

素数および概素数のギャップについて

宗野 恵樹 (城西大学理学部)

概要

近年発展した Maynard, Tao の手法を相異なる 2 つの素数の積で表される整数 (概素数, または E_2 -number とよぶ) の集合に適用することで, 概素数の集合, あるいは素数と概素数からなる集合における隣接する元のギャップに関するいくつかの結果が得られる. 本稿では, それらの結果と証明の概略について述べる.

1 序論

3 と 5, 17 と 19, 41 と 43 のように, 差が 2 であるような素数の組を双子素数という. 古代より, 双子素数は無限に存在すると予想 (双子素数予想) されてきたが, 現在のところ証明も反証もなされていない. この予想に最も接近した結果としては, 「素数 p であって, $p+2$ が素数または 2 つの素数の積になるようなものが無限に存在する」という Chen の定理 [1] が挙げられる. 解析的整数論では, 双子素数予想のような問題に対し, 十分大きい範囲において対象となる数が大体どの程度存在するかをとりあえず考察してみることが常套手段である. およそ 100 年前, Hardy と Littlewood [4] は確率論的な考察に基づき, 双子素数予想を一般化した問題に対し次のような予想を立てた: $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\}$ を相異なる k 個の整数の組とし, 各素数 p に対し $\mathcal{H}$ を $\text{mod } p$ で数えたときの元の個数を $\nu_p(\mathcal{H})$ と表すことにする. このとき, もしも全ての素数 p に対して $\nu_p(\mathcal{H}) < p$ となるならば, 1 以上 N 以下の整数 n であって $n+h_1, \dots, n+h_k$ が全て素数になるような n の個数は漸近的に

$$\frac{N}{\log^k N} \prod_p \left(1 - \frac{\nu_p(\mathcal{H})}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}$$

になるであろう (Hardy-Littlewood 予想). 上の条件をみたす集合 $\mathcal{H}$ は許容集合 (admissible set) と呼ばれる. 双子素数予想は $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ の場合である.

以下, n 番目の素数を p_n と表す. 素数定理により, 十分大きい n に対し p_n は漸的に $n \log n$ 程度になる. このことから, $p_{n+1} - p_n$ は平均すると漸的に $\log p_n$ 程度になることが分かる. 2009 年, Goldston, Pintz, Yıldırım らは, 彼らの頭文字を冠した GPY sieve と呼ばれる篩を用いて, $p_{n+1} - p_n$ が $\log p_n$ に比していくらかでも小さくなりうることを示した [2]. すなわち,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0. \quad (1.1)$$

更に同じ論文において, $1/2 < \theta < 1$ に対し素数の分布レベルが θ であるならば (用語の定義は第 2 章を参照のこと),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) < \infty \quad (1.2)$$

であること, 言い換えればある正定数 C があって, 差が C 以下になる素数の組が無限に存在することが示された. Bombieri-Vinogradov の定理により素数の分布レベルは $1/2 - \epsilon$ 以上であることが知られているので, 2009 年の時点であと一步で (1.2) が無条件 (unconditional) に証明できるのではないかと期待されていた. そしてそれは期待通り, 時を待たず実現されることとなる. 2013 年, Zhang [10] は, Bombieri-Vinogradov の定理をある条件下で拡張することにより,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 7 \times 10^7 \quad (1.3)$$

が成り立つこと、すなわち差が7000万以下の素数の組が無数に存在することを示した。Zhangの結果は Terence Tao らの有力な数学者により直ちに改良され、たとえば [8] では (1.3) の右辺が 4680 に置き換えられることが示された。その直後、Maynard[5] は、Zhang とは大きく異なる方法で (1.3) の右辺が 600 に置き換えられることを示した。また、同時期に Tao も同様の手法を考察していたということで (Maynard の論文 [5] に private communication でそう伝えたと書かれている)、彼らの手法は Maynard-Tao の方法と呼ばれている。Maynard-Tao の方法は GPY の篩を多次元化したものであり、Zhang の手法に比べると非常に簡単で使い勝手がよい。そのため、その後出版された素数のギャップに関する論文の多くは Maynard-Tao の手法の応用や拡張が基本になっている。また、Maynard-Tao の方法は Zhang のアイデアとも相性が良く、2016 年 3 月現在ではこれらの長所を組み合わせることにより (1.3) の右辺を 246 に置き換えられることが知られている [9]。

