

氏 名	おお 太 田 崇 啓
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3218 号
学位授与の日付	平 成 20 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	HILBERTIAN MATRIX CROSS NORMED SPACES ARISING FROM NORMED IDEALS (ノルム付きイデアルから構成されるヒルベルト空間を基とする行列積ノルム 空間)
論文調査委員	(主 査) 教 授 泉 正 己 教 授 重 川 一 郎 教 授 堤 誉 志 雄

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、対称ノルムイデアルを用いた作用素ヒルベルト空間の新たな構成法を与えている。

ヒルベルト空間の有界線型作用素全体は作用素ノルムによりバナッハ空間であるが、その線型部分空間を作用素空間と呼ぶ。作用素ノルムにより作用素空間はノルム空間になっており、作用素空間を単にノルム空間とみなしたものを作用素空間の基と呼ぶ。作用素空間と行列環のテンソル積は自然なノルムを持つことから、作用素空間に付随して可算個のノルム空間が定まる。作用素空間論の最大の特徴は、作用素空間のノルム空間としての構造以外に、その行列環とのテンソル積として得られるノルム空間達の構造を考察する点にある。そのため作用素空間の間の射としては、単なる有界線型写像でなく、完全有界写像（有界線型写像であり、かつ、それが行列環とのテンソル積達の間に誘導する写像のノルムの上限が有界なもの）が通常考察される。また Ruan によって作用素空間の公理化も行われている。

作用素ヒルベルト空間（基がヒルベルト空間である作用素空間）は作用素空間の重要なクラスであるが、その中でも均質的作用素ヒルベルト空間（基のすべてのユニタリ作用素が完全等長写像を誘導する作用素ヒルベルト空間）は重要である。このクラスの作用素空間の例として、行ヒルベルト空間 R 、列ヒルベルト空間 C 、及び Pisier によるこれらの補完空間 $(R, C)_\theta$ などがある。

可分無限次元ヒルベルト空間のコンパクト作用素全体からなる環のイデアルで、ある条件を満たすノルムについてバナッハ空間であるものを対称ノルムイデアルと呼ぶ。対称ノルムイデアルは、数列空間上の対称ノルム函数により特徴付けられる。中でも重要なのは、 1_p ノルムを対称ノルム函数とする Schatten イデアル C_p である。Pisier は、作用素ヒルベルト空間 $(R, C)_\theta$ と行列環のテンソル積のノルムの、Schatten イデアルの上の作用素のノルムを使った具体的な表示を得た。

本論文では上記の Pisier の結果に着想を得て、まず $\Phi \geq \Psi$ をみたす対称ノルム函数の対に対してヒルベルト空間 $H(\Phi, \Psi)$ とその行列空間とのテンソル積の上のノルム（行列積ノルム空間）の構成を行っている。次にこのようにして得られる行列積ノルム空間がいつ作用素空間になるか（正確にはいつ Ruan の公理をみたすか）を議論している。次の定理は本論文の主結果の一つである。

定理 1. $H(\Phi, \Phi)$ が作用素空間になる必要十分条件は Φ が 1_p ノルムであることである。

一方対称ノルム函数 Φ と Ψ が必ずしも 1_p ノルムでない場合でも、これらの函数が異なるとき $H(\Phi, \Psi)$ が作用素空間になる場合がある。

定理 2. Φ が Q ノルムで Ψ が Q^* ノルムであれば $H(\Phi, \Psi)$ は作用素空間である。

これらの結果を得るために、 $H(\Phi, \Psi)$ が作用素空間であるためのより精密な必要条件も得られている。またこのようにして構成される作用素空間の間の完全有界写像のノルムの、対称イデアルによる特徴づけも行われている。

論文審査の結果の要旨

1980年代に Effros と Ruan により創始された作用素空間論は、量子化されたバナッハ空間論として現在までに大きな発展を遂げている函数解析学の重要な分野の一つである。また、Pisier による多項式有界作用素に関する有名な未解決問題の反例の構成に代表されるように、作用素空間論は作用素論や作用素環論の研究に重要な応用を持つ。作用素空間の中でも、均質的作用素ヒルベルト空間は高い対称性を持ち、応用上重要な役割を果たす。実際 Pisier が複素補完理論を使って構成した均質的作用素ヒルベルト空間 OH (上述の $(R, C)_\theta$ で θ が $1/2$ の場合) は、最近の Pisier-Shlyakhtenko や Junge によるフォンノイマン環の前双対空間の作用素空間としての構造の研究において重要な役割を果たしている。しかし均質的作用素ヒルベルト空間を構成することや、それらの間の完全有界写像のノルムを計算することは、一般に容易ではない。

本論文で得られた対称ノルムイデアルから組織的に均質的作用素ヒルベルト空間を構成する方法は、本質的に新しい例の構成を可能にしている。さらに部分的にはあるが、構成された均質的作用素ヒルベルト空間の間の完全有界写像のノルムの計算も可能である。これらの点から、本論文で得られた構成法は作用素空間論の今後の発展に寄与するものとして大変意義深いものであると判断される。

本論文の独創的な点は、Pisier による作用素ヒルベルト空間 $(R, C)_\theta$ の Schatten イデアルによる特徴付けを逆手に取り、一般の対称ノルム函数 Φ と Ψ から出発して等質的作用素ヒルベルト空間の構成を考案した点にある。実際 $\Phi = \Psi = 1_p$ の場合には、構成された空間 $H(\Phi, \Psi)$ は作用素空間となり、 $(R, C)_\theta$ と一致する。しかし一般の対称ノルム函数 Φ と Ψ に関しては $H(\Phi, \Psi)$ は作用素空間よりも少し弱い性質を持つ行列積ノルム空間となる。 $H(\Phi, \Phi)$ が作用素空間になる場合の特徴付けである定理 1 の証明では、バナッハ空間論における Boyd 指数を使った巧みな解析が行われており、その議論自体興味深いものである (実際証明の中で、対称ノルムが積ノルムになる必要十分条件が与えられている)。 Φ と Ψ が異なるときには、 $H(\Phi, \Psi)$ が作用素空間となる多くの例が得られているが、これらの均質的作用素ヒルベルト空間の、補完理論等を使った他の構成は現在のところ知られていない。

本論文に先行する対称ノルムイデアルと作用素ヒルベルト空間に関する結果としては、上述の Pisier の結果以外に Mathes-Paulsen の結果がある。彼らは、同じ基をもつ二つの均質的作用素ヒルベルト空間の間の完全有界写像全体が対称ノルムイデアルとなることを示し、与えられた対称ノルムイデアルがいつこのようにして得られるかを論じた。しかし彼らは具体例についてあまり考察を行っていない。本論文のもう一つの独創的な点は、列ヒルベルト空間 R から $H(\Phi, \Psi)$ への完全有界写像全体に対応する対称ノルムイデアルを multiplier ノルムを使って完全に特徴付けた点にある。

上述の理由から、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。また論文内容とそれに関連した事項についての試問を行った結果、合格と認めた。