

ホモロジー球面と自己双対接続

東大理 古田幹雄 (Mikio Furuta)

このノートは、第一に3次元多様体間の同値関係を扱う手段として、自己双対接続のモジュライ空間を用いる方法の紹介と、第二にこの方法の応用として有向ホモロジー球面のなす有向ホモロジー同値群 Θ_3^+ が $\mathbb{Z}$ の (可算) 無限直和の部分群として構つことの紹介を目標とします。前者においては、概念の記述に重きをかけたことや、解析的手法については [T], [FS] を参照して下さい。後者は [F] の紹介ですが、81年度 Global Analysis 研究集会 (名古屋大学) の予稿と一部重複することをおろかいやお断りします。

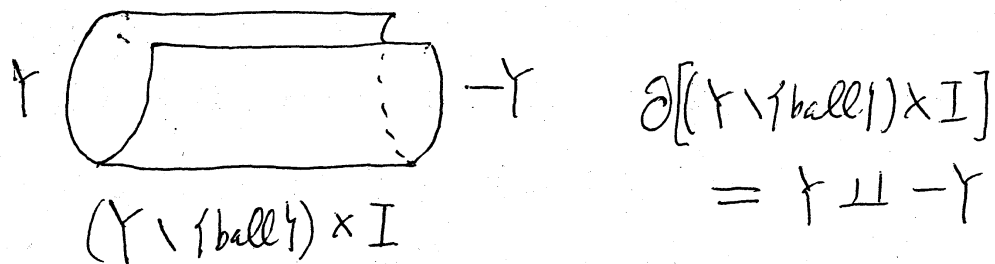
§1 ホモロジー同値群

このノートでは、断るまい限り可微分カテゴリーで考える。二つの連結有向3次元多様体 Y_1, Y_2 が (有向) ホモロジー同値であるとは、あるコンパクト有向4次元多様体 W であって

次の①, ②を証明するものが存在することである。

$$\textcircled{1} \partial W \cong \gamma_1 \amalg -\gamma_2, \quad \textcircled{2} H_*(\gamma_i; \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{inclusion}_*]{\cong} H_*(W; \mathbb{Z}) \quad (i=1, 2)$$

ホモロジー同値関係 $\gamma_1 \sim \gamma_2$ は同値関係であり、連結和を保つ。即ち、 $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma'_1 \sim \gamma'_2 \Rightarrow \gamma_1 \# \gamma'_1 \sim \gamma_2 \# \gamma'_2$ 。またホモロジー同値類全体の集合は、連結和によって半群となる。単位元は、 S^3 を含む類 $[S^3]$ であり、 $[\gamma]$ が逆元を持つのは、 γ がホモロジー3球面の時である。その時 $[\gamma]$ の逆元は、向きを逆にした $[-\gamma]$ によって与えられる。下図参照。



有向ホモロジー3球面のホモロジー同値類全体のなす集合 $\mathcal{H}_3^+$ は、加群となる。この時、 $[\Sigma_1], [\Sigma_2], \dots, [\Sigma_n] \in \mathcal{H}_3^+$ に対し、

$$[\Sigma_1] + \dots + [\Sigma_n] = 0 \iff \exists W^4 \text{ s.t.}$$

$$\textcircled{1} \partial W = \Sigma_1 \amalg \dots \amalg \Sigma_n$$

② W は、 n -punctured 4-sphere と同じホモロジーを持つ、

この1-トでは Θ_3^G は、単に命題の述べ方を簡易化する役割しか果たしていない。しかし、一般に群 G が固定された時、有向多様体 Y_1, Y_2 に対して、同値関係 $Y_1 \sim Y_2 \in$

$\exists W^4$ s.t. ① W は $Y_1 \sim Y_2$ を与える,

$$\textcircled{2} \text{Hom}(\pi_1(W), G) \xrightarrow[\text{inclusion}^*]{\cong} \text{Hom}(\pi_1(Y_i), G) \quad i=1, 2$$

によ、2定めると、これは $G = S^1$ (or $U(1), \mathbb{Z}$) の時、ホモロジー同値関係と一致し、 G が大きくなるにつれて、ホモトピー同値関係をよりよく近似すると考えられる。この1-ト人の議論は、 $G = SO(3)$ (あるいは $SU(2)$) に対して関係 $\sim$ で同値でない二要素が、さらに $G = S^1$ に対して $\sim$ で同値でない主張できるための付帯条件を考察するものといふことが出来る。