次に、概素数のギャップに関する歴史を紹介する。 $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $14 = 2 \times 7$, $15 = 3 \times 5$ のように相異なる 2 つの素数の積で表される整数を概素数、または E_2 -number という (ただし「概素数」という言葉の定義は人によって少し異なる場合があるが、本稿では上の定義で統一する)。概素数は素数よりも高い密度で存在するため、隣接する元の差がどの程度小さくなりうるかを考える場合素数よりも比較的良好な結果が得られる。以下、 n 番目の概素数を q_n と表すことにする。2009 年、Goldston, Graham, Pintz, Yıldırım らは、GPY の篩と同様の手法により

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+1} - q_n) \leq 6 \quad (1.4)$$

が成り立つこと、および十分大きい任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+m} - q_n) \leq m(1 + o(1)) \exp\left(-\gamma + \frac{m}{2\theta}\right) \quad (1.5)$$

が成り立つことを示した [3]。ここで、 $\gamma = 0.57721 \dots$ は Euler 定数、 θ は素数および概素数の分布レベルであり、 $\theta = 1/2 - \epsilon$ と取れる。

上述した通りこれらの結果は GPY の篩を概素数の集合に適用して得られるものである。そこで自然に生じる問いとして、GPY の代わりに Maynard-Tao の方法を概素数に適用すると、果たしてこれらの結果を改善できるだろうか? という問題が考えられる。本稿の目的はこの問いに答え、概素数の集合に対し Maynard-Tao の方法がどの程度機能するのかを明らかにすることである。

2 主定理

主定理を述べる前に必要な記号をいくつか準備する。先と同様、自然数 n に対し n 番目の素数を p_n , n 番目の概素数を q_n と表すことにする。また、素数全体の集合を $\mathcal{P}$, 概素数全体の集合を E_2 と表す。また、これらの和集合を $\mathcal{P}_2$ と表す。 $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\}$ は許容集合であるとする。十分大きい自然数 N に対し、

$$\beta(n) = \begin{cases} 1 & (n = p_1 p_2, Y < p_1 \leq N^{\frac{1}{2}} < p_2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.1)$$

とする。ここで、 $Y = N^\eta$, $1 \ll \eta < \frac{1}{4}$ 。次に、

$$\pi^b(N) = \#\{p \in \mathcal{P} \mid N \leq p < 2N\},$$

$$\pi^b(N; q, a) = \#\{p \in \mathcal{P} \mid N \leq p < 2N, p \equiv a \pmod{q}\},$$

$$\pi_\beta(N) = \sum_{N < n \leq 2N} \beta(n), \quad \pi_{\beta, q}(N) = \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} \beta(n),$$

$$\pi_\beta(N; q, a) = \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ n \equiv a \pmod{q}}} \beta(n)$$

とする. 等差数列上の素数と概素数の分布について, 次の2つの仮定を考える:

仮定 1 ($BV[\theta, P]$)

任意の $\epsilon > 0$, $A > 0$ に対し,

$$\sum_{q \leq N^{\theta-\epsilon}} \mu^2(q) \max_{(a,q)=1} \left| \pi^b(N; q, a) - \frac{\pi^b(N)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{N}{\log^A N} \quad (N \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

仮定 2 ($BV[\theta, E_2]$)

$\beta(n)$ の定義における $0 < \eta < \frac{1}{4}$ を固定するとき, 任意の $\epsilon > 0$, $A > 0$ に対し

$$\sum_{q \leq N^{\theta-\epsilon}} \mu^2(q) \max_{(a,q)=1} \left| \pi_\beta(N; q, a) - \frac{\pi_{\beta,q}(N)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{N}{\log^A N} \quad (N \rightarrow \infty). \quad (2.3)$$

上の仮定が成り立つ θ をそれぞれ素数ないし概素数の分布レベルという. Bombieri-Vinogradov の定理により, $BV[1/2, P]$ が成り立つことが知られている. 更に強く, $BV[1, P]$ が成り立つのではないかと予想されている. これを Elliott-Halberstam 予想という. また, $BV[1/2, E_2]$ が成り立つことが Motohashi の結果 [7] から従う. 素数の場合と同様, $BV[1, E_2]$ が成り立つのではないかと予想するのは自然であり, これを概素数に関する Elliott-Halberstam 予想と呼ぶことにする.

