

Locally C^* -algebra について

元大 理 井 上 淳

§0 序

R. Arens と E. Michael は topological algebra の 1 種である locally m -convex algebra を紹介し研究した。ここで、これをもとにして、 C^* -condition をもった complete locally m -convex $*$ -algebra (我々は locally C^* -algebra とよぶ) を紹介し、研究することによって、 C^* -algebra を一般化する。

§1 において準備をし、§2 において commutative locally C^* -algebra の functional representation をし、§3 において、 C^* -algebra が Hilbert space 上の operator algebra の uniformly closed $*$ -subalgebra と isomorphic であるという事実の拡張を考える。即ち locally

C^* -algebra はある operator algebra の closed $*$ -subalgebra と isomorphic であることを示す。

§1. 準備

定義 1.1. 次の条件をみたす seminorms の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ が存在するとき、 $*$ -algebra A は (complete) locally m -convex $*$ -algebra ($\text{LMC } *$ -alg.) とよばれる。

(1) $\{p_j\}_{j \in J}$ が A 上の Hausdorff (complete)

locally convex topology を定義する。

(2) $p_j(xy) \leq p_j(x)p_j(y)$ for $\forall x, y \in A, \forall j \in J$

(3) $p_j(x^*) = p_j(x)$ for $\forall x \in A, \forall j \in J$

定義 1.2. 特に上の seminorms の族 $\{p_j\}$ が

(4) $p_j(x^*x) = p_j(x)^2$ for $\forall x \in A, \forall j \in J$

をみたすようにとれるとき complete $\text{LMC } *$ -alg.

A を locally C^* -algebra とよぶことにする。

そして $\{p_j\}_{j \in J}$ を C^* -seminorms の族とよぶ。

次に locally C^* -algebra の例をあげよう。

(1) C^* -algebra は locally C^* -algebra.

(2) C^* -algebras の cartesian product は locally C^* -algebra である。

(3) T を *completely regular topological space* とする. そして $\{D_i\}$ を 「 $\bigcup_i D_i = T$, D_i のあらゆる有限個の和はある D_j に含まれる」をみたす T の *compact subsets* の族とする. ここで $A = C(T)$ (T 上の連続関数の全体) に D_i 上での *uniform convergence* の *topology* を入れると $C(T)$ は *locally C^* -algebra* になる.

我々は今, あらゆる *locally C^* -algebra* がある意味で *C^* -algebras* によって生成されることを示す. このときでは A を *C^* -seminorms* の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ をもつ *locally C^* -alg.* とする.

任意の $j \in J$ に対して,

$$U_j = \{x \in A \mid p_j(x) \leq 1\}$$

$$N_j = \{x \in A \mid p_j(x) = 0\}$$

$$A_j = A/N_j$$

$$\pi_j : A \text{ から } A_j \text{ への natural homomorphism}$$

$$x_j = \pi_j(x)$$

とおくと, A_j は *norm* $\|x_j\| = p_j(x)$ をもった *normed $*$ -algebra* になり $\|x_j^* x_j\| = \|x_j\|^2$ をみたすことは明らかである. よって A_j のこの *norm* による完備化 $\overline{A_j}$ は *C^* -algebra* になる. 次に *index set* J は次のように順序づけられる.

$$\begin{aligned}
 i < j &\Rightarrow U_j \subset U_i \\
 &\Leftrightarrow p_i(x) \leq p_j(x) \text{ for } \forall x \in A
 \end{aligned}$$

$i < j$ のとき

$$\pi_{ij} : x_j \in A_j \longrightarrow x_i \in A_i$$

は A_j から A_i 上への norm-decreasing homomorphism
 によって π_{ij} は $\bar{A}_j$ から $\bar{A}_i$ の dense $*$ -subalgebra 上への
 norm-decreasing homomorphism $\bar{\pi}_{ij}$ へ拡張で
 きる。いま $\bar{\pi}_{ij}$ に関する $\bar{A}_j$ の projective limit を $\mathcal{L}P(A)$
 とする。すなわち

$$\mathcal{L}P(A) = \{ x \in \prod_j \bar{A}_j ; \bar{\pi}_{ij}(\bar{\pi}_j(x)) = \bar{\pi}_i(x) \text{ whenever } j > i \}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } \prod_j \bar{A}_j : \{ \bar{A}_j \} \text{ の cartesian product} \\ \bar{\pi}_j : \prod_j \bar{A}_j \text{ から } \bar{A}_j \text{ への projection} \end{array} \right)$$

を考えよう。

定理 1.1.

