

散逸関数を使った粘性流体の変分原理

深川 宏樹 (Hiroki FUKAGAWA)*

藤谷 洋平 (Youhei FUJITANI)†

慶應大学・基礎理工

概要

流体の内部エネルギーと散逸関数が与えられたときに, 変分原理を使って流体の運動方程式を導出する. 本稿では, 最初に散逸のない系である完全流体の変分原理について説明をし, 次に散逸系であるニュートン流体の変分原理について説明をする. 完全流体では質量保存則と断熱条件が成立し, オイラー方程式はこれらの拘束条件の下である汎関数を最小にする条件から導出することができる. ニュートン流体では断熱条件は成立しておらず, 流体粒子の流跡線沿ったエントロピーの変化は散逸関数と熱流によって決まる. これは非ホロノミックな拘束条件を与える. 我々はナビエーストークス方程式をこの拘束条件の下で完全流体と同じ汎関数が最小になる条件から導いた.

1 導入

本稿ではオイラー的記述を用いて計算を行うが, ラグランジュ的記述を用いても同様に計算を行うことはできる [1]. 流体の運動は, 速度場 $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, 質量密度 ρ , 単位質量あたりエントロピー密度 s の時間変化によって記述される. これらの変数は自由ではなく, 質量保存とエントロピー増大則に関する拘束条件によって関係づけられている. 各々の流体は単位質量当たりの内部エネルギーと散逸関数によって特徴付けられる. 初期時刻と終端時刻をそれぞれ t_{init} と t_{fin} とし, 完全流体が占める空間を V とし, その境界を ∂V とする. 流跡線の初期位置と終端位置を固定する条件は, ラグランジュ座標 $\mathbf{A} \equiv (A_1, A_2, A_3)$ を用いて以下のように与えられる [2].

$$\delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t_{\text{init}}) = \delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0 \quad (1)$$

また, 境界では流体のスリップはないと仮定する.

$$\delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (2)$$

ラグランジュ座標 $\mathbf{A} \equiv (A_1, A_2, A_3)$ と速度場 $\mathbf{v}$ には

$$\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i = 0 \quad (3)$$

*hiroki@beer.appi.keio.ac.jp

†youhei@appi.keio.ac.jp

の関係がある. 本稿では i は 1, 2, 3 を示す. (2) より速度場 $\mathbf{v}$ は次の境界条件を満たす.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (4)$$

質量保存則はラグランジュ座標 $\mathbf{A}$ を用いて以下のように与えられる.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_{\text{init}}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) J^{-1}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \quad (5)$$

ここで, $\rho_{\text{init}}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))$ は初期時刻での質量密度の分布, J^{-1} は初期時刻からの流体粒子の収縮率 $|\partial(A_1, A_2, A_3)/\partial(x_1, x_2, x_3)|$ を表す. (5) は

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6)$$

と書くこともできる. 一般には, 流体の各場所のエントロピーの時間変化は速度場と散逸関数と熱流によって決まる. これについて完全流体の場合とニュートン流体の場合をそれぞれ第2節, 第3節で議論する. 流体では局所平衡が成立し, 単位質量あたりの内部エネルギー ϵ は ρ と s との関数で与えられる. 熱力学第一法則より, $\delta \epsilon = -p \delta \rho^{-1} + T \delta s$, すなわち,

$$p \equiv \rho^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{と} \quad T \equiv \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_\rho \quad (7)$$

を得る [3]. 下添え字 s と ρ はそれぞれの偏微分で固定される変数を示す. 流体のラグランジアン密度は, 運動エネルギーと内部エネルギーの差

$$\mathcal{L}(\rho, \mathbf{v}, s) \equiv \rho \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \epsilon(\rho, s) \right\} \quad (8)$$

によって与えられ, 作用 I は次のように与えられる.

$$I[\rho, s, \mathbf{v}] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) \quad (9)$$

質量保存則とエントロピーに関する拘束条件の下で作用 (9) の停留条件を求めると流体の運動方程式が定まる. 本稿では完全流体とニュートン流体の場合について議論する.