Θ_3^G については、次のことが知られている。

(1) (Rochlin) $\exists \mu: \Theta_3^G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ surj. hom.

$$\text{ここで} \quad \mu([\Sigma]) = \frac{1}{8} \text{sign } W \pmod{2}$$

$$\partial W = \Sigma, \quad W: \text{spin.}$$

(2) (Fintushel - Stern) Θ_3^G は位数無限大の元を持つ。例えば、 $\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を Seifert fibered homology 3-sphere とすると、次の $R(a_1, \dots, a_n)$ は奇数となるか、これが正の時 $[\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)]$ は位数無限大。

$$R(a_1, \dots, a_n) = \frac{2}{\alpha} - 3 + n + \sum_{i=1}^n \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{a_i-1} \cot \frac{\pi k}{a_i^2} \cot \frac{\pi k}{a_i} \sin^2 \frac{\pi k}{a_i}$$

$$(\alpha = a_1 \cdots a_n)$$

ここで、 $a_1, \dots, a_n$ は 2 つずつ互いに素な 2 以上の自然数 ($n \geq 3$)。 $\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は S^2 上の Seifert fiber space であって、exceptional fiber の degree が $a_1, \dots, a_n$ であるもの (ホモロジー 3 球面になるという条件により、微分同相類はこの条件のみから一意に定まる。)

例 $R(2, 3, 6k-1) = 1 \quad k=1, 2, \dots$

$[\Sigma(a_1, \dots, a_n)]$ が Θ_3^H の中で位数無限大であるための十分条件は、Fintushel-Lawson, Lawson 等によって拡張されている。

§4 では、次の結果を紹介する。

(3) [F] $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ を任意の有限個のホモロジー 3 球面とすると、これらに依存するある自然数 N が存在し、もし $\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が

$$R(a_1, \dots, a_n) > 0, \quad a_1 \cdot a_2 \cdots a_n > N$$

を満たすならば、次が成立する。

If $k[\Sigma(a_1, \dots, a_n)] \in \mathbb{Z}[\Sigma_1] + \dots + \mathbb{Z}[\Sigma_m]$, $k \in \mathbb{Z}$,
then $k=0$.

さらに、特に $\Sigma_j = \Sigma(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n_j})$ $j=1, 2, \dots, m$
 であるならば、 $N = \max_i \prod_j a_{j,i}$ ととれる。

系 $[\Sigma(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j})]_{j=1,2,3,\dots}$ は、次の条件の
 下で、 $\mathbb{Z}$ 上 一次独立

$$\textcircled{1} R(a_{j,1}, \dots, a_{j,n_j}) > 0 \quad \textcircled{2} \prod_{i=1}^{n_1} a_{1,i} < \prod_{i=1}^{n_2} a_{2,i} < \prod_{i=1}^{n_3} a_{3,i} < \dots$$

($j=1, 2, 3, \dots$)

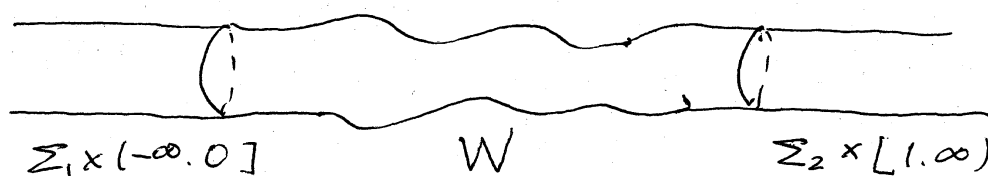
例 $[\Sigma(2, 3, 6k-1)]$ $k=1, 2, \dots$ は $\mathbb{G}_3^{\mathbb{Z}}$ 内で $\mathbb{Z}$ 上 一次独立。

§2 自己双対接続

3次元多様体においては基本群が重要な不変量であるが、
 Lie群 G を固定するとき $\text{Hom}(\pi_1, G)$ は、自明な G 主束の平
 坦接続とみなすことができる。非 Abelian な G で最も簡単なも
 のは $SO(3)$ あるいは $SU(2)$ である。そこで、3次元多様体
 Y に対し、 $\text{Hom}(\pi_1(Y), SU(2) \text{ (or } SO(3)))$ を調べることにし、
 Y のどのような性質がわかるか、という問題を考える。

