60 No. 1, pp. 7–18, 2019 (DOI: <https://doi.org/10.20898/j.iass.2019.199.004>)
- 28) pyOpt Documentation, Release 1.2, <http://www.pyopt.org/>
- 29) P. E. Gill, W. Murray and M. A. Saunders: SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 12, pp. 979–1006, 2002 (DOI: <https://doi.org/10.1137/S1052623499350013>)
- 30) Abaqus 2020 Documentation, Dassault Systèmes, 2019

(2022 年 3 月 7 日原稿受理, 2022 年 5 月 23 日採用決定)