- (1) A は $\mathcal{L}P(A)$ と isomorphic である
- (2) 任意の j に対して $x(j) \in \bar{A}_j$. かつ $j > i$ のときいつて
 も $\bar{\pi}_{ij}(x(j)) = x(i)$ ならば, すべての j に対して $x_j = x(j)$ をみたす $x \in A$ が存在する。

(証明) $\mathcal{L}P(A)$ が $\prod_j \bar{A}_j$ の $*$ -subalgebra であり,

$\{ \mathcal{L}P(A) \cap \bar{\pi}_j^{-1}(U_j) \}$ は $\mathcal{L}P(A)$ に対する base である

ことは明らか. いま canonical map.

$$\phi: A \longrightarrow \prod_j \bar{A}_j \quad (\phi(x) = \{x_j\})$$

を考えると ϕ は into isomorphism で $\phi(A) \subset \mathcal{L}\mathcal{P}(A)$ をみたす. よして

$$\pi_j(\phi(A)) = \pi_j(A) = A_j \subset \pi_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A)) \subset \bar{A}_j$$

従って, 全ての j に対して $\pi_j(\phi(A))$ は $\pi_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A))$ で dense. よって $\phi(A)$ は $\mathcal{L}\mathcal{P}(A)$ で dense である.

一方 A は complete. よって $\phi(A)$ も complete.

ゆえに $\phi(A) = \mathcal{L}\mathcal{P}(A)$.

定理 1.2.

(1) x : quasi-regular in A

$$\Leftrightarrow x_j : \text{q. r. in } \bar{A}_j \text{ for } \forall j \in J.$$

(2) A が単位元をもつ $\Leftrightarrow$ あらゆる $\bar{A}_j$ が単位元をもつ

(3) x : invertible in A

$$\Leftrightarrow x_j : \text{invertible in } \bar{A}_j \text{ for } \forall j \in J.$$

系 1.1.

$$(1) \Sigma_A(x) = \bigcup_j \Sigma_{\bar{A}_j}(x_j)$$

$$(2) \delta_A(x) = \sup_j \delta_{\bar{A}_j}(x_j) = \sup_j \sqrt[n]{p_j(x^n)}$$

(但し $\Sigma_A(x)$ は A での x の spectrum ただし x が A で invertible でないなら $\{0\}$ を加えたもの
 $\delta_A(x)$ は x の spectral 半径)

§2. 可換な locally C^* -algebra.

この § をとおして A を C^* -seminorms の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ をもつ可換な locally C^* -algebra, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, $U_j = \{x \in A; p_j(x) \leq 1\}$ とする.

記号 A^* : A の conjugate space

U_j° : U_j の polar

$$S(A) = \{f \in A^*; f(xy) = f(x)f(y) \text{ for } \forall x, y \in A\}$$

$$S(A, j) = S(A) \cap U_j^\circ$$

$$S(\bar{A}_j) = \{f_j \in \bar{A}_j^*; f_j(xy) = f_j(x)f_j(y) \text{ for } \forall x, y \in \bar{A}_j\}$$

これらに weak topology $\sigma(A^*, A)$ による relative topology を導入する.

補題

$$(1) S(A) = \bigcup_j S(A, j)$$

(2) すべての $j \in J$ に対して $S(A, j)$ は $S(\bar{A}_j)$ と homeomorphic

(3) すべての $j \in J$ に対して $S(A, j)$ は compact.

