

W 代数の自由場実現

京都大学・数理解析研究所 元良 直輝*

Naoki Genra

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 研究の背景

W 代数とは、複素有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数 $\mathfrak{g}$, その (even な) べき零元 f , 複素数 k , そして f に関して良い条件を満たす $\mathfrak{g}$ の半整数次数付け (good grading と呼ばれる) Γ によって定まるスーパー頂点代数の族である。これを

$$W^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$$

と表す (詳しくは 2 章参照)。 k を W 代数のレベルと呼び, 特に $h^\vee$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数とすると, $k = -h^\vee$ のときを臨界レベルという。 k が非臨界レベル ($k \neq -h^\vee$) のとき, W 代数は共形ベクトルをもち, 共形的なスーパー頂点代数となる。 $\mathfrak{g}, f$ が与えられたとき, Γ は少なくとも一つ存在し, しかも Γ の選び方によらず W 代数は同じスーパー頂点代数構造をもつ。ただし共形ウェイトは Γ の選び方に依存する。

W 代数は数多くの数学的にも物理的にも重要なスーパー頂点代数をその例として含んでいる。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ かつ f が正則べき零元ののとき Virasoro 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ かつ f が副正則べき零元ののとき Bershadsky-Polyakov 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2)$ かつ f が正則べき零元ののとき Super Virasoro 代数 ($N=1$ スーパーコンフォーマル代数), $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1, 2)$ かつ f が正則べき零元ののとき $N=2$ スーパーコンフォーマル代数などがある。

初めて W 代数を導入したのは Zamolodchikov [12] である。彼は二次元共形場理論の研究の中で, Virasoro 代数の一般化の一つとして, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ かつ f が正則べき零元ののときに対応する W 代数を構成した。その後 Fateev と Lukyanov [3] によって A_n, B_n, D_n 型の W 代数と呼ばれるものが定義され, Feigin と Frenkel [5] によって一般の単純リー代数 $\mathfrak{g}$ (かつ f はその正則べき零元) に対応する W 代数が定義された。それから de Boer と Tjin によるさらなる一般化を経て, 最終的に最も一般的な定義は, Kac, Roan, 脇本らによって与えられた [9]。

注意しなければならないのは, Fateev と Lukyanov は W 代数をスクリーニング作用素と呼ばれる線形作用素を用いて, Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として構成したが, Feigin と Frenkel は (一般化のために) BRST コホモロジーを用いて W 代数を構成したという点である。BRST コホモロジーを用いた構成はさらなる一般化に向いていたため, その後の W 代数の定義には BRST コホモロジーが用いられた。すると Fateev と Lukyanov による構成は, Feigin と Frenkel 以降の

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\mathcal{W}$ 代数の定義と一致しているのか、という問題が残る。以降、二つの構成を区別するために、BRST コホモロジーによって構成された $\mathcal{W}$ 代数を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ と表すことにする。次の結果は Feigin と Frenkel による。

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [4][7]). $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー代数, f をその正則べき零元, Γ をその (唯一の) good grading とする. k が generic のとき, BRST コホモロジーによって定義された $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の双対 $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{g}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz,$$

ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha_i(z)$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルート α_i に対応する Heisenberg 頂点代数の場であり, $\int \cdot dz$ は形式的に z^{-1} の係数をとる操作を表す。

上式の $\int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz$ は Heisenberg 頂点代数からその加群への線形作用素で、これがスクリーニング作用素である。このスクリーニング作用素による構成を $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現という。この定理より、Fateev と Lukyanov の A_n, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は、 A_n, D_n 型の単純リー代数とその正則べき零元に付随する BRST コホモロジーによって定義された $\mathcal{W}$ 代数と一致することがわかる。したがって BRST コホモロジーによる $\mathcal{W}$ 代数の構成は、スクリーニング作用素による構成の一般化になっている。