Casson 不変量は、 $\text{Hom}(\pi_1(Y), SU(2))$ を利用して、ホーロ
 ミー3球面に対し整数を対応させる写像であり、 $\mathbb{G}_3^{\mathbb{Z}}$ に落
 下する。Rochlin 不変量 $\mu(Y)$ と一致することが知られて
 いる。この事実から示唆される問題として、「 $[\Sigma_1] = [\Sigma_2]$ in
 $\mathbb{G}_3^{\mathbb{Z}}$ の時、 $\text{Hom}(\Sigma_1, \underset{SU(2)}{SO(3)}), \text{Hom}(\Sigma_2, \underset{SU(2)}{SO(3)})$ の関係を調べ

よ」というものを考える。同接関係は Σ_1 と Σ_2 とが 4 次元多様体 W であってある性質を満たすものによって幾何学的に結ばれていることを意味する。 $\text{Hom}(\Sigma_1, \text{SO}(3))$ の元と、 $\text{Hom}(\Sigma_2, \text{SO}(3))$ の元とを比較するために、これらを平行接続と考え、 W の上で接続として連続的につなぐ。



$W' := \Sigma_1 \times (-\infty, 0] \cup W \cup \Sigma_2 \times [1, \infty)$ の上の自明な $\text{SO}(3)$ 主束 P に対し、 P 上の接続 A であって、 2つの端の上で漸近的に平行接続に収束するもの達を考える。 A の曲率を $F(A)$ と書く。

$$F(A) \in \Omega^2(\mathfrak{g}) \quad \mathfrak{g} = P \times_{\text{adjoint}} \text{SO}(3)$$

W' 上の Riemannian metric g 、端の上で積の形になるよう固定する Hodge の star operator $*$: $\Omega^2(\mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(\mathfrak{g})$ は $*^2 = 1$

を満たし、これによって $F(A) = F_+(A) + F_-(A)$,

$*F_{\pm}(A) = \pm F_{\pm}(A)$ と分解すると、適当な正規化の下で、

$$\begin{cases} \|F(A)\|_{L^2}^2 = \|F_+(A)\|_{L^2}^2 + \|F_-(A)\|_{L^2}^2 \\ 8\pi^2 \int_{W'} p_1(P, A) = \|F_+(A)\|_{L^2}^2 - \|F_-(A)\|_{L^2}^2 \end{cases}$$

ここで、 $p_1(P, A) = -\text{tr } F(A) \wedge F(A)$ の W' 上の積分は、 A を、 2つの端の漸近的挙動を保った 3 次元モトピーで動かす

でも不変である。

今、2つの平坦接続を結ぶ A に対して、最も無駄のない結び方を要請するとする。「無駄のない」とは、曲率の L^2 ノルムがトポロジカルに必要な大きさと一致していることと解釈するならば、これは、 $F_+(A) \equiv 0$ または $F_-(A) \equiv 0$ という条件として具体化されよう。従って、先から漠然と述べてきた間隔は次の形に与えられる。

問 $B_1: \Sigma_1 \times SO(3)$ 上の平坦接続 $B_2: \Sigma_2 \times SO(3)$ 上の平坦接続、に対して、次のような (P, A) は存在するか。

$P \rightarrow W': SO(3)$ 主束,

$A: P$ 上の自己双対接続 即ち, $F_-(A) \equiv 0$.

s.t. $\int \|F(A)\|_{L^2}^2 < +\infty$

$A \mid \Sigma_1 \times \{\tau\}$ ($\tau < 0$) は $\tau \rightarrow -\infty$ の時 B_1 に収束
 $A \mid \Sigma_2 \times \{\tau\}$ ($\tau > 0$) は $\tau \rightarrow +\infty$ の時 B_2 に収束

また、存在する時 $\int_{W'} p_i(P, A) = \frac{1}{8\pi^2} \|F(A)\|_{L^2}^2$
 の値はいくつか。

上の値によって、 B_1 と B_2 とのある意味での距離を測ることがアイトー P である。

注 A が自己双対接続でなくとも、それ以外の上の条件を満足するならば、 $\int_{W'} p_i(P, A) \bmod 4\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/4\mathbb{Z}$
 は、 B_1, B_2 のみに依存し、 P, A のとり方によらない (ただし

1. $w_2(P) = 0$ と仮定しておく。この仮定がない時には、
mod $\mathbb{Z}$ で一意)