主定理は以下の4つである:

Theorem 2.1. $\mathcal{P}$ および E_2 は共に分布レベル $\theta > 0$ であるとする. そのとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $\rho_\epsilon > 0$ であって任意の整数 $\rho > \rho_\epsilon$ に対して不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+\rho} - q_n) \leq \exp \left(\frac{(2+\epsilon)\rho}{3\theta \log \rho} \right) \quad (2.4)$$

が成り立つものが存在する. 特に, 任意の $\rho > \rho_\epsilon$ に対し,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+\rho} - q_n) \leq \exp \left(\frac{2(2+\epsilon)\rho}{3 \log \rho} \right) \quad (2.5)$$

Theorem 2.1 は Goldston, Graham, Pintz, Yıldırım らの結果 (1.5) の改良といえる. なお, 東京工業大学の欄寝崇之氏は本稿とほぼ同様の方法により, Theorem 2.1 よりも良い評価が得られたと修士論文で報告している.

Theorem 2.2. 6つの元からなる任意の許容集合 $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_6\}$ に対し, 整数 n であって $n + h_1, n + h_2, \dots, n + h_6$ のうち少なくとも3つが $\mathcal{P}_2$ の元になるものが無限に存在する.

集合 $\mathcal{H} = \{0, 4, 6, 10, 12, 16\}$ は6つの元からなる許容集合である. よって, $\mathcal{P}_2$ の n 番目の元を r_n と表す時, 仮定なしに

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (r_{n+2} - r_n) \leq 16. \quad (2.6)$$

が成り立つ.

$\mathcal{P}$ および E_2 に関する Elliott-Halberstam 予想を仮定すると, より強い結果が得られる:

Theorem 2.3. $\mathcal{P}$ および E_2 に関する Elliott-Halberstam 予想を仮定する. そのとき, 整数 n であって $n, n+2, n+6$ が全て $\mathcal{P}_2$ の元になるものが無限に存在する. 特に

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (r_{n+2} - r_n) \leq 6. \quad (2.7)$$

Maynard は, $n(n+2)(n+6)$ が高々7つの素因子を持つような n が無限に存在することを示した [6]. Theorem 2.3 は彼の結果を仮定付きで改良したものであるといえる. 最後に,

Theorem 2.4. $\mathcal{P}$ と E_2 に関する Elliott-Halberstam 予想を仮定すると,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+2} - q_n) \leq 12. \quad (2.8)$$

3 Maynard-Tao の篩

$\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\}$ は k 個の元からなる許容集合とする. 本稿を通して, $\mathcal{H}$ の元は有界であるとする. すなわち, k のみに依存する正定数 $C = C_k$ があって, $h_i \leq C$ ($i = 1, \dots, k$) となるとする. 素数全体の集合 $\mathcal{P}$ 上の特性関数を $\chi_{\mathcal{P}}$ と表す.

$$D_0 = \log \log \log N, \quad W = \prod_{p \leq D_0} p \ll (\log \log N)^2$$

と置く. $\mathcal{P}$ および E_2 は分布レベル θ であるとする. $\nu_0 \in \mathbb{N}$ を, $\nu_0 + h_i$ ($i = 1, \dots, k$) が全て W と互いに素になるように取る ($\mathcal{H}$ は許容集合なのでこのような取り方ができる). 滑らかな関数 $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ であって,

$$\mathcal{R}_k := \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1, \dots, x_k \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1\}$$

に台を持つものに対し,

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i \right) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ d_i | r_i (\forall i) \\ (r_i, W) = 1 (\forall i)}} \frac{\mu(\prod_{i=1}^k r_i)^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right) \quad (3.1)$$

と置く. ここで, $R = N^{\frac{1}{2}-\delta}$ であり, δ は十分小さい正定数. この $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ は, $\prod_{i=1}^k d_i$ が平方自由であり, $\prod_{i=1}^k d_i \leq R$, かつ $(d_i, W) = 1$ ($i = 1, \dots, k$) であるとき以外は 0 になる. ウェイト w_n を,

$$w_n = \left(\sum_{d_i | n + h_i (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2 \quad (3.2)$$

