

同じ曲率を持つ空間型の間の特異点を 許容する等長はめ込み*

横浜国立大学・大学院工学研究院 本田 淳史†

Atsufumi Honda
Faculty of Engineering,
Yokohama National University

概要

波面とは、特異点を許容する(超)曲面のクラスである。波面の内在的な構造をモデルとした連接接束はリーマン多様体の特異点を許容する概念とみなすことができる。本稿では、そのような連接接束に「空間形」の概念を導入し、同じ曲率を持つ空間形の間の特異点を許容する等長はめ込みを波面の枠組みで定式化し、それらの分類や性質を調べた結果を紹介する [8, 9].

1 波面と連接接束

1.1 波面

向き付けられたリーマン多様体 (N^{n+1}, h) に対して、その単位接束を T_1N^{n+1} で表す。可微分多様体 M^n からの滑らかな写像

$$f : M^n \longrightarrow (N^{n+1}, h)$$

が**波面** (wave front, **フロント**) であるとは、各点 $p \in M^n$ に対して、その近傍 U で定義された f に沿う滑らかな N^{n+1} の単位ベクトル場 ν が存在して

$$L := (f, \nu) : U \longrightarrow T_1N^{n+1}$$

*RIMS 共同研究 (公開型)「部分多様体論の潮流」(代表者: 川上 裕 (金沢大学))

†本研究は科研費 (課題番号:16K17605) の助成を受けたものである。

が Legendre はめ込みとなるときをいう。ここで L が Legendre であることは、任意の $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ に対して $h(f_*X, \nu) = 0$ となることと同値である¹。このとき ν は単位法線ベクトル場と呼ばれる。また、 L が単に Legendre 写像である場合には f を波面的 (frontal, フロントラル) と呼ぶ。 f がはめ込み (超曲面) ならば波面となるが、波面ははめ込みでない点を許容する。 f が $p \in M^n$ においてはめ込みでないとき、 p を**特異点**と呼ぶ。

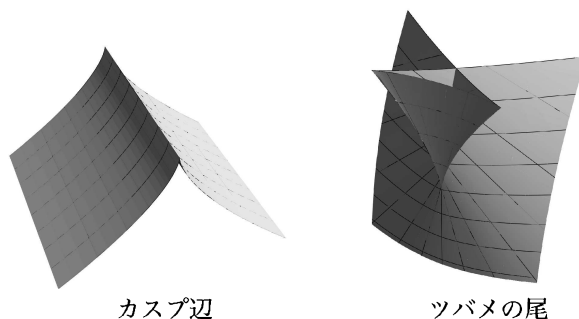


図 1: 波面に現れる特異点 ($n = 2$ の場合).

単位法線ベクトル場 ν が M^n 上で矛盾なく定義されるとき、 f は**余向き付け可能**と呼ばれ、 M^n が向き付け可能であるとき f を**向き付け可能**と呼ぶ。 f がはめ込みである場合は、余向き付け可能性と向き付け可能は同値であるが、一般にはそれらは独立である。

1.2 連接接束

Saji-Umehara-Yamada は波面の内在的な構造の定式化として、連接接束を導入した。

定義 1 (Saji-Umehara-Yamada [22, 24]). $\mathcal{E}$ を n 次元可微分多様体 M^n 上の階数 n のベクトル束とする。また、 $\mathcal{E}$ 上に計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、それに両立する接続 D が与えられているとする。ベクトル束準同型 $\varphi: TM \rightarrow (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D)$ は

$$D_X \varphi(Y) - D_Y \varphi(X) - \varphi([X, Y]) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$$

を満たすとき、 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ を**連接接束**と呼ぶ。

¹ $\mathfrak{X}(M^n)$ で M^n 上の滑らかなベクトル場全体を表す。

ここで、リーマン多様体 (M, g) に対して、 $\mathcal{E} := TM^n$, $\langle, \rangle := g$, D を Levi-Civita 接続, $\varphi := \text{Id}_{TM^n}$ と定めると $(\mathcal{E}, \langle, \rangle, D, \varphi)$ は接続接束となる。つまり、接続接束はリーマン多様体の一般化にあたる概念である。さらに、波面、より一般にフロンタルは接続接束を自然に誘導する。