2 完全流体の場合

完全流体では質量保存と断熱条件の下で作用 (9) の停留条件を解くと, オイラー方程式が得ることができる [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. 断熱条件は,

$$s(\mathbf{x}, t) - s_{\text{init}}(\mathbf{A}) = 0 \quad (10)$$

となる. 拘束条件 (3), (5), (10) を考慮すると, 変分すべき作用はラグランジュ未定乗数法を用いて

$$\begin{aligned} I_{\text{pf}}[\rho, \mathbf{v}, \mathbf{A}, s, \beta, K, \Lambda] \equiv & \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \rho \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) \\ & + K(\rho - \rho_{\text{init}} J^{-1}) + \Lambda(s - s_{\text{init}}) \} . \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ここで, β, K, Λ は未定乗数である. $\beta, K, \Lambda, \rho, s, v, A$ についての変分を求めると, それぞれ (3), (5), (10) と以下の

$$K = -\frac{1}{2}v^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (12)$$

$$\Lambda = \rho T \quad (13)$$

$$v + \beta_i \nabla A_i = 0 \quad (14)$$

と

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \rho v \cdot \nabla \beta_i = -K J^{-1} \frac{\partial \rho_{\text{init}}}{\partial A_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ K \rho_{\text{init}} \frac{\partial J^{-1}}{\partial (\partial A_i / \partial x_j)} \right\} - \Lambda \frac{\partial s_{\text{init}}}{\partial A_i} \quad (15)$$

を得る. ラグランジュ未定乗数法では ρ と s は独立変数として扱うが, ρ_{init} と s_{init} は A の関数として扱われていることに注意. (15) は, (10), (12), (13),

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial (\partial A_i / \partial x_j)} = J^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (16)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial J^{-1}}{\partial (\partial A_i / \partial x_j)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(J^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \right) = 0 \quad (17)$$

を用いて, 次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \rho v \cdot \nabla \beta_i &= \left(\rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \\ &= \left(-\rho \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \end{aligned} \quad (18)$$

(14) を $L_v \equiv \partial_t + \nabla(v \cdot) - v \times \nabla \times$ で微分すると,

$$0 = L_v(v + \beta_i \nabla A_i) \quad (19)$$

$$= L_v v + (\partial_t \beta_i + v \cdot \nabla \beta_i) \nabla A_i + \beta_i \nabla (\partial_t A_i + v \cdot \nabla A_i) \quad (20)$$

となる. (20) の第三項は (3) より消える. 計算の詳細については [2] の付録 A, または [1, 12] が詳しい. (18) を (20) の第二項に代入するとオイラー方程式を得る.

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v + \frac{1}{2} \nabla v^2 - v \times (\nabla \times v) \right\} = -\nabla p \quad (21)$$

本稿では質量保存則と断熱条件として (5) と (10) を用いたが, これらに変えて $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ と $\partial_t s + v \cdot \nabla s = 0$ を使っても同様にオイラー方程式を導出することができる [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. 完全流体の場合は, 質量保存則と断熱条件がホロノミックなのでラグランジュ未定乗数法が使えた. しかしながら, 散逸のある系では, 次節で説明するようにエントロピーに関する拘束条件が非ホロノミックなので, ラグランジュ未定乗数法を使うことはできない.

3 散逸系の場合

散逸系の変分原理の簡単な例として減衰振動子について説明し, その次にニュートン流体の変分原理を議論する.

3.1 減衰振動子

質量 m の錘がばね定数 k のバネに繋がれているとする. 振動子は熱浴の中にあり外部とは断熱壁で遮断されている. 振動子の初期位置を $\mathbf{q}(t_{\text{init}})$ とし, 初期速度を $d\mathbf{q}(t_{\text{init}})/dt = \mathbf{0}$ とする. このとき, 作用は次のように与えられる.

$$I_O[\mathbf{q}, s] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2 - \left(\frac{1}{2} k \mathbf{q}^2 + E(s) \right) \right\} \quad (22)$$

s は熱浴のエントロピーで, 熱浴のエネルギー E はエントロピー s の関数である. 熱浴の温度 T は $T = \partial E / \partial s$ で与えられる. 振動子と熱浴の間には摩擦があり, 振動子は熱浴からの摩擦 $\mathbf{f}$ を受ける. 熱浴のエントロピー s の時間発展は,

$$T \frac{ds}{dt} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0 \quad (23)$$

となる.(23) の時間微分 d/dt を変分 δ に変えると非ホロノミックな拘束条件が得られる.

$$T \delta s + \mathbf{f} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (24)$$

(22) の変分を求めると

$$\left(-m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} - k \mathbf{q} \right) \cdot \delta \mathbf{q} - T \delta s = 0 \quad (25)$$

となり,(24) を代入して次の運動方程式を得る.

$$m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -k \mathbf{q} + \mathbf{f} \quad (26)$$

3.2 ニュートン流体

ニュートン流体では, 粘性応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は次のように与えられる.

$$\sigma_{ij} \equiv \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (27)$$

ζ と η はそれぞれ体積粘性率とずり粘性率であり, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. 流体粒子にかかる摩擦力 $\mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ は,

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (28)$$

となる. 単位体積あたりに発生する熱量は,

$$\Theta \equiv \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (29)$$

となる. その $1/2$ はレイリーの散逸関数と呼ばれる [4]. エントロピーの時間発展方程式は次のようになる.