で定義する. 隣接する素数のギャップを調べるには, 自然数 ρ に対し, 和

$$S(N, \rho) = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W}}} \left(\sum_{m=1}^k \beta(n + h_m) - \rho \right) w_n \quad (3.3)$$

を考える. もし $S(N, \rho) > 0$ となるならば, $n \in [N, 2N)$ であって, $n + h_1, \dots, n + h_k$ のうち少なくとも $\rho + 1$ 個が E_2 の元になるものが存在する. よって, 十分大きい任意の N に対し $S(N, \rho) > 0$ となるならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+\rho} - q_n) \leq \max_{1 \leq i < j \leq k} |h_j - h_i|$$

が成り立つ. 同様に, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cup E_2$ の元のギャップを調べるには, 自然数 ρ に対し, 和

$$S'(N, \rho) = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W}}} \left(\sum_{m=1}^k (\beta(n + h_m) + \chi_{\mathcal{P}}(n + h_m)) - \rho \right) w_n \quad (3.4)$$

を考えればよい. もし $S'(N, \rho) > 0$ となるならば, $n \in [N, 2N)$ であって, $n + h_1, \dots, n + h_k$ のうち少なくとも $\rho + 1$ 個が $\mathcal{P}_2$ の元になる. このような考察から, 以下のような和を考えれば良いことが分かる:

$$S_0 = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W}}} w_n, \quad S_1^{(m)} = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathcal{P}}(n + h_m) w_n, \quad (3.5)$$

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W}}} \beta(n + h_m) w_n \quad (m = 1, \dots, k). \quad (3.6)$$

4 仮定の役割

第2章で導入した2つの仮定 $BV[\theta, P]$, $BV[\theta, E_2]$ が計算上どのような状況で利用されるかを手短かに説明したい。たとえば $S_1^{(m)}$ は, w_n の定義を代入して和の順序交換を行うと

$$S_1^{(m)} = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i (\forall i)}} \chi_P(n + h_m)$$

$[d_i, e_i]$ は d_i と e_i の最小公倍数) と書けるが, ウエイトの条件から $W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$ のどの2つも互いに素なもののみ $S_1^{(m)}$ に寄与するので, $q = W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ と置くとき, 後ろの和はある $\nu_m \in \mathbb{Z}$ に対する $n \equiv \nu_m \pmod{q}$ なる n に関する和と考えられる。ここに現れる q はある程度大きくなりうるため, Siegel-Walfisz の定理などは上手く機能しない。そこで, 等差数列上の和を

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N \leq n < 2N} \chi_P(n) + O(E(N, q)),$$

$$E(N, q) = 1 + \sup_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv a \pmod{q}}} \chi_P(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N \leq n < 2N} \chi_P(n) \right|$$

と書き換える。 $q \leq WR^2 \leq N^{\theta-\epsilon}$ であり, ここに現れる $E(N, q)$ の寄与の評価に $BV[\theta, P]$ が利用されるのである。

5 漸近公式

S_0 と $S_1^{(m)}$ の漸近公式は Maynard[5] により得られた。結果は以下の通りである:

Proposition 5.1.

$$I_k(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 dt_1 \cdots dt_k,$$

$$J_k^{(m)}(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) dt_m \right)^2 dt_1 \cdots dt_{m-1} dt_{m+1} \cdots dt_k$$

と置く。すると, $I_k(F) \neq 0$ ならば,

$$S_0 = \frac{(1 + o(1)) \varphi(W)^k N (\log R)^k}{W^{k+1}} I_k(F). \quad (5.1)$$

また, $J_k^{(m)}(F) \neq 0$ ならば

$$S_1^{(m)} = \frac{(1 + o(1)) \varphi(W)^k N (\log R)^{k+1}}{W^{k+1} \log N} J_k^{(m)}(F) \quad (m = 1, \dots, k). \quad (5.2)$$

よって後は $S_2^{(m)}$ を計算すればよい。和の順序交換により,

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv \nu_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i (\forall i)}} \beta(n + h_m). \quad (5.3)$$