しかしながら、実は Fateev と Lukyanov の構成した B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は、 B_n 型の単純リー代数に付随する $\mathcal{W}$ 代数と一致しないことが知られている。 B_n 型の単純リー代数に限らず、一般の単純リー代数 (とそのべき零元) に付随する $\mathcal{W}$ 代数は頂点代数となるが、Fateev と Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数はスーパー頂点代数になることから分かる。以降、区別するため Fateev と Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数を、彼らの表記に倣って $\mathcal{WB}_n$ と表す。 $\mathcal{WB}_n$ 代数は n だけではなくパラメータ $\gamma \in \mathbb{C}$ にもよっている (詳しくは 3 章参照)。 $\mathcal{WB}_1$ は Super Virasoro 頂点代数であり、これはスーパーリー代数 $\mathfrak{osp}(1, 2)$ とその (even part の) 正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致する。一般には次の予想がある。

予想 1.2. $\mathcal{WB}_n$ 代数は $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ とその (even part の) 正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致する。

本稿の研究のきっかけは予想 1.2 にある。この予想を証明するために、まず定理 1.1 を拡張した。実際には一般の $\mathfrak{g}, f$ に対して定理 1.1 は拡張できる (定理 5.2)。特に Γ として特別な条件を満たすものがとってこれるときには、 $\mathcal{W}$ 代数の新しい自由場実現を与えてくれる (定理 5.3)。この結果を用いて、予想 1.2 は (非臨界レベルのとき) 証明される (定理 6.1)。一方で定理 5.3 より一般的な結果である定理 5.2 には、それとは別の応用がある。それがもう一つの結果である定理 6.2 である。定理 6.2 は Feigin と Semikhatov [6] によって導入された $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数と呼ばれる頂点代数が $\mathfrak{sl}_n$ とその副正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数と一致することを示す。この証明には本質的に $\mathcal{W}$ 代数がスクリーニング作用素の核の形で実現されることが使われる。本稿ではこれらの結果をまとめて報告する。

2 $\mathcal{W}$ 代数

Kac, Roan, 脇本らによる $\mathcal{W}$ 代数の定義を与える。 $\mathfrak{g}$ を複素有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数とする。このとき $\mathfrak{g}$ は非退化 even 超対称不変双線形式 $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$

をもつ. そこで (even な) 長ルートに対して長さの二乗が 2 となるように正規化したものをとる. $\mathfrak{g}$ は一般にスーパーベクトル空間であり,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

なる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けをもつ. これをパリティという. ただし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ とする. $\mathfrak{g}_0$ を $\mathfrak{g}$ の even part, $\mathfrak{g}_1$ を $\mathfrak{g}$ の odd part という. f を $\mathfrak{g}$ の even part のべき零元, k を複素数とする. また

$$\Gamma: \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

を $\mathfrak{g}$ の (スーパーリー代数としての) 次数付けであって, $f \in \mathfrak{g}_{-1}$ かつ $f: \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射, $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射となるものとする. これを $\mathfrak{g}$ の f に関する good grading と呼ぶ. 例えば, $\{e, h, f\}$ を f を含む $\mathfrak{sl}_2$ -triple とすると $\text{ad}(\frac{1}{2}h)$ は $\mathfrak{g}$ に $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付けを与えるが, これは good grading になっている (これを Dynkin grading と呼ぶ). $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数, Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系, Π をその単純ルートの集合であって,

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0, \quad \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}$$

となるようにとる (いつでもこのようにとれる). ただし Δ_+ は正ルートの集合, $\mathfrak{g}_\alpha$ は α のルートベクトル空間である. $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して,

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}, \quad \Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$$

とすると, Γ の満たす条件から

$$\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_{\frac{1}{2}} \cup \Pi_1$$

となることが知られている. $\alpha \in \Delta$ に対してルートベクトル e_α を一つとっておく. $\bar{\alpha}$ で e_α のパリティを表す. $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ に対し, $c_{\alpha, \beta}^\gamma$ で構造定数を表す. また

$$I = \{1, \dots, l\}, \quad l = \text{rank } \mathfrak{g}$$

として, $\{e_i\}_{i \in I}$ を $\mathfrak{h}$ の基底とする. さらに, $V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアファインスーパー頂点代数 (affine vertex superalgebra), F^{ch} を $\mathfrak{g}_{>0}$ に付随するチャージフェルミオンスーパー頂点代数 (charged fermion vertex superalgebra), F^{ne} を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ に付随する中立フェルミオンスーパー頂点代数 (neutral fermion vertex superalgebra) とする. $V^k(\mathfrak{g})$ の生成する場を $u(z)$ ($u \in \mathfrak{g}$) とすると, $u, v \in \mathfrak{g}$ に対して