例 2 ([24, Example 2.4]). フロンタル $f : M^n \rightarrow (N^{n+1}, h)$ に対し、

- $\mathcal{E}_f$ を引き戻し束 f^*TN^{n+1} の ν の直交補空間で定る部分束,
- $\varphi_f : TM^n \rightarrow \mathcal{E}_f$ を $\varphi_f(X) := df(X)$ とし,
- D を N^{n+1} の Levi-Civita 接続の接成分,
- $\langle, \rangle$ を N^{n+1} から $\mathcal{E}_f$ へ誘導される計量

とする。このとき、 $\mathcal{E}_f = (\mathcal{E}_f, \langle, \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束である。 $\mathcal{E}_f$ をフロンタル f の誘導接続接束と呼ぶ。

接続接束が余向き付け可能であるとは、 $\mathcal{E}$ がベクトル束として向き付け可能なときをいう。誘導接続接束 $\mathcal{E}_f$ が余向き付け可能であることと、フロンタル f が余向き付け可能であることは同値である。

以後、 (N^{n+1}, h) を断面曲率が一定値 c である単連結な空間形 $\Sigma^{n+1}(c)$ とする。つまり、

- $c = 1$ の場合は単位球面 $\Sigma^{n+1}(1) = S^{n+1}$,
- $c = 0$ の場合はユークリッド空間 $\Sigma^{n+1}(0) = \mathbf{R}^{n+1}$,
- $c = -1$ の場合は双曲空間 $\Sigma^{n+1}(-1) = H^{n+1}$

を表す。

事実 3 ([23, Proposition 2.4]). フロンタル $f : M^n \rightarrow \Sigma^{n+1}(c)$ に沿う単位法線ベクトル場を ν とする。 f の誘導接続接束を $(\mathcal{E}_f, \langle, \rangle, D, \varphi_f)$ とするとき、

$$\langle R^D(X, Y)\xi, \zeta \rangle = c \left| \begin{array}{cc} \langle \varphi_f(Y), \xi \rangle & \langle \varphi_f(Y), \zeta \rangle \\ \langle \varphi_f(X), \xi \rangle & \langle \varphi_f(X), \zeta \rangle \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \langle d\nu(Y), \xi \rangle & \langle d\nu(Y), \zeta \rangle \\ \langle d\nu(X), \xi \rangle & \langle d\nu(X), \zeta \rangle \end{array} \right|$$

が成り立つ (*Gauss* 方程式と呼ばれる)。ただし、 $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, ξ, ζ は $\mathcal{E}_f$ の滑らかな切断で、 R^D は接続 D の曲率テンソル

$$R^D(X, Y)\xi := D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi$$

とする。

2 空間形タイプの接続接束

可微分多様体 M^n 上の接続接束 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \langle, \rangle, D, \varphi)$ に対し, $g_\varphi := \varphi^* \langle, \rangle$ は半正定値計量となる. 接続接束が完備であるとは, M^n 上の対称 $(0, 2)$ -テンソル T で, コンパクトな台を持ち,

$$g_\varphi + T$$

が完備なリーマン計量を与えるようなものが存在するときをいう². さらに, 定曲率リーマン多様体のリーマン曲率テンソルの形を参考にして, 次のように接続接束に定曲率性を導入する.

定義 4 ([8]). 実数 k に対し, 接続接束 $(\mathcal{E}, \langle, \rangle, D, \varphi)$ が定曲率 k を持つとは,

$$R^D(X, Y)\xi = k(\langle \varphi(X), \xi \rangle \varphi(Y) - \langle \varphi(Y), \xi \rangle \varphi(X))$$

が成り立つときをいう (ただし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, ξ は $\mathcal{E}$ の切断). 定曲率 k を持つ完備な接続接束を空間型タイプと呼ぶ.

線形写像 $\varphi_p: T_p M^n \rightarrow \mathcal{E}_p$ が単射でないとき, $p \in M^n$ を特異点と呼ぶ. 特異点集合 S_φ が空の場合には, 空間型タイプの接続接束はリーマン多様体としての空間形とみなすことができる. しかし, $S_\varphi \neq \emptyset$ の場合には球面上に平坦³な接続接束構造が入る.