整数 d_m, e_m は,

$$d_m, e_m | n + h_m \quad (5.4)$$

を満たす。

さて, $n + h_m = p_1 p_2$, $Y < p_1 \leq N^{\frac{1}{2}} < p_2$ のとき以外は $\beta(n + h_m) = 0$ であり, 更に $\prod_{i=1}^k d_i \leq R < N^{\frac{1}{2}}$ のとき以外は $\lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0$ であるから, 以下の 4 つのタイプのみが上の和に寄与する:

- 1) $d_m = p, e_m = 1$ ($Y < p \leq R$),
- 2) $d_m = 1, e_m = p$ ($Y < p \leq R$),
- 3) $d_m = e_m = 1$,
- 4) $d_m = e_m = p$ ($Y < p \leq R$).

これに応じて

$$S_2^{(m)} = S_{2,I}^{(m)} + S_{2,II}^{(m)} + S_{2,III}^{(m)} + S_{2,IV}^{(m)} \quad (5.5)$$

と分割する. これらは次の漸近式で与えられる:

Proposition 5.2. $BV[\theta, \mathcal{P}]$ を仮定する. もしも

$$L_{k,\delta}^{(m)}(F) := \int_{\eta}^{\frac{\theta}{2}-\delta} \frac{\frac{\theta}{2}-\delta-\xi}{1-\xi} L_{k,\delta}^{[m]}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \neq 0,$$

ならば,

$$\begin{aligned} S_{2,I}^{(m)} = & -\frac{\varphi(W)^k N}{W^{k+1}} (\log R)^k (1 + o(1)) L_{k,\delta}^{(m)}(F) \\ & + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log N)^k}{D_0 W^{k+1}}\right) + O_B\left(\frac{N F_{\max}^2}{(\log N)^B}\right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} L_{k,\delta}^{[m]}(\xi) := & \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\{ \int_0^1 F_{m,\delta}(u_1, \dots, u_k; \xi) du_m \right\} \\ & \times \left\{ \int_0^1 F(u_1, \dots, u_k) du_m \right\} du_1 \cdots du_{m-1} du_{m+1} \cdots du_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F_{m,\delta}(u_1, \dots, u_k; \xi) \\ & := F\left(u_1, \dots, u_{m-1}, \frac{\xi}{\frac{\theta}{2}-\delta} + \frac{\frac{\theta}{2}-\delta-\xi}{\frac{\theta}{2}-\delta} u_m, u_{m+1}, \dots, u_k\right). \end{aligned}$$

対称性により, $S_{2,II}^{(m)}$ も全く同じ式で与えられる. もしも $L_{k,\delta}^{(m)}(F) = 0$ ならば,

$$S_{2,I}^{(m)} = S_{2,II}^{(m)} = o\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log N)^k}{W^{k+1}}\right) + O_B\left(\frac{N F_{\max}^2}{(\log N)^B}\right)$$

となる.

Proposition 5.3. $BV[\theta, E_2]$ の仮定下で,

$$\begin{aligned} S_{2,III}^{(m)} = & \frac{\varphi(W)^k N (\log R)^{k+1}}{W^{k+1} \log N} \left(\log \frac{1-\eta}{\eta} \right) (1 + o(1)) J_k^{(m)}(F) \\ & + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log N)^k}{W^{k+1} D_0}\right) + O_B\left(\frac{F_{\max}^2 N}{(\log N)^B}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで,

$$J_k^{(m)}(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) dt_m \right)^2 dt_1 \cdots dt_{m-1} dt_{m+1} \cdots dt_k. \quad (5.8)$$

Proposition 5.4. $BV[\theta, P]$ の仮定下で,

$$S_{2,IV}^{(m)} = \frac{\varphi(W)^k N \log N (\log R)^{k-1}}{W^{k+1}} (1 + o(1)) M_{k,\delta}^{(m)}(F) + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log N)^k}{W^{k+1} D_0}\right) + O_B\left(\frac{F_{\max}^2 N}{(\log N)^B}\right) \quad (5.9)$$

が,

$$M_{k,\delta}^{(m)}(F) := \int_{\eta}^{\frac{\theta}{2}-\delta} \frac{(\frac{\theta}{2}-\delta-\xi)^2}{1-\xi} M_{k,\delta}^{[m]}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \neq 0$$