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u, v](w)}{z-w} + \frac{k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ. F^{ch} の生成する場を $\varphi_\alpha(z), \varphi^\alpha(z)$ ($\alpha \in \Delta_{>0}$) とすると, これらは e_α のパリティとは逆のパリティ ($\bar{e}_\alpha + \bar{1}$) をもち, $\alpha, \beta \in \Delta_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w) &\sim \frac{\delta_{\alpha, \beta}}{z-w}, \\ \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w) &\sim 0 \sim \varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w) \end{aligned}$$

が成り立つ. F^{ne} の生成する場を $\Phi_\alpha(z)$ ($\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}$) とすると, これは e_α と同じパリティをもち, $\alpha, \beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}$ に対して

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{\chi([e_\alpha, e_\beta])}{z-w}$$

が成り立つ. ただし $u \in \mathfrak{g}$ に対して, $\chi(u) = (f|u)$ とする. このとき, スーパー頂点代数 $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ を

$$C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = V^k(\mathfrak{g}) \otimes F^{\text{ch}} \otimes F^{\text{ne}}$$

で定義する. また $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ 上の odd な場 $d(z)$ を

$$d(z) = d_{\text{st}}(z) + d_{\text{ne}}(z) + d_\chi(z),$$

ただし

$$\begin{aligned} d_{\text{st}}(z) &= \sum_{\alpha \in \Delta_{>0}} (-1)^{\tilde{\alpha}} : e_\alpha(z) \varphi^\alpha(z) : - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_{>0}} (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} c_{\alpha, \beta}^\gamma : \varphi_\gamma(z) \varphi^\alpha(z) \varphi^\beta(z) :, \\ d_{\text{ne}}(z) &= \sum_{\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}} : \varphi^\alpha(z) \Phi_\alpha(z) :, \\ d_\chi(z) &= \sum_{\alpha \in \Delta_{>0}} \chi(e_\alpha) \varphi^\alpha(z) \end{aligned}$$

とする. すると

$$d(z)d(w) \sim 0$$

となり, したがって $[d_{(0)}, d_{(0)}] = 0$. $d(z)$ は odd な場だったので, $d_{(0)}^2 = 0$ となる. 一方で, $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ のチャージを $V^k(\mathfrak{g})$ と F^{ne} に対しては全て 0, F^{ch} に対しては任意の $\alpha \in \Delta_{>0}$ について $\varphi_\alpha(z)$ のチャージを -1 , $\varphi^\alpha(z)$ のチャージを 1 として定める. このとき C_k^n を $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ の元であってチャージが n となるもの全体の集合とすると,

$$C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_k^n$$

となる. さらに

$$d_{(0)} C_k^n \subset C_k^{n+1}$$

が任意の n に対して成り立つ. したがって $(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d_{(0)})$ はチャージについての複体をなす. これを量子 Drinfel'd-Sokolov 還元に関する BRST 複体と呼ぶ. このとき $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に関する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ をそのコホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d_{(0)})$$

で定める. 実際には Kac と脇本 [10][11] により

$$H(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d_{(0)}) = H^0(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d_{(0)})$$

となることが知られている.

Remark. $h^\vee$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数とする.

1. $\mathcal{W}$ 代数は (構成から) スーパー頂点代数構造をもつ.
2. $k \neq -h^\vee$ のとき, $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は (Γ に依存して定まる) 共形ベクトル L をもち, $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付き共形スーパー頂点代数となる.
3. 2. のとき L は (零でない) コホモロジー類を定め, $\mathcal{W}$ 代数の共形ベクトルになる. このとき $\mathcal{W}$ 代数は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き共形スーパー頂点代数構造をもつ.
4. $\mathcal{W}$ 代数のスーパー頂点代数構造は Γ のとり方に依存しない. ただし共形ウェイトは Γ に依存して変化する ([1][2] による).

3 WB_n 代数

Fateev と Lukyanov による WB_n 代数の定義を述べる. $\mathcal{H}$ を B_n 型のルート系に付随する Heisenberg 頂点代数, $\mathcal{F}$ を odd な場 $\Phi(z)$ によって生成されるフェルミオンスーパー頂点代数とする. ただし $\Phi(z)$ は

$$\Phi(z)\Phi(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

を満たすものとする. $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の odd な場 $G(z)$ を

$$G(z) = (\gamma\partial + b_1(z))(\gamma\partial + b_2(z)) \cdots (\gamma\partial + b_n(z))\Phi(z) :$$

で定義する. ただし

$$b_i(z) = \sum_{j=i}^n \alpha_j(z)$$

であり, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は B_n 型の単純ルートである.