(証明) (1): $\bigcup_j S(A, j) \subset S(A)$ は明らか. 逆に $f \in S(A)$ とする. f は連続であるからある $j \in J$ と constant γ が存在して $|f(x)| \leq \gamma p_j(x)$ をみたす. ここで $f_j(x_j) = f(x)$ とおくと f_j は $f_j(x_j y_j) = f_j(x_j) f_j(y_j)$, $|f_j(x_j)| = |f(x)| \leq \gamma p_j(x) = \gamma \|x_j\|$. 従って f_j は $\bar{A}_j$ 上の連続関数である. それゆえ, f_j は $\bar{A}_j$ 上の連続 ~~拡張~~ 関数へ拡張で

きる。それをまた f_j によってかくことにする。すると $f_j \in S(\bar{A}_j)$ であることは明らか。従って $\|f_j\| \leq 1$ ゆえに

$$\sup_{x \in U_j} |f(x)| = \sup_{x \in U_j} |f_j(x_j)| \leq \|f_j\| \leq 1$$

よって $f \in U_j^0$ 以上から $f \in S(A, j)$

(2) mapping: $f \in S(A, j) \rightarrow f_j \in S(\bar{A}_j)$ (但し f_j は (1) でつくった函数) は $S(A, j)$ から $S(\bar{A}_j)$ 上への bijection であることは明らかにわかる。さらに map. $f \rightarrow f_j$ が open mapping であることは f_j の定義からすぐわかる。

map. $f \rightarrow f_j$ の連続性を示そう。 f_j の任意の w^* -近傍の subbase $N(f_j; \bar{x}_j; \varepsilon) = \{f \in S(\bar{A}_j); |f(\bar{x}_j) - f_j(\bar{x}_j)| < \varepsilon\}$ ($\bar{x}_j \in \bar{A}_j, 0 < \varepsilon < 1$) をとり出し固定する。 A_j は $\bar{A}_j$ で dense であるから $\|\bar{x}_j - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}$ をみたす $x \in A$ が存在する。よって f の w^* -近傍 $N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ をとると $f \rightarrow f_j$ によって $N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ は $N(f_j; \bar{x}_j; \varepsilon)$ の中に写される。事実 $g \in N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ に対して

$$\begin{aligned} & |f_j(\bar{x}_j) - g_j(\bar{x}_j)| \\ & \leq |f(x) - g(x)| + |f_j(\bar{x}_j - x_j)| + |g_j(\bar{x}_j - x_j)| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \|f_j\| \|\bar{x}_j - x_j\| + \|g_j\| \|\bar{x}_j - x_j\| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

(3) (2) によって $S(A, j)$ と $S(\bar{A}_j)$ は homeomorphic. $S(\bar{A}_j)$ は compact. ゆえに $S(A, j)$ も compact.

zero function で 0 になる $S(A)$ 上の複素数値連続関数の全体を $C_0(S(A))$ とし, $C_0(S(A))$ に次の演算と semi-norm を導入する. $X, Y \in C_0(S(A))$, $f \in S(A)$ に対して

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$$

$$(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$$

$$(XY)(f) = X(f)Y(f)$$

$$(X^*)(f) = \overline{X(f)}$$

$$\|X\|_j = \sup_{f \in S(A,j)} |X(f)|$$

すると $C_0(S(A))$ は locally C^* -algebra になる.

定理 可換な locally C^* -algebra A は locally C^* -algebra $C_0(S(A))$ と isomorphic である.

(証明) 任意の $j \in J$ に対して A_j は可換な C^* -algebra であるから, 任意の $x(j) \in A_j$ と $f_j \in S(A_j)$ に対して $[\pi_j(x(j))](f_j) = f_j(x(j))$ なる A_j から $C_0(S(A_j))$ 上への isometric isomorphism π_j が存在する. $S = S(A) = \bigcup_j S(A,j)$ ならある $j \in J$ があって $f \in S(A,j)$.
ここで任意の $x \in A$ に対して, $S(A)$ 上の関数 $\pi(x)$ を次のように定義する

$$[\pi(x)](f) = [\pi_j(x(j))](f_j) = f_j(x(j)) = f(x).$$

上の $\pi(x)$ は $S(A)$ 上の連続関数, よって $\pi(x) \in C_0(S(A))$.