$$\rho T (\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s) - \Theta + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (30)$$

ここで $\mathbf{w}$ は熱流である.(30) の空間積分を計算すると, 部分積分により第二項は,

$$\int_V d^3\mathbf{x} \{-\Theta\} = \int_V d^3\mathbf{x} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\} \quad (31)$$

となり, 系全体を断熱壁で覆った場合では境界での熱流はゼロになるのでガウスの発散定理により第三項は消え,

$$\int_V d^3\mathbf{x} \{\rho T (\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\} = 0 \quad (32)$$

を得る.(28) を (32) に代入し,(3) より $v_j = -\partial_t A_i / (\partial A_i / \partial x_j)$ を代入し, 時間微分 $\partial/\partial t$ を変分 δ にすることで非ホロノミックな拘束条件を得る.

$$\int_V d^3\mathbf{x} \rho T \delta s = \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \left(\rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_j \right) \cdot \delta A_i \quad (33)$$

ニュートン流体の作用を完全流体の作用 (11) から断熱条件の項を除いたもので与える.

$$\begin{aligned} I_{\text{vf}}[\rho, \mathbf{v}, \mathbf{A}, s, \beta, K] \equiv & \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \rho \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) \\ & + K(\rho - \rho_{\text{init}} J^{-1}) \} \end{aligned} \quad (34)$$

この停留条件を非ホロノミックな拘束条件 (33) のもとで解くと,(3),(5),(12),(14) と

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \beta_i &= \left(\rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} - f_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \\ &= \left(-\rho \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - f_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \end{aligned} \quad (35)$$

を得る.(3),(14) と (35) からナビエストークス方程式を得る.

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right\} = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (36)$$

4 考察

減衰振動子の配位空間上の軌道 $(\mathbf{q}(t), s(t))$ は (23) に従う. その中で、微小に異なる軌道同士で (24) が成立するものがある. 我々はこの非ホロノミックな拘束条件 (24) の下で作用 (25) を最小にする軌道 (26) を求め, これが減衰振動子の運動

方程式になることを示した. 3.2 節では同様にナビエーストックス方程式 (36) を導いた. 本稿で示した変分原理は, より複雑な構造をもつ粘弾性流体や二成分流体についても扱うことができる [1]. さらに複雑な流体の場合についても, 比較的容易に知ることができる内部エネルギーや散逸関数からその運動方程式を導出することが可能であろう. 実際, ソフトマターの分野ではオンサーガの変分原理が使われて成果をあげてきた [13]. この原理に比べて, 対流項も導出できる本研究の方法はより適用範囲が広いと考えている.

謝辞

本稿の研究に関して有益な議論をしてくださった神部勉教授に感謝します. この研究の深川の担当分の一部は KLL 後期博士課程研究助成金, 及び慶應義塾大学グローバル COE プログラムの「環境共生・安全システムデザインの先導拠点」の援助を受け, 藤谷の担当分の一部は慶應義塾学事振興資金の援助を受けました.

参考文献

- [1] H. Fukagawa and Y. Fujitani, arXiv:1104.0866 (2011).
- [2] H. Fukagawa and Y. Fujitani, Prog. Theor. Phys. **124** (2010), 517.
- [3] A. Bennett, *Lagrangian fluid dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006), p. 32.
- [4] H. Goldstein, C. P. Poole and J. L. Safko, *Classical mechanics* (Addison-Wesley, New York, 2001), p. 23.
- [5] H. Bateman, Proc. Roy. Soc. London. A **125** (1929), 598; Scripta Math. **10** (1944), 51; *Partial differential equations* (Dover, New York, 1944), p. 164.
- [6] C. C. Lin, in *International School of Physics Enrico Fermi (XXI)*, ed. G. Careri (Academic Press, New York, 1963), p. 93.
- [7] R. L. Selinger and G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. London. A **305** (1968), 1.
- [8] B. F. Schutz, Jr, Phys. Rev. D **2** (1970), 2762; Phys. Rev. D **4** (1971), 3559.
- [9] R. Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20** (1988), 225.
- [10] T. Kambe, Fluid Dyn. Res. **39** (2007), 98; Fluid Dyn. Res. **40** (2008), 399; Physica D **237** (2008), 2067; *Geometrical theory of dynamical systems and velocity field*, Revised ed., (World Scientific, Singapore, 2010), p. 189.

- [11] Z. Yoshida, *Proc. Int. Symp. Contemporary Physics*, ed. J. Aslam, F. Hussain and Riazuddin (World Scientific, Singapore, 2008), p. 125; *J. Math. Phys.* **50** (2009), 113101.
- [12] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980), p. 181.
- [13] M. Doi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **78** (2009), 052001.