定義 3.1. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の場 $W_i(z)$ ($i = 1, \dots, 2n-1$) を

$$G(z)G(w) \sim \frac{W_1(w)}{z-w} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \left(\frac{W_{2i}(w)}{(z-w)^{2i}} + \frac{W_{2i+1}(w)}{(z-w)^{2i+1}} \right) + \frac{\gamma_n}{(z-w)^{2n+1}}$$

で定義する. ただし

$$\gamma_i = \prod_{j=1}^i (1 - 2j(2j-1)\gamma^2)$$

である. $\gamma \in \mathbb{C}$ に関する WB_n 代数とは, $G(z)$ および $W_{2i-1}(z)$ ($i = 1, \dots, n$) によって生成される $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ の部分頂点代数である.

次の事実が Fateev と Lukyanov によって知られている.

命題 3.2 (Fateev-Lukyanov [3]). $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, $\gamma_{\pm} \in \mathbb{C}$ を $\gamma_+ + \gamma_- = \gamma$ かつ $\gamma_+\gamma_- = -1$ なる複素数としてとる. γ が generic のとき,

$$WB_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker} \int e^{\gamma_+ \int \alpha_i(z)} dz \cap \text{Ker} \int : e^{\gamma_+ \int \alpha_n(z)} \Phi(z) : dz$$

が成り立つ. ただし $\int \cdot dz$ は形式的に z^{-1} の係数をとる操作を表す.

4 $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数

Feigin と Semikhatov によって導入された $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数の定義を述べる. n を 2 以上の自然数, k を $k \neq -n$ なる複素数, V を $n+1$ 次元複素ベクトル空間とする.

$$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, \psi, \xi \in V$$

を V の一つの基底とする. V 上の双線形形式 $(\cdot|\cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ を次の Gram 行列で定義する:

$$\begin{array}{c} a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad a_{n-3} \quad \cdots \quad a_1 \quad \psi \quad \xi \\ \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_1 \\ \psi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(k+n) & -k-n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k-n & 2(k+n) & -k-n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k-n & 2(k+n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(k+n) & -k-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k-n & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathcal{H}$ を V とその双線形形式 $(\cdot|\cdot)_V$ に付随する Heisenberg 頂点代数, また $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{H}_{m\xi}$ を $m\xi \in V$ を最高ウェイトにもつ $\mathcal{H}$ 加群とする. $e^{m\xi}$ を $\mathcal{H}_{m\xi}$ の最高ウェイトベクトルとする. このとき

$$\mathcal{V}_\xi = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{m\xi}$$

は格子頂点代数になる. 特に $e^{m\xi}$ の頂点作用素 $e^{m\xi}(z)$ は

$$e^{m\xi}(z) = e^{m \int \xi(z)}$$

で定義される. ここで $\mathcal{V}_\xi$ 上の場 $\mathcal{E}(z), \mathcal{F}(z)$ を

$$\mathcal{E}(z) = e^\xi(z), \quad \mathcal{F}(z) = - : \mathcal{P}(z) e^{-\xi}(z) :$$

で定義する. ただし

$$\mathcal{P} = ((k+n-1)\partial + \psi + \sum_{i=1}^{n-1} a_i)((k+n-1)\partial + \psi + \sum_{i=1}^{n-2} a_i) \cdots ((k+n-1)\partial + \psi + a_1)$$

である.

定義 4.1. k に関する $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数とは, $\mathcal{E}(z)$ と $\mathcal{F}(z)$ によって生成される $\mathcal{V}_\xi$ の部分頂点代数である.

次の事実は Feigin と Semikhatov による.