注2 接続は、ある Hilbert 多様体に完備化された空間の元
を取ってくる。ここでは詳細には渡さない。[T] 参照。

Flintuskel-Stern は、レンズ空間の間のホモロジー同値
関係に対して、次を示した。

(Flintuskel-Stern)

$$L(p, q) \sim L(p', q') \implies L(p, q) \cong_{\text{diffeo}} L(p', q')$$

以下二の節の残りでは、上の命題の、 $q = 1$ の場合につい
て、先の問を通じた証明を紹介する。

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = L(p, q)$ の時、任意の平坦接続 B_1, B_2 につ
いて、先の問のよきな (P, A) を考える。 $L(p, q)$ には標準的計量を用いる。

Fact

(1) $\int_{W^*} p_1(P, A)$ は $\frac{4}{p}$ の倍数。

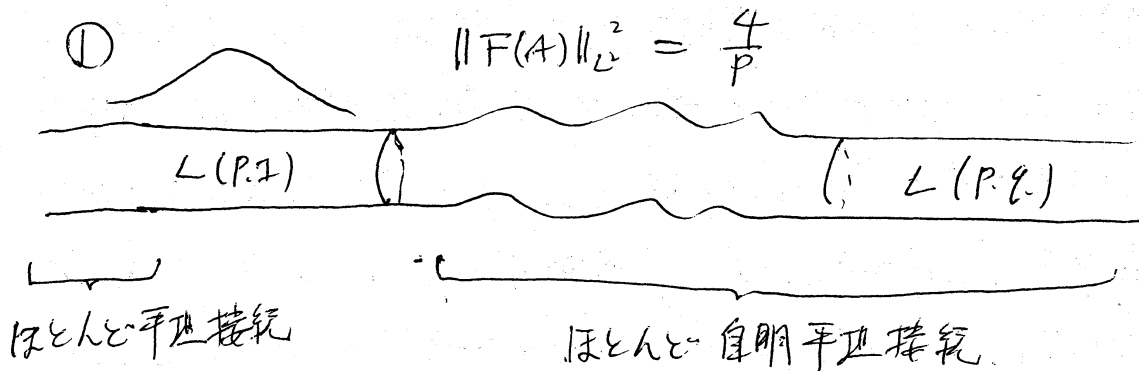
(2) B_2 が自明な平坦接続 (積接続) である時、

$$\int_{W^*} p_1(P, A) = \frac{4}{p} \quad \text{となる } (P, A) \text{ が存在する}$$

ための必要十分条件は、 $q \equiv 1 \pmod{p}$ となること。

これは、 $L(p, q) \times \mathbb{R}$ を Orbifold $S^4/\mathbb{Z}_p$ としてコ
ンパクト化し、 S^4 上の $p = 4$ なる $SO(3)$ 束束の自己双対
接続の分類を用いることにより、示される。

さて、 $L(p, 1) \sim L(p, g)$ を仮定して $g \equiv 1 \pmod{p}$ と
等しく筋道を説明する。



上のような自己双対接続を構成する。(Fact (2) の存在と
cut off function による変形から、まず自己双対性の方程式
 $F(A) = 0$ を近似的に満たす接続を構成し、それを Taubes
の振動によって自己双対接続にまで振動する。)

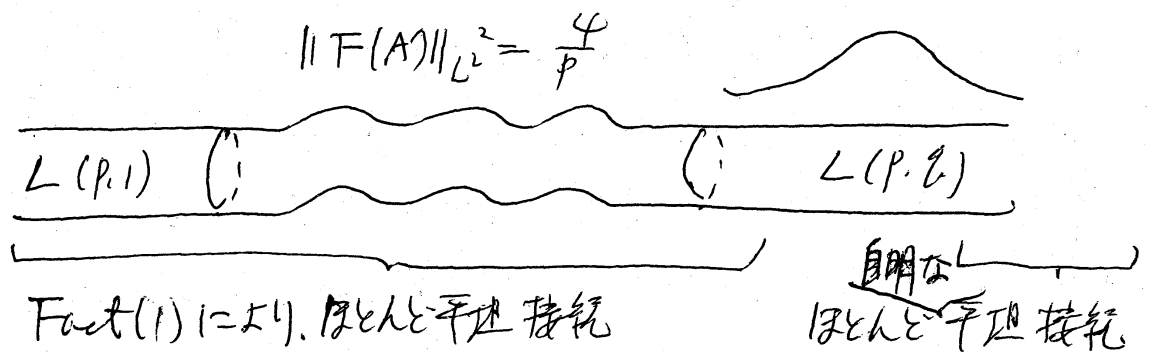
② 上の A と同じ漸近挙動を満たす自己双対接続のモジュ
ライ空間が (必要ならば自己双対性の方程式 $F(A) = 0$ を振
動し、新しい方程式のモジュライ空間を考えることにより)
1次元の多様体の構造を持つことを示す。(まず、Fact (2)
で存在が主張されたモジュライ空間は 1次元である。楕円複
体の指数の満たす切除公式を用いて、 W' 上におけるモジュ
ライ空間の次元がそれとかわらないことが、 $b_1(W') = b_2(W') = 0$
から帰結される。)