また $\pi_j(x_j)$ が $*$ -homo. であるから, $\pi(x)$ も $*$ -homo.
 さらに,
$$\begin{aligned} p_j(\pi(x)) &= \sup_{f \in S(A, j)} |[\pi(x)](f)| \\ &= \sup_{f \in S(A, j)} |f(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. 方 } p_j(x) &= \|x_j\| = \|\pi_j(x_j)\| \\ &= \sup_{f_j \in S(\bar{A}_j)} |[\pi_j(x_j)](f_j)| \\ &= \sup_{f_j \in S(\bar{A}_j)} |f_j(x_j)| \end{aligned}$$

map. $f \in S(A, j) \longrightarrow f_j \in S(\bar{A}_j)$ は bijection であるから $p_j(\pi(x)) = p_j(x)$, よって $x \in A \rightarrow \pi(x) \in C_0(S(A))$ は 1:1 である. map. $x \rightarrow \pi(x)$ が onto であることを示せばこの定理は成り立つ. 任意の $X \in C_0(S(A))$ に対して

$$X(j)(f_j) = X(f) \text{ for } \forall f_j \in S(\bar{A}_j)$$

とおくと $S(\bar{A}_j)$ と $S(A, j)$ は homeomorphic であるから $X(j) \in C_0(S(\bar{A}_j))$. $\bar{A}_j$ と $C_0(S(\bar{A}_j))$ は isometric isomorphism であるから $\pi_j(x(j)) = X(j)$ となる $x(j) \in \bar{A}_j$ が存在する. $i < j$ のとき $\pi_{ij}(x(j)) = x(i)$ であることは $[\pi_{ij}(x(j))](f_i) = X(f) = [X(i)](f_i)$ であることによりすぐわかる. Theorem 1.1. により, $x \in A$ が存在して. 任意の $j \in J$ に対して $x_j = x(j)$ が成り立つ. よって $\pi_j(x_j) = X(j)$. 従って. 任意の $f \in S(A)$ に対して $[\pi(x)](f) = [\pi_j(x_j)](f_j) = X(j)(f_j) = X(f)$ よって $\pi(x) = X$, 従って $x \rightarrow \pi(x)$ は onto.

系. $A = C_0(S(A))$ の位相 τ は次の2つの位相と一致する.

- (1) $S(A)$ の *equicontinuous subsets* 上の *uniform convergence* の位相.
- (2) $S(A)$ の *compact, equicontinuous subsets* 上の *uniform convergence* の位相.

(証明) E を $S(A)$ の *equicontinuous subset* とする.
 そのとき, A の 0 の近傍 U が存在して $E \subset U^0 \cap S(A)$ とする.
 U^0 は位相 $\sigma(A^*, A)$ をもった A^* で *compact* である.
 $S(A) = \bigcap_{x, y \in A} \{f \in A^*; f(xy) - f(x)f(y) = 0\}$ で,
 $x \rightarrow f(x), xy \rightarrow f(xy)$ が連続であるから, $S(A)$
 は A^* の *closed subsets* である. よって $U^0 \cap S(A)$ は
 $S(A)$ の *compact subset* である. だから (1), (2) の位
 相は一致する. その位相を τ_0 とする. 今任意の $X \in C_0(S(A))$
 に対して $\rho_j(X) = \sup_{f \in S(A, j)} |X(f)|$. $S(A, j) = S(A)$
 $\cap U_j^0$ は $S(A)$ の *equicontinuous subset* である.
 よって $\tau < \tau_0$. 一方 E が $S(A)$ の *equicontinuous*
subset とあると $E \subset U^0$ をみたす A の 0 の近傍 U が存
 在する. よって $E^0 \cap U$ がいずれも $\tau_0 < \tau$.

§ 3. locally C^* -algebra の representation theory

この § で locally Hilbert space $\mathcal{H}$ を定義し $\mathcal{H}$ 上のある continuous linear operators の algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ を考える. そのとき $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra でありまた任意の locally C^* -algebra は $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の closed $*$ -subalgebra と isomorphic であることを示す.

$\Lambda = (\alpha)$ が directed ordered set で, 任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して内積 $(\cdot | \cdot)_\alpha$ をもった Hilbert space $\mathcal{H}_\alpha$ が与えられているとする. そして Hilbert spaces の族 $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が $\alpha < \beta$ のときいつでも $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\beta$ かつ $\mathcal{H}_\alpha$ 上で $(\cdot | \cdot)_\alpha = (\cdot | \cdot)_\beta$ を満足するものとする. そのとき vector space $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_\alpha$ を考え $\mathcal{H}$ に次のような位相を導入する.