命題 4.2 (Feigin-Semikhatov [6]). k を generic としたとき,

$$\mathcal{W}_n^{(2)} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker} \int e^{\int a_i(z)} dz \cap \text{Ker} \int e^{\int \psi(z)} dz.$$

5 主定理

主定理を述べるための準備をする。2章の記号をここでも用いる。まず

$$\Delta^\Gamma = \Delta \setminus \Delta_0 = \Delta_{>0} \cup \Delta_{<0},$$

$$\Pi^\Gamma = \{\alpha \in \Delta_{>0} \mid \alpha = \beta + \gamma \text{ となるような } \beta, \gamma \in \Delta_{>0} \text{ は存在しない}\}$$

と定める。 Δ^Γ は Brundan と Goodwin によって定義された制限ルート系と呼ばれるものになっており、そのとき Π^Γ はその base の一つである。 $\Pi_j^\Gamma = \Pi^\Gamma \cap \Delta_j$ と定義すると、

$$\Pi^\Gamma = \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma \cup \Pi_1^\Gamma$$

となることが分かる。ここで Q_0 を $\mathfrak{g}_0$ のルート格子 (root lattice) とする。すなわち $Q_0 = \bigoplus_{\alpha \in \Pi_0} \mathbb{Z}\alpha$ である。このとき Π^Γ に同値関係 $\sim$ を任意の $\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$ に対し

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in Q_0$$

として定義する。この同値関係による Π^Γ の商集合を $[\Pi^\Gamma]$ と表す。また $\alpha \in \Pi^\Gamma$ の同値類を $[\alpha] \in [\Pi^\Gamma]$ と表す。さらに $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ とその不変双線形形式 τ_k に付随するアファインスーパー頂点代数とする。ただし τ_k は $u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し、

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

と定義される。このとき $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式である。 $u \in \mathfrak{g}_0$ に対応する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の場を $J^u(z)$ と表すと、 $u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し、

$$J^u(z)J^v(w) \sim \frac{J^{[u,v]}(w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立っている。また $\{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}, \{u^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$ を $(u^i|u_j) = \delta_{i,j}$ なる $\mathfrak{g}_0$ の双対基底とする。このとき管原構成から、 $k + h^\vee \neq 0$ のとき

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0} : u^i(z) u_i(z) :$$

は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の共形ベクトルのなす場であることがわかる。 $[\beta] \in [\Pi]$ に対し、ベクトル空間 $\mathbb{C}^{[\beta]}$ を

$$\mathbb{C}^{[\beta]} = \bigoplus_{\alpha \in [\beta]} \mathbb{C} x_\alpha$$

とする。 x_α のパリティを $\bar{\alpha} + \bar{1}$ と定義してスーパーベクトル空間となる。 $\mathbb{C}^{[\beta]}$ に対する $\mathfrak{g}_0$ 作用を、任意の $u \in \mathfrak{g}_0$ に対し

$$u \cdot x_\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} c_{\beta,u}^\alpha x_\beta$$

によって定義する。ただし $c_{\beta,u}^\alpha$ は $[e_\beta, u] = \sum_{\alpha \in [\beta]} c_{\beta,u}^\alpha e_\alpha$ によって定義される定数である。この作用によって $\mathbb{C}^{[\beta]}$ は $\mathfrak{g}_0$ 加群となる。一方で $\hat{\mathfrak{g}}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ のループ (スーパー) 代数 $\mathfrak{g}_0[t, t^{-1}]$ の τ_k による中心拡大とする。すなわち

$$\hat{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

であって, 任意の $u, v \in \mathfrak{g}_0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$[ut^m, vt^n] = [u, v]t^{m+n} + \tau_k(u|v)K$$

を満たす. このとき $\mathbb{C}^{[\beta]}$ に, $\hat{\mathfrak{g}}_0$ の部分リ一代数 $\mathfrak{g}_0[t] \oplus \mathbb{C}K$ の作用を $\mathfrak{g}_0[t]t = 0$ かつ $K = 1$ によって定義して $\mathfrak{g}_0[t] \oplus \mathbb{C}K$ 加群とする. よって誘導表現

$$M_{[\beta]} = \text{Ind}_{\mathfrak{g}_0[t] \oplus \mathbb{C}K}^{\hat{\mathfrak{g}}_0} \mathbb{C}^{[\beta]} \simeq V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes \bigoplus_{\alpha \in [\beta]} \mathbb{C}x_\alpha$$

が得られる. 構成から $M_{[\beta]}$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 加群である. $k \neq -h^\vee$ とする. $\alpha \in \Pi^\Gamma$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 線形作用素

$$S_n^\alpha : V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \rightarrow M_{[\alpha]}$$

を定義する.

$$S^\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^\alpha z^{-n}$$

として, 任意の $A \in V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ に対し

$$S^\alpha(z)A = (-1)^{(\bar{\alpha}+1)\bar{A}} e^{zT} Y(A, -z)x_\alpha$$

として定義する. ただし $Y(A, z)$ は $M_{[\alpha]}$ 上の頂点作用素であり, $T = L_{-1}$ とする.