③ 直観的な言い回しをすれば、1次元のモジュライ空間
をたどることは、 W' 上でリリトンの非線型波動か。

$T = -\infty$ からや、 T をきて、再びいすれぬの端へ去、 T をゆく過程と見える。 $T = \pm\infty$ のいすれに去るかを考へる。

④ $T = -\infty$ へ再び反射することはない。というのは、曲率が $T \rightarrow -\infty$ の方向に傾いていり自己双対接続は、曲率の分布より集中している T の値によ、 T 一意に定まることか (方程式 $F(A) = 0$ を適当に振動することにより) いえるからである。(W' を2つの端を各々一点コンパクト化した orbifold が単連結でない場合には、振動の取り方は技術的にめんどうである。)

⑤ 従って、非線型波動は $T = +\infty$ に去、 T をゆく。

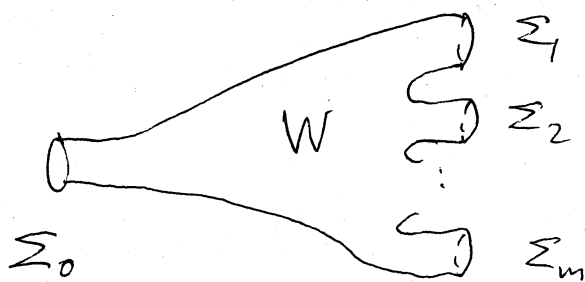


$T \rightarrow +\infty$ に去る極限を考へると、Uhlenbeckの定理を適用することにより、 $L(p, 2) \times \mathbb{R}$ の上に、Fact(2)の条件を満たす自己双対接続が存在せねばならないことがわかる。これは、Fact(2)によ、 $p \equiv 1 \pmod{p}$ を意味する。□

§3 同境

前節の後半で見たように、ホモロジー3球面 Σ に対して、 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 上の自己双対接続のモジュライ空間の性質（特に存在と非存在，存在する時にはその次元等）を調べることは、 Σ を含む同環境係の非存在）へ応用できるが、その道筋は次のようなものであった。

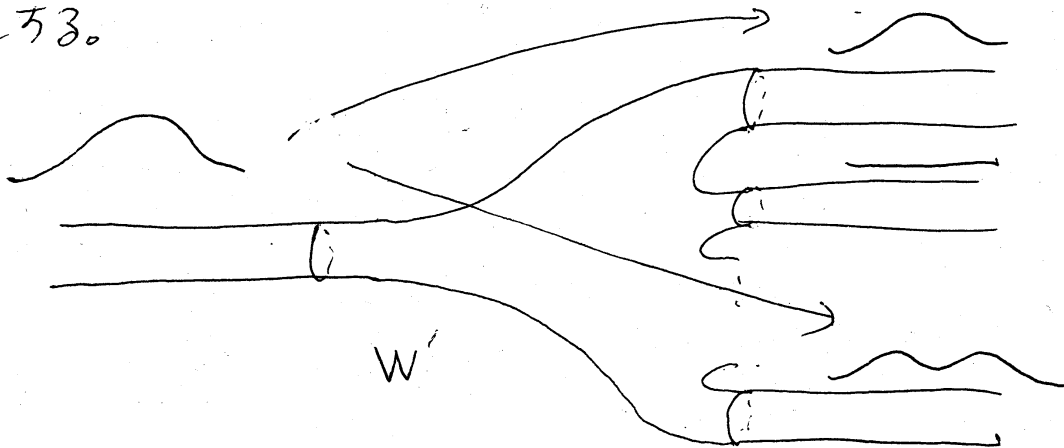
$\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ に対して $[\Sigma_0] = [\Sigma_1] + \dots + [\Sigma_m]$ を満たすとする。punctured 4-sphere と同じホモロ