例 5 ([8]). 写像 $f_E: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f_E(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n, 0)$$

とする. ただし, $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ としている (cf. 図 2). f_E の特異点集合 S_{f_E} は赤道 $S_{f_E} = \{x \in S^n; x_{n+1} = 0\}$ で与えられる. 定値写像 $\nu := (0, \dots, 0, 1)$ は f_E に沿う単位法線ベクトル場を与えるため, f_E は余向き付け可能なフロントルである (波面ではない). 例 2 のように定まる誘導接続接束 $\mathcal{E}_{f_E} = (\mathcal{E}_{f_E}, \langle, \rangle, D, \varphi_{f_E})$ は, 完備かつ平坦となる. 平坦性は Gauss 方程式から確かめられる (cf. 補題 6).

より一般に, フロントルに対する Gauss 方程式から次がわかる:

補題 6 ([8]). フロントル $f: M^n \rightarrow \Sigma^{n+1}(c)$ に対し, ν を単位法線ベクトル場とする. このとき, f の誘導接続接束 $\mathcal{E}_f$ が定曲率 c を持つことと, $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ が M^n 上で成り立つことは同値である.

² フロントル, より一般に可微分写像 $f: M^n \rightarrow (N^{n+1}, h)$ の完備性も第 1 基本形式 $ds^2 := f^*h$ に対する同様の条件を用いて定義される. このような完備性は, ミンコフスキー空間の極大曲面 [12, 25], 平坦波面 (H^3 の場合 [13], $\mathbf{R}^3$ の場合 [16]) に用いられている.

³ 定曲率 $k = 0$, つまり $R^D = 0$ のこと.

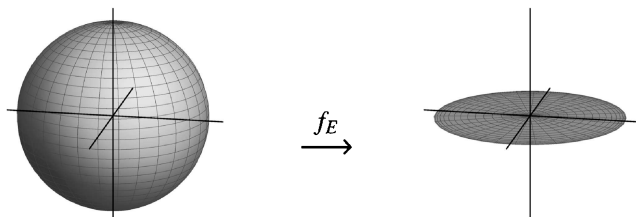


図 2: フロント f_E の像 (cf. 例 5). S^n 上の誘導連接接束 $\mathcal{E}_{f_E}$ は平坦である.

3 波面としての空間形の等長はめ込み

定曲率 c の単連結な n 次元空間型 $\Sigma^n(c)$ の $\Sigma^{n+1}(c)$ への等長はめ込みを考える. そのような等長はめ込みは

- $c = 0$ の場合, 完備な平面曲線上の柱面 (Hartman-Nirenberg の定理 [3]),
- $c > 0$ の場合, 全測地的 (O'Neill-Stiel の定理 [20])

に限る⁴. とくに $n = 2, c = 0$ の場合, $\mathbf{R}^2$ の $\mathbf{R}^3$ への等長はめ込みは $\mathbf{R}^3$ の完備な平坦曲面と同値である. つまり, 完備かつ平坦な正則曲面は柱面となるが, 特異点を許容すると非自明な例が豊富に存在する.

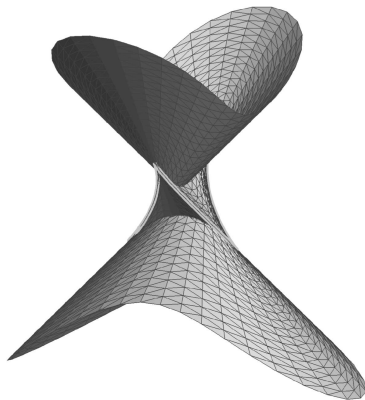


図 3: $\mathbf{R}^3$ の埋め込まれたエンドを持つ完備な平坦波面. カスプ辺でない特異点は全てツバメの尾であり, その個数は 4 つである. したがって, 事実 7 にある評価は最良である.

⁴ $c < 0$ の場合, 非自明な例が豊富に存在する [19]. 分類については Abe-Mori-Takahashi [1] を参照 (cf. [6]).

Murata-Umehara は $\mathbf{R}^3$ の完備な平坦波面の分類を与え、向き付け可能性と余向き付け可能を示した。さらに、埋め込まれたエンドを持つものは4頂点定理に類する性質を持つことを示した [16].