命題 5.1. k を generic とする. このとき次が成り立つ.

1. $S_0^\alpha|0\rangle = x_\alpha$, $n \geq 1$ に対し $S_n^\alpha|0\rangle = 0$.
2. S_n^α は $\bar{\alpha} + \bar{1}$ のパリティをもつスーパー線形作用素である.
3. $[J_{(m)}^u, S_n^\alpha] = \sum_{\beta \in [\alpha]} c_{\beta, u}^\alpha S_{m+n}^\beta$.
4. $\partial S^\alpha(z) = -\frac{1}{(k+h^\vee)(e_\alpha|e_{-\alpha})} \sum_{\substack{\beta \in [\alpha] \\ \gamma \in I \cup \Delta_0}} (-1)^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} c_{\beta, -\alpha}^\gamma : J^{e_\gamma}(z) S^\beta(z) :.$

次の定理が本稿の主定理である.

定理 5.2. k が generic のとき, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\text{ne}}$ の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{[\alpha] \in \Pi^\Gamma} \text{Ker } Q_{[\alpha]}.$$

ただし

$$Q_{[\alpha]} : V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\text{ne}} \longrightarrow M_{[\alpha]} \otimes F^{\text{ne}}$$

は次のように定義される:

$$Q_{[\alpha]} = \begin{cases} \sum_{\beta \in [\alpha]} \chi(e_\beta) \int S^\beta(z) dz & ([\alpha] \in [\Pi_1^\Gamma] \text{ のとき}), \\ \sum_{\beta \in [\alpha]} \int : S^\beta(z) \Phi_\beta(z) : dz & ([\alpha] \in [\Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma] \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となる Γ が選べることを考える (必ずしもとれるとは限らない). このとき $\Delta_0 = \phi$ なので, $\Delta^\Gamma = \Delta$, $\Pi^\Gamma = \Pi$ である. また $Q_0 = 0$ より, Π^Γ に定義された同値関係は自明となる. したがって $[\Pi^\Gamma] = \Pi^\Gamma = \Pi$ である. このとき $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) = V^{\tau_k}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ と $\mathfrak{h}$ を同一視することで, $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ と同型になる. さらに命題 5.1 より, $\alpha \in \Pi$ に対し

$$S^\alpha(z) = e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)}$$

となる. ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $\mathcal{H}$ 上の場合である. よって定理 5.2 より次の定理を得る.

定理 5.3. k が generic かつ $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ とする. このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\mathcal{H} \otimes F^{\text{ne}}$ の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha \in \Pi_1 \\ \chi(e_\alpha) \neq 0}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} dz \cap \bigcap_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}} \text{Ker} \int : e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} \Phi_\alpha(z) : dz.$$

ただし $\mathcal{H}$ は $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数, $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $\mathcal{H}$ 上の場合である.

$\mathfrak{g}$ が単純リー代数かつ f がその正則べき零元るとき, $\mathfrak{g}$ の Dynkin grading Γ をとると $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ であり, このとき定理 5.3 は Feigin-Frenkel の定理 1.1 の結果を含む. したがって定理 5.3 は定理 1.1 の一般化であり, $\mathcal{W}$ 代数の新しい自由場実現を与えている.

6 主定理の応用

定理 6.1. $k \neq -n - \frac{1}{2}$ のとき,

$$\mathcal{W}B_n \simeq \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n), f_{\text{reg}}; \Gamma).$$

ただし f_{reg} は $\mathfrak{osp}(1, 2n)_0 = \mathfrak{sp}(2n)$ の正則べき零元, Γ は Dynkin grading であり, $\mathcal{W}B_n$ のパラメータ γ は

$$\gamma = \sqrt{2k + 2n + 1} - \frac{1}{\sqrt{2k + 2n + 1}}$$

で対応付けられる.

