

Function algebra と flow

早大 教育 和田淳蔵

Function algebra と、数学の他の分野との関連についてはいろいろ研究されているが、ここではエルゴード理論との関係、とくに flow との関連について述べる。これについての研究は Forelli [4] によって始められ、それについて Muhly [7, 8, 9] が一連の論文を發表している。これらの結果をもとにしてこの話題を考えていく。

§ 1. Flow.

S を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、 $\mathbb{R}$ を実数空間とする。

$(\mathbb{R}, S)$ が flow であるとは、 $T: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ は連続写像であって

$$T(0, x) = x \quad (x \in S)$$

$$T(s+t, x) = T(t, T(s, x)) \quad (s, t \in \mathbb{R}, x \in S)$$

となる T が存在することである。

Forelli [4] では S を局所コンパクト空間として考えているが、ここでは $X = S'$ をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$C(X)$ の φ に対して

$$\varphi(x+t) = \varphi[T(t, x)]$$

とおくとき、 $\varphi \in C(X)$ が analytic であるとは、 $\forall x$ で $\varphi(x+t) \in H^\infty(\mathbb{R})$ であることをいう。ここで $H^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathbb{C}$ の上半分 $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ で有界な analytic function の $\mathbb{R}$ での boundary function 全体を表わす。

$H^\infty(\mathbb{R})$ はつぎのようにも書くことができる ([2])。

$H^\infty(\mathbb{R}) \ni f$ となる必要かつ十分条件は $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \left(\frac{1}{t-z} \right) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} f(t) dt \quad (z = x + iy)$$

は $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$ で analytic となることである。

$C(X)$ の中の analytic function 全体を $\mathcal{A}$ とおくとき、 $\mathcal{A}$ は $C(X)$ の closed subalgebra となり 1 を含む。

いま $\mathcal{B}$ を $C(X)$ の subalgebra としたとき、 X の上の確率測度 μ が乗法的であるとは、 $\forall f, g \in \mathcal{B}$ で $\int_X fg d\mu = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right)$ となることをいう。また μ が不変 (invariant) であるとは、 $\forall t \in \mathbb{R}$ と $\forall$ Baire set $E \subset X$ に対して $\mu[T(t, E)] = \mu(E)$ となることであり、 μ がエルゴード的 (ergodic) であるとは Baire set $E \subset X$ が T で

μ -不変であれば $\mu(E) = 0$ または $\mu(E) = \mu(X)$ となることをいう。 E が μ -不変とは $\forall t \in \mathbb{R}$ で $\mu[E \Delta T(t, E)] = 0$ のことである。 $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$ が強い意味でエルゴード的 (strictly ergodic) であるとは、 T のもとに不変である X の上の確率測度が唯一つ存在することである。 また $\text{flow}(\mathbb{R}, X)$ が極小 (minimal) であるとは、 $\forall x \in X$ で x の orbit $\{T(t, x); t \in \mathbb{R}\}$ が X の中で稠密のときである。

§ 2. Subalgebra $\mathcal{O}$

$(\mathbb{R}, X)$ を flow としたとき $\mathcal{O}$ を § 1 で定義された $C(X)$ の subalgebra とする。 $(\mathbb{R}, X)$ と $\mathcal{O}$ との関係をつきに述べる。

定理 2.1 $\mathcal{O}$ の確率測度 μ が不変でエルゴード的とする。そのとき $\mathcal{O}$ は $L^\infty(\mu)$ における weak- * Dirichlet algebra である。

定理 2.2 $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$ が強い意味でエルゴード的であれば $\mathcal{O}$ は Dirichlet algebra である。

例. Γ を (0) でない $\mathbb{R}$ の部分群とし、 Γ に discrete topology を与え、 G を Γ の指標群 (character group) とする。勿論 G はコンパクト群である。 $\chi_a(x) = x(a)$ ($a \in \Gamma, x \in G$) とおくとき χ_a ($a \in \Gamma, a \geq 0$) で生成された G の上の function algebra を A とする。 A は Dirichlet algebra であり、 A の