事実 7 ([16]). 連結な2次元多様体 M^2 に対し, $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を完備な平坦波面で, 特異点集合が空でないものとする. このとき, f は臍点を持たず向き付け可能であり, かつ余向き付け可能である. また, ある変曲点を持たない正則閉曲線 $\xi: S^1 \rightarrow S^2$ と S^1 上の1次微分形式 $\alpha = a(t) dt$ で $\int_{S^1} \xi \alpha = 0$ を満たすものが存在して, f は

$$f_{\alpha, \xi}(t, v) := v \xi(t) + \sigma(t) \quad \left(\sigma(t) := \int_0^t a(t) \xi(t) dt \right)$$

で定まる写像 $f_{\alpha, \xi}: S^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ と合同である. 逆に, このような $f_{\alpha, \xi}$ は特異点集合が空でない完備な平坦波面を与える. さらに, f の全てのエンドが埋め込みであるならば, f のカスパ辺でない特異点は少なくとも4つ存在する.

これらの結果を通して, 高次元の場合や平坦でない場合には何が起こるのかという自然な疑問が生じる.

3.1 高次元の平坦波面

筆者は論文 [9] において, $n = 2$ の場合とは異なり, $n \geq 3$ の場合には非自明な完備平坦波面 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は存在せず, それらは柱面に限ることを示した.

定理 8 ([9]). $n \geq 3$ のとき, $\mathbf{R}^{n+1}$ の完備な平坦波面は特異点を許容しない. したがって, それらは柱面に限る.

したがって, Hartman–Nirenberg [3], Murata–Umehara [16] の結果と定理 8 をまとめると, 以下のように $\mathbf{R}^{n+1}$ の完備な平坦波面の分類表が得られる.

	特異点集合 = $\emptyset$	特異点集合 $\neq \emptyset$
$n = 2$	柱面	$\exists \infty$ (Murata–Umehara [16])
$n \geq 3$	(Hartman–Nirenberg [3])	存在しない ([9])

表 1: $\mathbf{R}^{n+1}$ の完備な平坦波面.

定理 8 の証明は, 平坦波面の臍点でない点の近傍において, S^n の正則曲線から平坦波面を構成する以下の明示的な公式を用いる:

命題 9 ([9]). 平坦波面 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は全臍的でなく、弱完備であるとする。各非臍点に対し、ある開区間 I と局所座標系 $(I \times \mathbf{R}^{n-1}; t, w_2, \dots, w_n)$, 単位速度を持つ正則曲線 $\gamma: I \rightarrow S^n$ とその法束 $(\gamma')^\perp$ の正規直交フレーム $\{e_2, \dots, e_n\}$, さらに I 上の滑らかな関数 $a(t)$ が存在して、 f は $I \times \mathbf{R}^{n-1}$ 上で

$$(3.1) \quad f(t, w_2, \dots, w_n) = \hat{\sigma}(t) + \sum_{j=2}^n w_j e_j(t) \quad \left(\hat{\sigma}(t) := \int_0^t a(\tau) \gamma'(\tau) d\tau \right)$$

と表される。逆に、開区間 I 上の与えられた滑らかな関数 $a(t)$ と、単位速度を持つ正則曲線 $\gamma: I \rightarrow S^n$ とその法束 $(\gamma')^\perp$ の正規直交フレーム $\{e_2, \dots, e_n\}$ に対し、式 (3.1) により定義される $f: I \times \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は臍点を持たない平坦波面である。

もし完備な平坦波面があったとすると、それは弱完備なので、表現公式 (3.1) を用いることができる。このとき、リフト計量 $ds_\#^2$ の測地線を計算することで、 $n \geq 3$ の場合には f の特異点集合は非有界な像を持つ測地線を含むことがわかる。これは完備性に矛盾するため、結果として $n \geq 3$ の場合には、完備な平坦波面で特異点集合が空でないものは存在しないことがわかる。

3.2 正定曲率を持つ完備な波面の分類

筆者は論文 [8] において、O'Neill-Stiel の定理 [20] の波面の枠組みでの一般化を与えた。つまり、正曲率の空間形タイプの連接接束の球面への等長実現を分類した：