証明. 定理 5.3 において $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$, f をその even part の正則べき零元とすれば, 定理 6.1 が成り立つ. ただし定理 6.1 において $n + \frac{1}{2}$ は $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ の双対 Coxeter 数であることに注意する. 定理 6.1 が k が generic だけではなく, 非臨界レベル ($k \neq -n - \frac{1}{2}$) でも成り立つのは, 三浦写像と呼ばれる $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を誘導する写像を用いることでわかる. $\square$

定理 6.2. $k \neq -n$ のとき,

$$\mathcal{W}_n^{(2)} \simeq \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\text{sub}}; \Gamma).$$

ただし f_{sub} は $\mathfrak{sl}_n$ の副正則べき零元, Γ は $\mathfrak{sl}_n$ の good grading であり, 単純ルートを $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ とすると $\alpha_1 \in \Pi_0$ かつ $\alpha_i \in \Pi_1$ ($i \geq 2$) を満たすものである.

証明. 定理 5.2 で $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $f = f_{sub}$, Γ を $\alpha_1 \in \Pi_0$ かつ $\alpha_i \in \Pi_1$ ($i \geq 2$) を満たす good grading とすると, generic な k に対して

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{sub}; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=2}^{n-1} \text{Ker} \int S^{\alpha_i}(z) dz \subset V^{T^k}(\mathfrak{g}_0)$$

となる. ただし

$$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}e_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha_1}$$

である. $h_i = \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ ($i = 1, \dots, n-1$) とおく. このとき頂点代数の射

$$\pi : V^{T^k}(\mathfrak{g}_0) \longrightarrow \mathcal{V}_\xi$$

を次で定義する:

$$\begin{aligned} J^{h_1}(z) &\longmapsto (k+n-2)\xi(z) + 2\psi(z) + a_1(z), \\ J^{h_2}(z) &\longmapsto \xi(z) - \psi(z) + a_2(z), \\ J^{h_i}(z) &\longmapsto a_i(z) \quad (i = 3, \dots, n-1), \\ J^{e_{\alpha_1}}(z) &\longmapsto e^{\int \xi(z)}, \\ J^{e_{-\alpha_1}}(z) &\longmapsto - : ((k+n-1)(\partial + \xi(z)) + \psi(z) + a_1(z))\psi(z)e^{-\int \xi(z)} : . \end{aligned}$$

すると π は $V^{k+n-2}(\mathfrak{sl}_2)$ の臨本表現の拡張になっており, 単射である (ただし $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha_1}$ と思っている). このとき π は $\mathcal{W}$ 代数と $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数の間の同型を誘導することが分かり, generic な k に対して主張が成り立つことが分かる. 再び三浦写像を用いることで定理 6.2 が成り立つことが証明される. $\square$

参考文献

- [1] T. Arakawa, T. Kuwabara, F. Malikov, *Localization of affine W -algebras*, Comm. Math. Phys. 335, No. 1, 143–182, 2015.
- [2] J. Brundan, S. Goodwin, *Good grading polytopes*, Proc. London Math. Soc. 94, 155–180, 2007.
- [3] V.A. Fateev, S.L. Lukyanov, *Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional Conformal field theory*, Sov. Sci. Rev. A. Phys., Vol. 15 (1–117), 1990.
- [4] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody Algebras At The Critical Level And Gelfand-Dikii Algebras*, Int. J. Mod. Phys., A7S1A, 197, 1992.
- [5] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett., B246, 75–81, MR 1071340, 1990.
- [6] B.L. Feigin, A. Semikhatov, $\mathcal{W}_n^{(2)}$ -algebras, Nuclear Phys., B 698, No. 3, 409–449, 2004.
- [7] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surv. Monogr., Vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

- [8] N. Genra, *Screening Operators for $\mathcal{W}$ -algebras*, in preparation.
- [9] V.G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Commun. Math. Phys., 241(2-3), 307–342, 2003.
- [10] V.G. Kac, M. Wakimoto, *Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras*, Adv. Math., 185(2), 400–458, 2004.
- [11] V.G. Kac, M. Wakimoto, *Corrigendum to “Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras” [Adv.Math.185, 400–458, 2004]*, Adv. Math., 193.2, 453–455, 2005.
- [12] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys., 65, 1205, 1986.