定義 3.1. X : closed subset in $\mathcal{H}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda$; " $X = \mathcal{H}_\alpha$ " or " X closed subset in $\mathcal{H}_\alpha$ "

$\mathcal{K}$ を $\mathcal{H}$ のすべての closed subsets の族とする.

補題 $\mathcal{K}$ によって $\mathcal{H}$ は topological space で T_1 -space になる.

(証明)

(1) $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$

(2) $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$ のとき $\bigcup_{i=1}^n X_i \in \mathcal{K}$ を示す. $X_i = \mathcal{H}_{\alpha_i}$ なる $1 \leq i \leq n$ があるときは $\bigcup_{i=1}^n X_i = \mathcal{H}_{\alpha} \in \mathcal{K}$, すべての
11.

$1 \leq i \leq n$ に対して $X_i \subseteq \mathcal{H}$ のとき $\mathcal{H}$ の closed subsets の定義により任意の i に対して $\alpha_i \in \Lambda$ が存在して X_i は $\mathcal{H}_{\alpha_i}$ で closed である。 Λ は directed set であるから、ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_{\alpha_i} \subset \mathcal{H}_\alpha$ かつ $(\ /)_{\alpha_i} = (\ /)_\alpha$ ($i=1, \dots, n$) から X_i は $\mathcal{H}_\alpha$ の closed subset である。 よって $\bigcup_{i=1}^n X_i$ は $\mathcal{H}_\alpha$ の closed subset. 従って $\bigcup_{i=1}^n X_i \in \mathcal{F}$.

(3) $(X_\lambda)_\lambda \in \mathcal{F}$ なる $\bigcap_\lambda X_\lambda \in \mathcal{F}$ を示す。 任意の λ に対して $X_\lambda = \mathcal{H}$ のときは $\bigcap_\lambda X_\lambda = \mathcal{H} \in \mathcal{F}$. よって $X_{\lambda_0} \subsetneq \mathcal{H}$ なる $\lambda_0 \in (\lambda)$ のときを考えればよい。 $X = \bigcap_\lambda X_\lambda \subset X_{\lambda_0}$ として $X_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$ かつ $X_{\lambda_0} \neq \mathcal{H}$ だからある $\alpha_0 \in \Lambda$ が存在して X_{λ_0} は $\mathcal{H}_{\alpha_0}$ の closed subset である。 $X = \bigcap_\lambda X_\lambda = \bigcap_\lambda X_\lambda \cap \mathcal{H}_{\alpha_0}$. $\alpha < \beta$ なる $(\ /)_\alpha = (\ /)_\beta$ によって $X_\lambda \cap \mathcal{H}_{\alpha_0}$ は $\mathcal{H}_{\alpha_0}$ の closed subset である。 よって $X \in \mathcal{F}$. 以上によって $\mathcal{H}$ は topological space であり $\mathcal{H}$ が T_1 -space であることは明らか。

定義 3.2. 上の $\mathcal{H}$ を locally Hilbert space とよぶことにする。

T を locally Hilbert space $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_\alpha$ 上の linear operator とする。 そして $T_\alpha = T|_{\mathcal{H}_\alpha}$ とおく。 もし $\alpha < \beta$ なる $\mathcal{H}_\alpha$ は $\mathcal{H}_\beta$ の closed subspace であるから $\mathcal{H}_\beta$ から $\mathcal{H}_\alpha$ 上への projection $P_{\alpha\beta}$ を定義することが出来る。

ここで $\alpha < \beta$ ならいつでも $T_\beta P_\alpha = P_\alpha T_\beta$ を満足する $\mathcal{H}$ 上の linear operator T を考えよう。このような T に対して次のことが成り立つ。

補題 3.2.