定理 10 ([8]). 正定曲率 $c > 0$ の球面を $S^{n+1}(c)$, M^n を連結な n 次元可微分多様体、 $f: M^n \rightarrow S^{n+1}(c)$ を波面とする。もし誘導連接接束 $\mathcal{E}_f$ が定曲率 c の空間型タイプならば、 f は全測地的もしくは $S^{n+1}(c)$ の正則閉曲線の半径 $\pi/(2\sqrt{c})$ のチューブである。とくに、 M^n は S^n もしくは $S^1 \times S^{n-1}$ と微分同相であり、向き付け可能である。

定理 10 において相似変換により $c = 1$ として一般性を失わず、定理 10 は単位球面 S^{n+1} の全測地的でない定曲率 1 の完備な波面は正則閉曲線の半径 $\pi/2$ のチューブであることを主張する。Murata-Umehara の結果により $n = 2, c = 0$ の場合は余向き付け可能性も成り立つが、定理 10 からは $n = 2, c = 1$ の場合は余向き付け可能かどうかは不明である。実際、そのような波面で余向き付け不可能な例が存在し (図 4 参照)、余向き付け不可能である必要十分条件は中心曲線が半

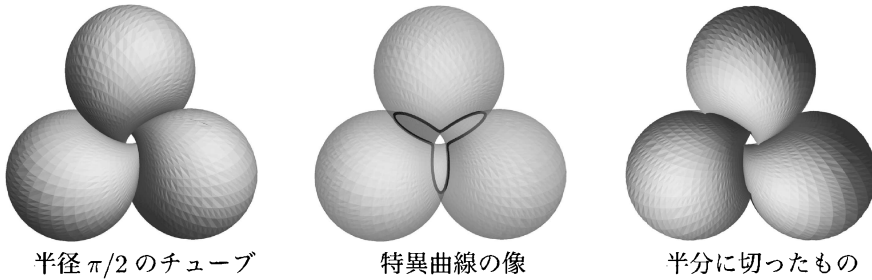


図 4: S^3 の余向き付け不可能な定曲率 1 の完備な波面. 中心曲線は曲率 $\kappa = 4/3$, 捩率 $\tau = 5/3$ の常螺旋であり, 半周期的となる. 特異曲線の像も常螺旋となり, 特異点は全てカスプ辺である.

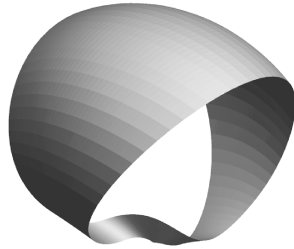


図 5: S^3 の向き付け不可能な定曲率 1 の波面 (cf. [26, 14, 17]).

周期的であることもわかる [8]. また, 完備性を外すと向き付け不可能な例も存在する (図 5, Naokawa [18] を参照).

完備な正則曲線 $\gamma(s) : \mathbf{R} \rightarrow S^{n+1}$ (s は弧長パラメータ) に対し, その半径 $\pi/2$ のチューブ $T(\gamma) := \{p \in S^{n+1}; \text{dist}_{S^{n+1}}(p, \gamma) = \pi/2\}$ は次の写像で計数付けられる:

$$f(s, \mathbf{x}) := x_1 e_1(s) + \cdots + x_n e_n(s).$$

ここで, $s \in \mathbf{R}$ で, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, さらに, $e_1, \dots, e_n$ は $\gamma(s)$ の法束の正規直交フレーム, つまり $\{\gamma, \gamma', e_1, \dots, e_n\}$ が $\gamma(s)$ に沿う $\text{SO}(n+2)$ の正規直交フレームとなるように定める. $T(\gamma) = T(-\gamma)$ から, $\gamma(s)$ もしくは $-\gamma(s)$ のことを中心曲線と呼ぶ. Bishop フレーム [2] をとることで, 各 $s \in \mathbf{R}$ に対してある $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ が存在して $p = (s, \mathbf{x})$ が f の特異点となることを示すことができる. これを用いると以下が成り立つ.