のとき成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} M_{k,\delta}^{[m]}(\xi) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F_{m,\delta}(u_1, \dots, u_k; \xi) du_m \right)^2 du_1 \cdots du_{m-1} du_{m+1} \cdots du_k, \\ F_{m,\delta}(u_1, \dots, u_k; \xi) &:= F\left(u_1, \dots, u_{m-1}, \frac{\xi}{\frac{\theta}{2}-\delta} + \frac{\frac{\theta}{2}-\delta-\xi}{\frac{\theta}{2}-\delta} u_m, u_{m+1}, \dots, u_k\right). \end{aligned}$$

$M_{k,\delta}^{(m)}(F) = 0$ のときは,

$$S_{2,IV}^{(m)} = o\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log N)^k}{W^{k+1}}\right) + O_B\left(\frac{N F_{\max}^2}{(\log N)^B}\right).$$

6 ここまでのまとめ

素数 (E₂) におけるギャップを調べるには, $\rho \in \mathbf{N}$ に対し

$$\begin{aligned} S(N, \rho) &= \sum_{m=1}^k S_2^{(m)} - \rho S_0 \\ &= \sum_{m=1}^k \left(S_{2,I}^{(m)} + S_{2,II}^{(m)} + S_{2,III}^{(m)} + S_{2,IV}^{(m)} \right) - \rho S_0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

を考える. 素数および素数からなる集合 (P_2) におけるギャップを調べるには,

$$\begin{aligned} S'(N, \rho) &= \sum_{m=1}^k (S_1^{(m)} + S_2^{(m)}) - \rho S_0 \\ &= \sum_{m=1}^k \left(S_1^{(m)} + S_{2,I}^{(m)} + S_{2,II}^{(m)} + S_{2,III}^{(m)} + S_{2,IV}^{(m)} \right) - \rho S_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

を考えればよい. もしも $S(N, \rho) \rightarrow \infty$ となるならば, $n + h_1, \dots, n + h_k$ のうち少なくとも $\rho + 1$ 個が E_2 の元になる n が無限に存在する. もしも $S'(N, \rho) \rightarrow \infty$ となるならば, $n + h_1, \dots, n + h_k$ のうち少なくとも $\rho + 1$ 個が P_2 の元になるような n が無限に存在する. ここまでで $S(N, \rho)$, $S'(N, \rho)$ を構成する各項の漸近公式はすべて得られている. $S_{2,I}^{(m)}$ と $S_{2,II}^{(m)}$ は Proposition 5.2 で, $S_{2,III}^{(m)}$ は Proposition 5.3 で, $S_{2,IV}^{(m)}$ は Proposition 5.4 でそれぞれ与えられる. また, S_0 と $S_1^{(m)}$ は Maynard [5] により計算されており, これらは Proposition 5.1 で与えられる. これらを組み合わせると, $BV[\theta, P]$, $BV[\theta, E_2]$ の仮定の下, $S(N, \rho)$ は漸近的に

$$\begin{aligned} &\left\{ -\theta' \sum_{m=1}^k L_{k,\delta}^{(m)}(F) + \frac{\theta'^2}{4} \left(\log \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^k M_{k,\delta}^{(m)}(F) - \frac{\rho\theta'}{2} I_k(F) \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{\theta'}{2} \right)^{k-1} \frac{\varphi(W)^k N (\log N)^k}{W^{k+1}} \end{aligned}$$

となり, $S'(N, \rho)$ は漸近的に

$$\left\{ -\theta' \sum_{m=1}^k L_{k,\delta}^{(m)}(F) + \frac{\theta'^2}{4} \left(1 + \log \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^k M_{k,\delta}^{(m)}(F) - \frac{\rho\theta'}{2} I_k(F) \right\} \\ \times \left(\frac{\theta'}{2} \right)^{k-1} \frac{\varphi(W)^k N(\log N)^k}{W^{k+1}}$$

となる (ただし, leading term が 0 でない場合). ここで,

$$\theta' = \theta - 2\delta.$$

$\delta \rightarrow +0$ とし, 係数

$$-\theta \sum_{m=1}^k L_{k,0}^{(m)}(F) + \frac{\theta^2}{4} \left(\log \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^k M_{k,0}^{(m)}(F) - \frac{\rho\theta}{2} I_k(F), \quad (6.3)$$

$$-\theta \sum_{m=1}^k L_{k,0}^{(m)}(F) + \frac{\theta^2}{4} \left(1 + \log \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^k M_{k,0}^{(m)}(F) - \frac{\rho\theta}{2} I_k(F) \quad (6.4)$$

がそれぞれ正になるかどうかを見ればよい.