の関数は *generalized analytic function* といわれる。

$\mathbb{R} \ni \forall s \ni e_s(a) = e^{ias} (a \in \Gamma)$ とおけば $e_s \in G$ となることから $s \rightarrow e_s$ となる写像によって $\mathbb{R}$ は G の中で稠密な部分群に写される。こゝで $\text{Flow}(\mathbb{R}, G)$ をつぎのように定義する。

$$T: (t, x) \rightarrow e_t + x$$

こゝで $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$ から $\mathcal{O}$ を作ると $\mathcal{O} = A$ となる。これは $f = \sum c_j \chi_{a_j}$ とすれば $f(e_t) = \sum c_j e^{ia_j t}$ が $\forall a_j \geq 0$ であれば $\mathbb{C}$ の上半分の有界な *analytic function* に拡張できることからわかる。この場合 T によって不変となる G の上の唯一つの確率測度は Haar 測度であることから、 $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$ は強い意味でエルゴード的である。

定理 2.3 $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$ が極小であれば $\mathcal{O}$ は $C(X)$ の maximal closed subalgebra となる。

系 2.4 (Wermer maximality theorem) Disc algebra は maximal algebra である。

前の例において Γ を $\mathbb{R}$ の整数全体の部分群とする。そのとき $\mathcal{O}$ は disc algebra となる。このとき $T(t, x) = t + x$ の orbit は G となるから $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$ は minimal となることがわかる。

定理 2.5 $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$ が minimal なら $\mathcal{O}$ は pervasive

algebra となる。ここで $\mathcal{O}$ が pervasive であるとは、 X の任意の閉集合 ($F \neq X$) に対して $\mathcal{O}|_F$ は $C(F)$ で稠密であることという。

注 Forelli [4] においては、定理 2.3 定理 2.5 は別々に証明されているが、 (R, X) が minimal なら $\mathcal{O}$ は essential であることが容易にわかるから、定理 2.3 より定理 2.5 が導かれる。

§3 $H^p(m)$ と flow

Helson and Lowdenslager [6] は generalized analytic function の algebra に付随する Hardy space $H^p(m)$ の性質を考えた。それを flow を用いて §1 で定義された algebra $\mathcal{O}$ の場合に拡張すると、つぎのようになる。

$\mathcal{O}$ の上の乗法的な確率測度を m とする。そのとき

定理 3.1 $H^2(m)$ が定数関数以外の関数を含むとする。そのとき、 m がエルゴード的であるための必要かつ十分条件は、 $H^2(m) \ni f$ が $m(E) > 0$ となる E の上で 0 なら $f = 0$ (a.e. m) となることである。

定理 3.2 測度 m は dirac 測度でないとし、 $\mathcal{O}$ は $L^\infty(m)$ の weak-* Dirichlet algebra とする。そのときつぎの条件は同等である。

(1) m はエルゴード的である。

(2) $1 \leq p \leq \infty$ に対して $H^p(m) \ni f$ が $m(E) > 0$ となる E の上で 0 なる $f = 0$ (a.e. m)。

(3) $H^\infty(m)$ は $L^\infty(m)$ の maximal weak*-closed subalgebra である。

定理 3.3 $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$ が狭い意味でエルゴード的であるならば m が dirac 測度でなければ m はエルゴード的である。

§ 4. Ω の maximal ideal space.

$X \times [0, 1]$ において $X \times \{0\}$ を 1 点 $\hat{0}$ とした quotient space を Ω で表わす。

定理 4.1 X の上の乗法測度 m は dirac 測度でないとする。そのとき Ω から Ω の maximal ideal space M_Ω の上への同相写像 Γ が存在する。さらに $0 < r < 1$ となる r について $\{\Gamma(x, r); x \in X\}$ はある non-trivial な Gleason part に含まれ、 $C_0 = \Gamma(\hat{0})$ を含む Gleason part が non-trivial である必要かつ十分条件は m はある orbit に凝集することである。

参考文献

- [1] R. Arens and I. Singer : Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956) 379-393.
- [2] P. L. Duren : Theory of H^p Spaces, Academic Press 1970.
- [3] F. Forelli : Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967) 33-59.
- [4] ——— : A maximal algebra, Math. Scand. 30 (1972) 152-158.
- [5] T. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall 1969.
- [6] H. Helson and D. Lowdenslager : Prediction theory and Fourier series in several variables II Acta Math., 106 (1961), 175-213.
- [7] P. S. Muhly : Function algebras and flows : Acta Scien. Math. 35 (1973) 111-121.
- [8] ——— : Function algebras and flows II : Arkiv Math. 11 (1973) 203-213.
- [9] ——— : Function algebras and flows III : Math. Z. 136 (1974) 253-260.