命題 11 ([8]). 完備な正則曲線 $\gamma(s) : \mathbf{R} \rightarrow S^{n+1}$ の半径 $\pi/2$ のチューブは, 臍点

を持たない弱完備⁵な定曲率1の波面となる。もし、 f が完備ならば中心曲線は閉曲線となり、余向き付け不可能ならば半周期的⁶となる。

実際、 $\nu := \gamma(s)$ は f の単位法線ベクトル場を与え、 $\gamma(s)$ の正則性から $\text{rank}(d\nu) = 1$ となる。補題6により f は定曲率1となることがわかる。

以下、定理10の証明の概略を紹介する。補題6により、単位球面 S^{n+1} の全測地的でない $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ を満たす完備な波面が正則閉曲線の半径 $\pi/2$ のチューブであることを示せばよい。以後、 $f: M^n \rightarrow S^{n+1}$ を全測地的でない完備かつ余向き付け可能な波面で $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ を満たすものとする。

波面 f の臍点 $p \in M^n$ とは、ある同時に0にならない実数の組 (δ_1, δ_2) が存在し、 $\delta_1(df)_p = \delta_2(d\nu)_p$ となるときをいう。もし特異点 p が臍点ならば、 $(df)_p = 0$ となる。一方、 $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ が成り立つことから、点 p が臍点である必要十分条件は $(d\nu)_p = 0$ となる。したがってこの場合、全測地的であることと全臍的であることは同値である。つまり、次がわかる。

補題 12. S^{n+1} の定曲率1の波面の臍点は正則点である。

いま、 $f: M^n \rightarrow S^{n+1}$ は全測地的、つまり全臍的でないので、臍点集合を $\mathcal{U}_f$ とすると、非臍点集合 $M^n \setminus \mathcal{U}_f$ は空でない。

補題 13. 各非臍点 $q \in M^n \setminus \mathcal{U}_f$ に対して、その座標近傍 $(U; u_1, \dots, u_n)$ と滑らかな関数 $\rho: U \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して

$$-\rho \nu_{u_1} = f_{u_1}, \quad \nu_{u_1} \neq 0, \quad \nu_{u_j} = 0, \quad \langle \nu_{u_1}, f_{u_j} \rangle = 0$$

が各 $j = 2, \dots, n$ に対して成り立つ。

これにより、臍点のない定曲率1波面は $(n-1)$ 次元の大球面による葉層構造を持つことがわかり、したがって f は臍点のないところでは半径 $\pi/2$ のチューブとなることがわかる。さらに、 f の正則点集合上での主曲率は $1/\rho, 0, \dots, 0$ となることもわかる。 ρ は曲率半径関数と呼ばれる。

正則曲線 $\sigma(t): \mathbf{R} \supset I \rightarrow M^n$ は、 $d\nu(\sigma'(t)) = 0$ となるとき、漸近線と呼ばれる。波面であることから $d\nu(\sigma'(t)) \neq 0$ となるため、 t を弧長パラメータに取り替えることができる。補題13を用いると、次が成り立つ。

⁵波面 $f: M^n \rightarrow S^{n+1}$ に対して、その Legendre リフト L による誘導計量 $ds_{\#}^2 := ds^2 + \langle d\nu, d\nu \rangle$ は Riemann 計量となる。 $ds_{\#}^2$ が完備のとき、 f を弱完備と呼ぶ。完備な波面は弱完備であることが知られている (Murata-Umehara [16])。

⁶周期 $L > 0$ の閉曲線 γ が半周期的であるとは、 $\gamma(s + L/2) = -\gamma(s)$ が全ての s に対して成り立つときをいう。

補題 14. 各非臍点 $q \in M^n \setminus \mathcal{U}_f$ を通る漸近線 $\sigma(t) : I \rightarrow M^n$ に対して, $\rho''(t) = -\rho(t)$ ($\rho(t) := \rho|_{\sigma(t)}$) が成り立つ. さらに, $\sigma(t)$ は $\mathcal{U}_f$ には集積しない.

補題 14 により, 各漸近線上で曲率半径関数 ρ はある定数 $a, b \in \mathbf{R}$ を用いて $\rho(t) = a \cos t + b \sin t$ と表すことができる. ここで, 各漸近線はリフト計量 $ds_{\#}^2$ の測地線であることがわかり, (弱) 完備性から $\sigma(t)$ は全ての $t \in \mathbf{R}$ に対して定義される. したがってとくに, $\rho(t_0) = 0$ となる t_0 が存在することがわかる.