T : continuous linear operator on $\mathcal{H}$
 $\Leftrightarrow T_\alpha$: bounded linear operator on $\mathcal{H}_\alpha$
 for $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

(証明) $\Rightarrow$: $0 \in U_\alpha$ を $\mathcal{H}_\alpha$ の open subset とする。
 $U = U_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ は $\mathcal{H}$ の 0 の開近傍、 T が連続であるからある $\beta \in \mathcal{A}$ と $\mathcal{H}_\beta$ の 0 の開近傍 V_β が存在して、
 $TV \subset U$, $V = V_\beta \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\beta)$. $V_\beta = \{z \in \mathcal{H}_\beta ; (z/z)_\beta < \delta\}$ と考えてよい。 $\mathcal{A}$ は directed であるから $\alpha, \beta < \gamma$ なる $\gamma \in \mathcal{A}$ が存在する。ここで $V_\gamma = \{z \in \mathcal{H}_\gamma ; (z/z)_\gamma < \delta\}$ とおく。 $V_\gamma \cap \mathcal{H}_\beta = V_\beta$ から $V = V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\gamma)$ として $\mathcal{H}$ の 0 の近傍 $V' = V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\gamma)$ を考えよう。明らかに $V' \subset V$ によって $TV' \subset U$ として $V_\alpha = V_\gamma \cap \mathcal{H}_\alpha = \{z \in \mathcal{H}_\alpha ; (z/z)_\alpha < \delta\}$ は $\mathcal{H}_\alpha$ の 0 の近傍である。そして $T_\alpha V_\alpha \subset U_\alpha$ であることがわかる。

事実、 $\forall z \in V_\alpha = V_\gamma \cap \mathcal{H}_\alpha$ に対して、 $T_\alpha z = Tz \in T(V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\gamma)) \subset U$. 一方 $T_\alpha z \in \mathcal{H}_\alpha$. よって $T_\alpha z \in U_\alpha$ ．それゆえ T_α は $\mathcal{H}_\alpha$ 上で連続。
 13

$\Leftarrow$; $\bar{U}$ を $\mathcal{H}$ の 0 の 閉近傍 とする. そのときある $\alpha \in \Lambda$ と $\mathcal{H}_\alpha$ の 閉近傍 U_α が存在して $\bar{U} = U_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ とかける.

T_α は $\mathcal{H}_\alpha$ で連続であるから $T_\alpha U_\alpha \subset U_\alpha$ なる $\mathcal{H}_\alpha$ の 0 の 閉近傍 V_α が存在する. としてここで $V = V_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ とおくと V は $\mathcal{H}$ の 0 の 近傍である. このとき $TV \subset \bar{U}$ であることを示す. 事実 $z \in V_\alpha$ なら $Tz = T_\alpha z \in U_\alpha \subset \bar{U}$

$z \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha$ なら $T_\beta P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta$ ($\alpha < \beta$) から $Tz \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha \subset \bar{U}$.

定義 3.3. $\alpha < \beta$ ならいつでも $T_\beta P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta$ をみたす $\mathcal{H}$ 上の continuous linear operators の全体を $\alpha(\mathcal{H})$ とかくことにする.

定理 3.1. $\alpha(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra である.

(証明). $T \in \alpha(\mathcal{H})$, $\alpha \in \Lambda$ に対して seminorm.

$p_\alpha(T) = \|T_\alpha\| = \sup_{\substack{z \in \mathcal{H}_\alpha \\ \|z\| \leq 1}} \|T_\alpha z\|$ を導入する. この

semi-norms の族 $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ で $\alpha(\mathcal{H})$ の topology を定義する. いま $\alpha(\mathcal{H})$ に involution を導入しよう.

$T \in \alpha(\mathcal{H})$, そのとき任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $T_\alpha \in B(\mathcal{H}_\alpha)$. かつ $T_\alpha^* \in B(\mathcal{H}_\alpha)$. $\alpha < \beta$ のとき $P_{\alpha\beta} T_\beta = T_\beta P_{\alpha\beta}$ から $T_\beta^* P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta^*$ は明らか かつ $T_\beta^* \mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\alpha$. $z, \tilde{z} \in \mathcal{H}_\alpha$ に対して

$$(T_\beta^* z / \tilde{z})_\beta = (T_\beta^* z / \tilde{z})_\alpha$$

14.

