

確率行列に対する一評価と境界要素近似への応用.

阪大基礎工 早川 欽達郎 (Kantano Hayakawa)

§ 0. 記号と結果の記述.

実 N 次列ベクトル空間を V_N , その元を $\vec{u} = (u_j)_{j=1}^N$ 等とかく.

成分が 1 で他の成分が 0 である V_N の元を $\vec{e}^j$, 全ての成分が 1 である元を $\vec{1}$ とかく.

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_N$ に対し次の様に ノルム と duality を与える.

$$|\vec{u}|_1 = \sum_j |u_j|, \quad |\vec{v}|_\infty = \max\{|v_j| : j\}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_j u_j v_j$$

実 N 次正交代行列 $A = (a_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,N \\ k=1,\dots,N}}$ は次の条件を満たすものとする.

$$(\text{仮定 1}) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists p \geq 1 \quad \varepsilon N^{-1} \leq a_{j,k} \leq \varepsilon p N^{-1} \quad \forall j, k$$

$$(\text{仮定 2}) \quad A\vec{1} = \vec{1}$$

上の二つの仮定から A は確率行列で成分が全て正であるから既約になる. 次の一連の事実が容易にわかる.

$$1) \quad |A\vec{u}|_\infty \leq |\vec{u}|_\infty \quad \forall \vec{u} \in V_N$$

$$2) \quad 1 \text{ は } A \text{ の Perron 根であり } tA \text{ の Perron 根でもある.}$$

3) 1 は単根であり. 1 に属する A , tA の固有ベクトルとして成り立つ正であるものがとれる. (Perron-Frobenius の定理)

$\vec{1}$ は A の 1 の固有ベクトルである. tA の 1 の固有ベクトルを $\vec{\mu} = (\mu_j)_{j \in V}$ とおき, $|\vec{\mu}|_1 = 1$ と正規化しておく.

$$\begin{aligned} W_{\vec{1}} &= \{ \vec{u} \in V_N : \langle \vec{1}, \vec{u} \rangle = 0 \} \\ W_{\vec{\mu}} &= \{ \vec{v} \in V_N : \langle \vec{v}, \vec{\mu} \rangle = 0 \} \end{aligned} \quad \text{とおく.}$$

$$4) \quad A W_{\vec{\mu}} \subset W_{\vec{\mu}}, \quad {}^tA W_{\vec{1}} \subset W_{\vec{1}}$$

我々の主目的は次の定理である.

定理. A が (仮定1) (仮定2) を満たせば次のことが成り立つ.

- i) $|{}^tA \vec{v}|_1 \leq (1 - \varepsilon_0) |\vec{v}|_1 \quad \forall \vec{v} \in W_{\vec{1}}$
- ii) $|A \vec{u}|_\infty \leq (1 - p^{-1}) |\vec{u}|_\infty \quad \forall \vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$
- iii) $|(I - A) \vec{w}|_\infty \leq (2p)^{-1} |\vec{w}|_\infty \quad \forall \vec{w} \in W_{\vec{1}}$

§ 1. 証明の概略.

補題 1. $\vec{\mu}$ に対して, $\varepsilon_0 N^{-1} \leq \mu_j \leq \varepsilon_0 p N^{-1}$ が成り立つ.

補題 2. $\vec{v} \in W_{\vec{1}}$ に対し $T\vec{v} = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{\mu} \rangle \langle \vec{1}, \vec{\mu} \rangle^{-1} \vec{1}$ とおくと $T\vec{v} \in W_{\vec{\mu}}$ となり $\vec{v} = T\vec{v} - \langle \vec{1}, T\vec{v} \rangle N^{-1} \vec{1}$ である.

i) の証明.

$\vec{v} \in W_{\vec{1}}$ であれば $\sum_k v_k = 0$ である.

$$|{}^tA \vec{v}|_1 = \sum_j \left| \sum_k a_{kj} v_k \right| = \sum_j \left| \sum_k (a_{kj} - \varepsilon_0 N^{-1}) v_k \right|$$

$$\leq \sum_j \sum_k (a_{k,j} - \varepsilon_0 N^{-1}) |v_k| = (1 - \varepsilon_0) |\vec{v}|_1.$$

ii) の証明.

$\vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ とすれば $\langle A\vec{u}, \vec{\mu} \rangle = 0$ となる.

$$\begin{aligned} |A\vec{u}|_{\infty} &= \max_j |\langle A\vec{u}, \vec{e}^j \rangle| \\ &= \max_j |\langle A\vec{u}, \vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu} \rangle| \\ &= |\vec{u}|_{\infty} \max_j |{}^t A(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1. \end{aligned}$$

$$\text{よって } |{}^t A(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = |{}^t A\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu}|_1$$

$$= \sum_k |a_{j,k} - p^{-1}\mu_k|$$

補題1と(仮定1)より $a_{j,k} \geq \varepsilon_0 N^{-1} \geq p^{-1}\mu_k \quad \forall j, k$

$$\text{従って } |{}^t A(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = \sum_k a_{j,k} - p^{-1}|\vec{\mu}|_1 = 1 - p^{-1}.$$

iii) の証明.

$\forall \vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ に対して $|(I-A)\vec{u}|_{\infty} \geq p^{-1}|\vec{u}|_{\infty}$ となる.

そこで $\forall \vec{w} \in W_{\vec{1}}$ に対して $T\vec{w} \in W_{\vec{\mu}}$ であるから

$$|(I-A)\vec{w}|_{\infty} = |(I-A)T\vec{w}|_{\infty} \geq p^{-1}|T\vec{w}|_{\infty}.$$

補題2より $|\vec{w}|_{\infty} \leq 2|T\vec{w}|_{\infty}$ が出るから.

$$|(I-A)\vec{w}|_{\infty} \geq (2p)^{-1}|\vec{w}|_{\infty} \quad \forall \vec{w} \in W_{\vec{1}} \quad \text{となる.}$$

§2. 応用.

本研究会の磯村介氏の講演において, 境界要素解の誤差,

$\tilde{e}_h$ は, $K_h \tilde{e}_h = \tilde{f}_h$ をみたすものとして与えられる.

境界要素空間の取り方を適当なものにすると, $\langle \tilde{e}_h, \vec{1} \rangle = 0$ と

なる.

K_n は $Ku(x) = \frac{1}{2}u(x) + p \cdot V \int_T \frac{\partial g}{\partial n}(x, z) u(z) d\sigma_z$
なる積分作用素の離散化であることから,

$$K_n = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}A_n$$

とあいま見ると, A_n が (仮定1), (仮定2) を満たすことになる
から定理 iii) より

$$\|\tilde{e}_n\|_\infty \leq 4p \|\tilde{f}_n\|_\infty$$

が得られ, この評価が, 石坂氏の近似解の誤差の評価を高める
ことにつながる.

又, 定理 i), ii) は確率行列 A の固有値の分布に対して, 若干の情報を与える.