7 定理の証明の概略

まず, Theorem 2.1 の証明の概略を記す. $\rho \in \mathbf{N}$ は十分大とする. ウェイト w_n を定めるテスト関数 F は Maynard [5] と同じものを用いる. すなわち, $A = \log k - 2 \log \log k$, $T = (e^A - 1)/A$ とし, 関数 $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+Au} & (0 \leq u \leq T) \\ 0 & (u > T) \end{cases} \quad (7.1)$$

で定め,

$$F(u_1, \dots, u_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^k g(ku_i) & (u_1, \dots, u_k \geq 0, u_1 + \dots + u_k \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (7.2)$$

として F を定義する. η を

$$\eta = \frac{\theta T}{k} \sim \frac{\theta}{(\log k)^3}$$

として定める. このとき, $F_{m,0}$ は

$$F_{m,0}(u_1, \dots, u_k; \xi) = g \left(k \left(\frac{2\xi}{\theta} + \frac{\theta - 2\xi}{\theta} u_m \right) \right) \prod_{i \neq m} g(ku_i)$$

で与えられる. (u_m, ξ) が $[0, 1] \times [\eta, \frac{\theta}{2}]$ を動くとき,

$$k \left(\frac{2\xi}{\theta} + \frac{\theta - 2\xi}{\theta} u_m \right) \geq \frac{2k\eta}{\theta} = 2T > T$$

となるので, $F_{m,0}$ は恒等的に 0 となる. よって $L_k^{(m)}(F) = M_k^{(m)}(F) = 0$ ($m = 1, \dots, k$). よって,

$$\frac{\frac{\theta^2}{4} \left(\log \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{\frac{\theta}{2} I_k(F)} > \rho \quad (7.3)$$

ならば, (6.3) は正になる. $k \in \mathbf{N}$ を

$$k = \left\lceil \exp \left(\frac{(2+\epsilon)\rho}{3\theta \log \rho} \right) + 1 \right\rceil$$

で定めると, [5] と同様の計算により上の不等式が成り立つことが分かる. よって Theorem 2.1 の結論を得る. Theorem 2.2-2.4 は *Mathematica* を用いて積分計算を行う. Theorem 2.2 を示すには, $k = 6, \rho = 2, \theta = \frac{1}{2}$ としてある F に対し (6.4) が正になることを確認すればよい. F を, $x, y, z, u, v, w \geq 0, x + y + z + u + v + w \leq 1$ のとき

$$F(x, y, z, u, v, w) = 1 - \frac{143577}{50000}P_1 + \frac{12337}{5000}P_1^2 + \frac{86987}{50000}P_2 \\ - \frac{619873}{1000000}P_1^3 - \frac{156481}{100000}P_1P_2 - \frac{230073}{5000000}P_3$$

とし, それ以外では $F(x, y, z, u, v, w) := 0$ として定義する. ここで, $P_i = x^i + y^i + z^i + u^i + v^i + w^i$ ($i = 1, 2, 3$). また, $\eta = 10^{-10}$ とする. そのとき,

$$I_6(F) = 5.30806 \cdots \times 10^{-6}, \quad J_6(F) = 1.88915 \cdots \times 10^{-6}, \\ L_{6,0}^{(m)}(F) = 9.20744 \cdots \times 10^{-6}, \quad M_{6,0}^{(m)}(F) = 2.22265 \cdots \times 10^{-6}$$

となるので,

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 L_{6,0}^{(m)}(F) + \frac{1}{16} \left(1 + \log \frac{1 - 10^{-10}}{10^{-10}} \right) \sum_{m=1}^6 J_6^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^6 M_{6,0}^{(m)}(F) - \frac{1}{2} I_6(F) \\ = 8.02 \cdots \times 10^{-8} > 0.$$

よって Theorem 2.2 の結論を得る.