$$\begin{aligned} (T_\beta^* \xi / \xi)_\beta &= (\xi / T_\beta \xi)_\beta = (\xi / T_\alpha \xi)_\alpha \\ &= (T_\alpha^* \xi / \xi)_\alpha. \end{aligned}$$

従って $T_\beta^* \xi = T_\alpha^* \xi$ for $\forall \xi \in \mathcal{H}_\alpha$. 以上により $\xi \in \mathcal{H}$ なら ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\xi \in \mathcal{H}_\alpha$. ここで $T^* \xi$.
 $T^* \xi = T_\alpha^* \xi$ と定義する. この定義は well-defined
 かつ $P_\alpha T_\beta^* = T_\beta^* P_\alpha$, $T_\beta^* / \mathcal{H}_\alpha = T_\alpha^*$ から $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
 そして T^* は involution in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ であることは明
 らか. 任意の α に対して.

$$\begin{aligned} P_\alpha (T_1 T_2) &\leq \| (T_1 T_2)_\alpha \| = \| (T_1)_\alpha (T_2)_\alpha \| \\ &\leq \| (T_1)_\alpha \| \cdot \| (T_2)_\alpha \| = P_\alpha (T_1) P_\alpha (T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha (T^*) &= \| (T^*)_\alpha \| = \| T_\alpha^* \| = \| T_\alpha \| \\ &= P_\alpha (T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha (T^* T) &= \| (T^* T)_\alpha \| = \| T_\alpha^* T_\alpha \| = \| T_\alpha \|^2 \\ &= P_\alpha (T)^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の完備性は明らか. 以上から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra である.

定理 3.2.

A : locally C^* -algebra
 $\Rightarrow \exists$ locally Hilbert space $\mathcal{H}$
) A は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の closed $*$ -subalgebra と
 isomorphic

(証明). A を C^* -seminorm の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ をもった, locally C^* -algebra とする. 任意の $j \in J$ に対して, $\bar{A}_j$ は C^* -algebra であるから, ある Hilbert space H_j と $\bar{A}_j$ から $B(H_j)$ (H_j 上の bounded linear ops の全体) の中への isometric isomorphism π_j が存在する. いま $h_j = \bigoplus_{k \leq j} H_k$, 任意の $x \in A$ に対して, $\bar{\pi}_j(x) = \bigoplus_{k \leq j} \pi_k(x_k)$ とおく. そのとき,

$$\begin{aligned} \|\bar{\pi}_j(x)\| &= \sup_{k \leq j} \|\pi_k(x_k)\| \\ &= \sup_{k \leq j} \|x_k\| = \|x_j\| \\ &= p_j(x) \end{aligned}$$

それゆえ $\bar{\pi}_j(x) \in B(h_j)$

$i < j$ のとき $h_i \subset h_j$ と $h_i \oplus 0 \subset h_j$ と同一視して考えると, h_i は h_j の closed subspace と考えてよい. そのとき locally Hilbert space $h = \bigcup_j h_j$ をつくることができる. $z = \bigoplus_{k \leq j} z_k \in h_j$ のとき,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_j(x) p_{ij} z &= \bar{\pi}_j(x) \left(\bigoplus_{k \leq i} z_k \oplus 0 \right) \\ &= \left(\bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) \right) \left(\bigoplus_{k \leq i} z_k \right) \\ &= \bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ij} \bar{\pi}_j(x) z &= p_{ij} \left(\bigoplus_{k \leq j} \pi_k(x_k) z_k \right) \\ &= \bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) z_k \end{aligned}$$

それゆえ $\bar{\pi}_j(x) p_{ij} = p_{ij} \bar{\pi}_j(x)$

として $\overline{\pi_j(x)} / g_i = \overline{\pi_i(x)}$ は明らか. $\exists \in \mathcal{I}$ なる $\exists \in \mathcal{I}$ なる $j \in J$ が存在するから、ここで $\pi(x)$ を " $\pi(x)\exists = \overline{\pi_j(x)}\exists$ " と定義する. そのとき $\pi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$,
 任意の $j \in J$ に対して $\overline{\pi_j(x)}$ は $\ast$ -homo. として
 $g_j(\pi(x)) = \|\overline{\pi_j(x)}\| = p_j(x)$ だから π は A から $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ の中への isomorphism である.