ジーを構つ左図のような W をとる。この時、 $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ に対してある必要条件を満足しなければならないこと

がわかれる場合がある。即ち、

① 下図のような W' の上で自己双対接続の非線型波動を考えるとき、左側から入射するような非線型波動の存在を仮定する。



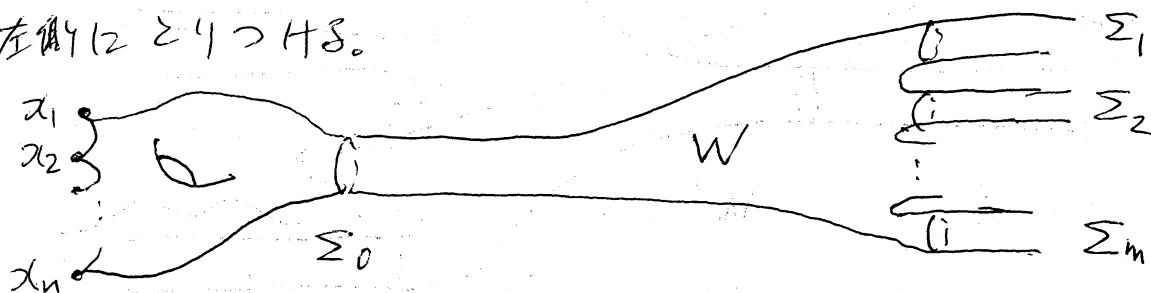
② 中央部の W で波動が“散乱”されるとする。即ち、 W には“定常波”を捉える能力が無いとする。(W の second Betti number が消えたり、可約自己双対接続が存在しえない状況を念頭に置いている。)

③ 波動は左側に反射されることは無いとする。(これは、 Σ_0 のみによって決まる性質と想定される。)

④ 以上の ①~③ の下で、 $\Sigma_i \times \mathbb{R}$ ($\forall i=1, 2, \dots, m$) の上に、自明でない自己双対接続であり、曲率の L^2 ノルムが限定された条件を満たすようなものが存在しなくてはならない。

Fintushel-Stern は、閉じた orbifold 上で ① に相当する自己双対接続の存在の主張を、いわば、非線型波動の発生器を取りつけることにより行っている。これを説明する。

Σ_0 が $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ s.t. $R(a_1, \dots, a_n) > 0$ であるとする。Serfert fiber space の射影 $\pi: \Sigma_0 \rightarrow S^2$ の mapping cone は、 Σ_0 を境界とし、 n 個の特異点を持ち、第 2 Betti 数が 1 の orbifold である。これを W' の左側にとりつける。



この時、取りつけた mapping cone の上でみねいた $SO(3)$ 主束 (orbifold 上の orbifold-bundle の意味で) を構成し、それが可約な自己双射接線を許し、その点を唯一の特異点とし、他は次元 $R(a_1, \dots, a_n)$ の多様体の構造を持つモジュライ空間を伴うようにできる。特異点の近傍は、複素射影空間の上の cone の形状をしている。

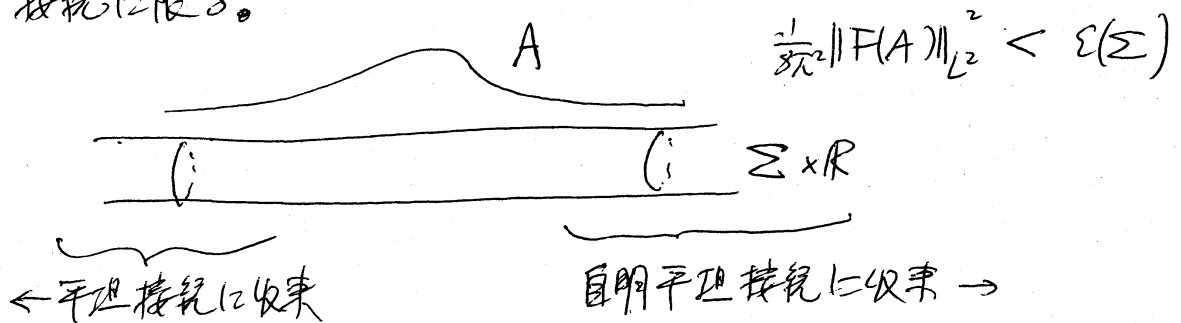
Fintushel-Stern の議論の要点は、このモジュライ空間は、モジュライ空間自体 (及びその上にある $SO(3)$ 主束) の性質を考察することによつて、コンパクトではありえないという所にある。