補題 15. f は臍点を持たない.

この補題を示すことができれば, 定理 10 はほぼ証明される. 補題 15 の証明の概略を紹介する. 臍点を持つと仮定する. $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{U}_f$ が閉集合であることから $q \in \partial \mathcal{U}_f$ をとることができる. このとき, 非臍点集合内の点列 $\{q_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ となるものがとれる. $\sigma_n(t)$ を各 q_n を通る漸近線とする. 補題 14 により, 各 $\sigma_n(t)$ 上で $\rho(\sigma_n(t_n)) = 0$ となる t_n がとれる. つまり, $Q_n := \sigma_n(t_n)$ は特異点である. $\{Q_n\}$ の適当な部分列をとることで, $Q_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \in \partial \mathcal{U}_f$ となるが, Q_∞ は特異点かつ臍点となり, 補題 12 に矛盾する. したがって, f は臍点を持たないことがわかる.

定理 10 の系として, 完備な定曲率 c の波面の焦面の性質を調べることができる. ここで焦面とは, 平行波面の特異点の軌跡として与えられる.

定理 16 ([8]). M^n を連結な n 次元可微分多様体, $f : M^n \rightarrow S^{n+1}(c)$ を全測地的でない完備な定曲率 c の波面とする. このとき, f の焦面 C_f も全測地的でない連結かつ完備な定曲率 c の波面となる. さらに, f が余向き付け可能ならば, C_f もそうである.

一般には, 連結な波面の焦面は連結になるとは限らないが, 今回の場合は焦面をとる操作で連結性や完備性, 余向き付け可能性が保たれることがわかる.

参考文献

- [1] K. Abe, H. Mori and H. Takahashi, *A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces*, Geom. Dedicata **65** (1997), 31–46.
- [2] R.L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 246–251.
- [3] P. Hartman and L. Nirenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901–920.

- [4] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, *Selecta Mathematica* **20** (2014), 769–785.
- [5] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, *Internat. J. Math.* **26** (2015), 1540008, 34 pp.
- [6] A. Honda, *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, *Tohoku Math. J. (2)* **64** (2012), 171–193.
- [7] A. Honda, *Weakly complete wave fronts with one principal curvature constant*, *Kyushu J. Math.* **70** (2016) 217–226.
- [8] A. Honda, *Isometric immersions with singularities between space forms of the same positive curvature*, *J. Geom. Anal.* **27** (2017), 2400–2417.
- [9] A. Honda, *Complete flat fronts as hypersurfaces in Euclidean space*, preprint (arXiv:1709.02178).
- [10] S. Izumiya, T. Nagai and K. Saji, *Great circular surfaces in the three-sphere*, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409–425.
- [11] Y. Kitagawa and M. Umehara, *Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3* , *Geom. Dedicata* **155** (2011), 105–140.
- [12] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with conelike singularities*, *J. Math. Soc. Japan* **36** (1984), 609–617.
- [13] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *An elementary proof of Small's formula for null curves in $PSL(2, C)$ and an analogue for Legendrian curves in $PSL(2, C)$* , *Osaka J. Math.* **40** (2003), 697–715.
- [14] Y. Kurono and M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in $\mathbf{R}^3$ whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, *Geom. Dedicata* **134** (2008), 109–130.
- [15] William S. Massey, *Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space*, *Tôhoku Math. J. (2)* **14** (1962), 73–79.
- [16] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, *J. Differential Geom.* **82** (2009), 279–316.

- [17] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. Math. **50**, 425–437 (2013).
- [18] K. Naokawa, *Extrinsically flat Möbius strips on given knots in 3-dimensional spaceforms*, Tohoku Math. J. (2) **65** (2013), 341–356.
- [19] K. Nomizu, *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, Math. Ann. **205** (1973), 181–192.
- [20] B. O’Neill and E. Stiel, *Isometric immersions of constant curvature manifolds*, Michigan Math. J. **10** (1963), 335–339.
- [21] P. Roitman, *Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics*, Tohoku Math. J. (2) **59** (2007), 21–37.
- [22] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491–529.
- [23] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_2 -singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space*, Kodai Math. J. **34** (2011), 390–409.
- [24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 383–409.
- [25] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [26] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.