Theorem 2.3 を示すには, $k = 3, \rho = 2, \theta = 1$ のときある F に対し (6.4) が正になることを示せばよい. F を,

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (1-x)(1-y)(1-z) & (x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (7.4)$$

で定義し, $\eta = 10^{-10}$ と置く. すると,

$$I_3(F) = 0.0287919 \cdots, \quad J_3^{(m)}(F) = 0.0154828 \cdots, \\ L_{3,0}^{(m)}(F) = 0.1606331 \cdots, \quad M_{3,0}^{(m)}(F) = 0.0779163 \cdots$$

となる. よって,

$$-\sum_{m=1}^3 L_{3,0}^{(m)}(F) + \frac{1}{4} \left(1 + \log \frac{1 - 10^{-10}}{10^{-10}} \right) \sum_{m=1}^3 J_3^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^3 M_{3,0}^{(m)}(F) - I_3(F) = 0.00204 \cdots > 0.$$

よって Theorem 2.3 が従う.

Theorem 2.4 を示すため, $k = 5, \rho = 2, \theta = 1$ のとき (6.3) がある F に対し正になることを示す. F を, $x, y, z, u, v \geq 0, x + y + z + u + v \leq 1$ のときは

$$F(x, y, z, u, v) = 1 + \frac{917}{500}Q_1 - \frac{281}{50}Q_1^2 - \frac{41}{25}Q_2 + \frac{287}{100}Q_1^3 + \frac{191}{100}Q_1Q_2 - \frac{81}{250}Q_3$$

とし, それ以外では $F(x, y, z, u, v) := 0$ として定める. ここで, $Q_i = x^i + y^i + z^i + u^i + v^i$ ($i = 1, 2, 3$). また, $\eta = 10^{-10}$ とする. このとき

$$I_5(F) = \frac{1735763}{1732500000}, \quad J_5^{(m)}(F) = \frac{722755717}{1871100000000}, \\ L_{5,0}^{(m)}(F) = 0.00392368 \cdots, \quad M_{5,0}^{(m)}(F) = 0.00190092 \cdots$$

となるので,

$$-\sum_{m=1}^5 L_{5,0}^{(m)}(F) + \frac{1}{4} \left(\log \frac{1 - 10^{-10}}{10^{-10}} \right) \sum_{m=1}^5 J_5^{(m)}(F) + \sum_{m=1}^5 M_{5,0}^{(m)}(F) - I_5(F) \\ = 2.13079 \cdots \times 10^{-6} > 0$$

となる. $\mathcal{H} = \{0, 2, 6, 8, 12\}$ は 5 個の元からなる許容集合であるから, Theorem 2.4 の結論が得られる.

8 謝辞

本稿は 2015 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」における私の講演を基にしたものである。講演および本稿の執筆の機会を与えていただいた研究代表者の神谷諭一先生、副代表者の石川秀明先生にこの場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

- [1] J.-R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica **16** (1973), 157-176
- [2] D. A. Goldston, J. Pintz, C. Y. Yildirim, *Primes in tuples I*, Ann. of Math. (2) **170** (2009), No. 2, 819-862
- [3] D. A. Goldston, S. W. Graham, J. Pintz, C. Y. Yildirim, *Small gaps between primes or almost primes*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), No. 10, 5285-5330
- [4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum': III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), No. 1, 1-70
- [5] J. Maynard, *Small gaps between primes*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), No. 1, 383-413
- [6] J. Maynard, *3-tuples have at most 7 prime factors infinitely often*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), No. 3, 443-457
- [7] Y. Motohashi, *An induction principle for the generalization of Bombieri's prime number theorem*, Proc. Japan Acad. **52** (1976), 273-275
- [8] D. H. J. Polymath, W. Castryck, E. Fouvry, G. Harcos, E. Kowalski, P. Michel, P. Nelson, E. Paldi, J. Pintz, A. V. Sutherland, T. Tao, X. Xiao-Feng, *New equidistribution estimates of Zhang type*, Algebra Number Theory **8** (2014), No. 9, 2067-2199
- [9] D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*, Res. Math. Sci. **1** (2014), 1:12
- [10] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), No. 3, 1121-1174

Josai University,
 Keyakidai, Sakado,
 Saitama, Japan
 E-mail address: suono@josai.ac.jp