以上が、①～③ に相当する。(ただし、Fintushel-Stern の議論が閉じた orbifold の上でなされているのに対し、今の場合は open manifold の上で議論するため、Taubes の解析的手法 [T] が必要とされる。)

よつて、もし、④ が成立しないような状況であれば、この矛盾は、与えられた $\Sigma_0 = \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ の間に W のような同院関係が存在しないことを意味することになる。このような議論のために、次の命題が用いられる。

命題 ホモロジー 3 球面 Σ に対し、ある $\varepsilon(\Sigma) > 0$ が存在し、次のような $\Sigma \times \mathbb{R}$ 上の自己双射接線は、自明平坦

接続に限る:

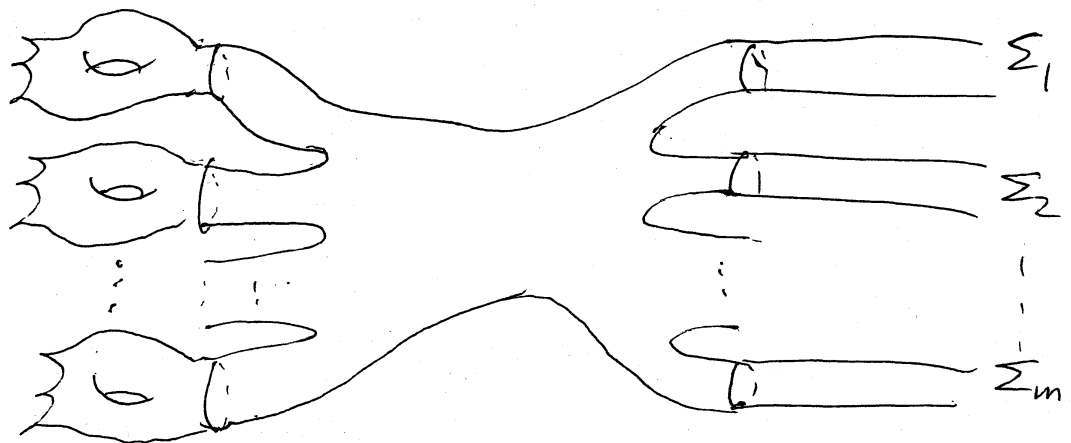


しかた、 $\Sigma = \pm \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の時、 $\varepsilon(\Sigma) = (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$ ととるゝとができる。

上の命題を認めると、§1 (3) は、次のような筋道で証明される。今、 $R(a_1, \dots, a_n) > 0$, $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} < \varepsilon(\Sigma_i)$ に $i = 1, 2, \dots, m$ と仮定し、仮に

$$k[\Sigma(a_1, \dots, a_n)] = [\Sigma_1] + \dots + [\Sigma_m] \quad k \in \mathbb{N}$$

であらうとする。 $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ の側は mapping cone をはりつける。



左の m 個の mapping cone の上でねじった $SO(3)$ 主束を構成し、①②③ から、右側へ自己双対接続が放射されるようにできる。この $SO(3)$ 主束は、右側では自明な積束であり、そ

の上の自己双対接続としては、右側の端の極限が自明な平坦接続に収束するものを考えている。そして $\frac{1}{\epsilon^2} \|F(A)\|_{L^2}^2$ は、 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ と一致する。

よって ④ から存在が主張される自明でない自己双対接続は、 $(a_1, \dots, a_n)^T < \epsilon(\Sigma_0)$ という仮定から) 丁度、先の命題の仮定をみたしている。ところが、この命題によると、そのような自己双対接続は自明な接続しか存在しない。これは矛盾である。これは、はいめの仮定がよりえないことを意味し、証明は終わる。

次節で、命題の証明の筋道を述べる。

§4 命題の証明

次の補題が使われる。

補題 ホモロジー 3 球面 Σ 上の積束において、自明な平坦接続は、平坦接続全体のモジュライ空間の中で孤立点。

実際、自明平坦接続の近傍は、 $\mathfrak{su}(2)/SO(3)$ で与えられる。ここで $\mathfrak{su}$ は、 $H^1(\Sigma, \mathfrak{su}(2))$ の 0 の近傍から $H^2(\Sigma, \mathfrak{su}(2))$ への射影写像。仮定より $H^1(\Sigma, \mathfrak{su}(2)) = 0$ なので、これは一点から成る。

この時、命題は次のように示される。 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 上の自己双対接続 A であって、 $\|F(A)\|_{L^2}^2$ が十分小さく、かつ $A|_{\Sigma \times \{t\}}$ が

$T \rightarrow +\infty$ の時 自明な平坦接続に収束するものとする。

この時、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\Sigma \times [n, n+2]$ の上で A は $(\|F(A)\|_{L^2}^2)$ が小さいので) ある平坦接続 $\pi_n^* B_n$ (B_n は Σ 上のある平坦接続、 π_n は $\Sigma \times [n, n+2]$ から Σ への射影) によって近似される。仮定から、 $n \rightarrow +\infty$ の時、 B_n は自明な平坦接続である。今、 B_n が自明な平坦接続ならば、 B_n と B_{n-1} とは十分近いので、補題により、 B_{n-1} も自明な平坦接続でなくてはならない。よって n が十分大きな所から小さくなると、 n が十分小さい所で、 $n \rightarrow -\infty$ の時、 A は自明な平坦接続に収束することになる。この時、§2 注2により、

$\frac{1}{8\pi^2} \|F(A)\|_{L^2}^2$ は、 $\text{mod } 4\mathbb{Z}$ で zero に等しくなければならぬ。この値は十分小さいものであり、仮に 4 より小さいとしてよく、その時本当に zero である。これは、 A 自体が自明な平坦接続であることを意味する。

次に、 $\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の時に、境界の値 $\varepsilon(\Sigma)$ の評価であるが、これは §2 注2の、 $\text{mod } 4$ もしくは $\text{mod } 1$ で与える不変量、即ち Chern-Simons 不変量を用いてなされる。

有理ホモロジー 3 球面 Σ に対し、 $\Sigma \times SO(3)$ 上の接続 B の Chern-Simons 不変量 $T_P(B) \in \mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ は、

$$T_p(B) := -\frac{1}{8\pi^2} \int_Z \text{tr } F(A) \wedge F(A) \pmod{4\mathbb{Z}}$$

によって与えられる。ここで Z は Σ を境界とする有向コンパクト 4 多様体, A は $Z \times SO(3)$ の接続であって, 境界のカー-制限すると B の引き戻しと一致するもの。この時右辺は A のとり方によらず $\pmod{4\mathbb{Z}}$ で well-defined.

$\pi: (0, 4] \rightarrow \mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ と同一視し, $0 \leq \varepsilon_1(\Sigma) \leq 4$ と.

$$\varepsilon_1(\Sigma) := \inf \left\{ \pi^{-1}(T_p(B)) : B \text{ は } \Sigma \times SO(3) \text{ 上の平坦接続} \right\}$$

とかく, すると一般に.

命題 もし $\varepsilon_1(\Sigma) > 0$ であれば, $\varepsilon(\Sigma)$ の値として, $\varepsilon_1(\Sigma)$ を採用できる。

証明 先の議論の精密化によってなされる。

あとは, $\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して, その上の平坦接続の Chern-Simons 不変量を計算すればよい。これは, Σ の Serfent fiber space と (2) の射影の mapping cone を再び使うことにより計算される。mapping cone から n 個の特異点の近傍を取り去ると, Σ と n 個のレンズ空間との間の同境 Z を得る。 Σ と Z の基本群は既知なので, これから

補題 $\Sigma \times SO(3)$ 上の平坦接続は必ず $Z \times SO(3)$ 上の平坦接続に拡張される。

とわかれ。従ってレンズ空間上の平坦接続の Chern-Simons 不変量の計算に (少なくとも $\text{mod } \mathbb{Z}$ では) 帰着され、結局 次を得る。

補題 $e_1(\pm \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)) \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$

この補題と先の命題により、§3 の命題の証明は完結する。

参考文献

- [D] Donaldson, An application of gauge theory to 4 dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983)
- [F] Furuta, Homology cobordism group of homology 3-spheres, preprint.
- [FL] Fintushel-Lawson, Compactness of moduli space for orbifold instanton, Topology Appl. 23 (1986)
- [FS] Fintushel-Stern, Braid-free orbifolds, Ann. Math. 122 (1985)
- [L] Lawson, preprint.
- [T] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic manifolds. J. Diff. Geom. 25 (1987)