

10 レベル TV 型方程式の誤差関数解について

後援大 工 尾高 惟倫

" " 野田 松太郎

予田方程式

$$(TD) \quad S'_n = r_{n-1} - r_n, \quad r'_n = r_n (S_n - S_{n+1})$$

$$(S_n = S_n(t), \quad r_n = r_n(t), \quad ' = \frac{d}{dt})$$

10 レベル TV 型方程式

$$(PN(\alpha, \beta)) \quad f'' = \frac{(f')^2}{2f} + \frac{3}{2}f^3 + 4tf^2 + 2(t^2 - \alpha)f + \frac{\beta}{f}$$

$$(f = f(t), \quad ' = \frac{d}{dt}, \quad '' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2)$$

の解が解くことが出来る。

$$(1) \quad f_1 = -2t - \frac{e^{-t^2}}{Enf t - 1/f_1(0)}, \quad p_1 = \frac{2}{f_1} - f_1 - 2t$$

$$(2) \quad \begin{cases} f_{n+1} = \frac{2n}{f_n} - (p_n + f_n + 2t) \\ p_{n+1} = \frac{2(n+1)}{f_{n+1}} - (p_n + f_{n+1} + 2t) \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$(3) \quad f_0 = \frac{e^{-t^2}}{\operatorname{Erf} t + 1/f_0(0)}$$

$$(4) \quad \begin{cases} f_{-(n+1)} = \frac{2(n+1)}{f_n + 2t} \\ p_{-n} = -\frac{2n}{f_{-n}} \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$(\operatorname{Erf} t = \int_0^t e^{-z^2} dz \quad \text{誤差関数})$$

これより f_n, p_n を定義すると f_n は $PN(1-n, -2n^2)$ を満たす。又

$$(5) \quad f'_n = f_n(p_{n+1} - p_n), \quad p'_n = p_n(f_n - f_{n+1})$$

も満たす。1 以下、2

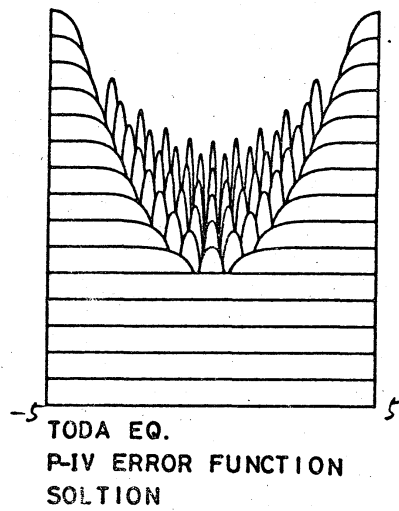
$$(6) \quad S_n = p_{n+1} + f_n, \quad l_n = p_n f_n$$

$$(7) \quad S_n = p_n + f_n, \quad l_n = p_n f_{n+1}$$

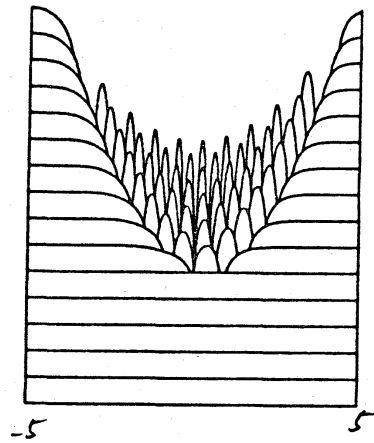
とみると S_n, l_n は戸田方程式 TD を満たす。特に

$p_n = 2n, \quad S_n = -2t \quad (n \leq 0)$ である。 $p_n = 2n, \quad S_n = -2t \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ は戸田方程式の自明な解であり、これに注意すると、 $1/f_0(0) + 1/f_1(0) = 0$ といえる。

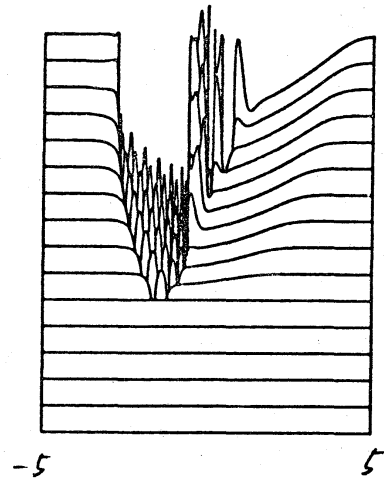
つかの $f_0(x)$ の値について f_n のグラフをかき 簡単な立体図にした。



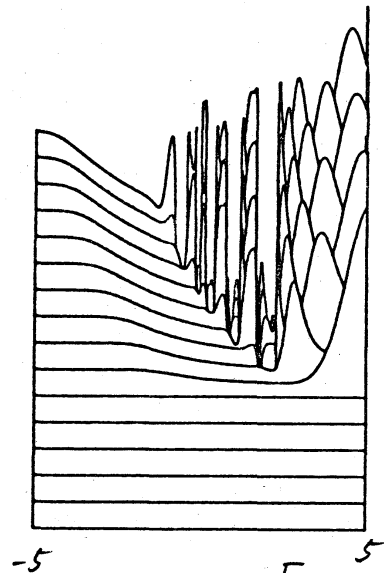
$$1/f_0(x) = 0$$



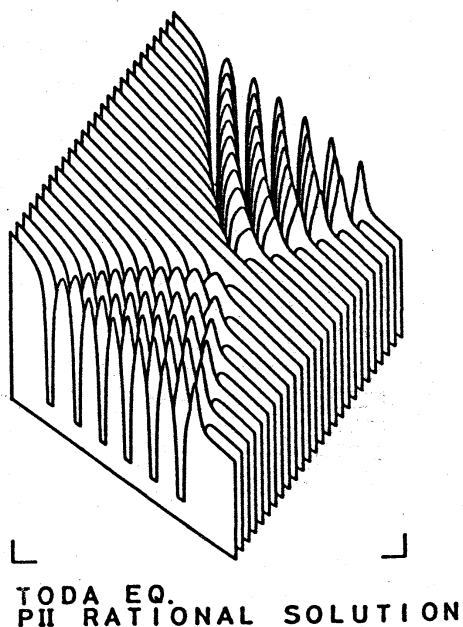
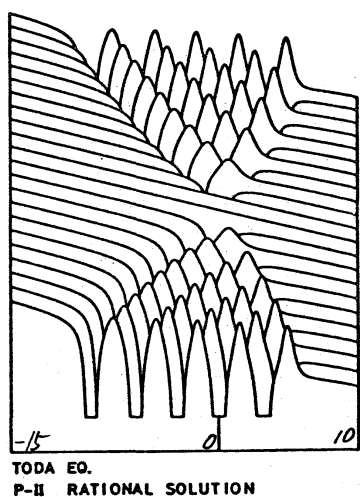
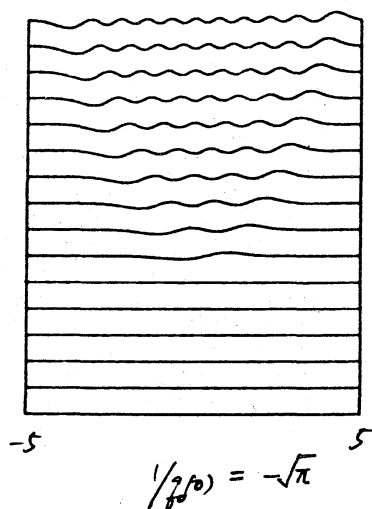
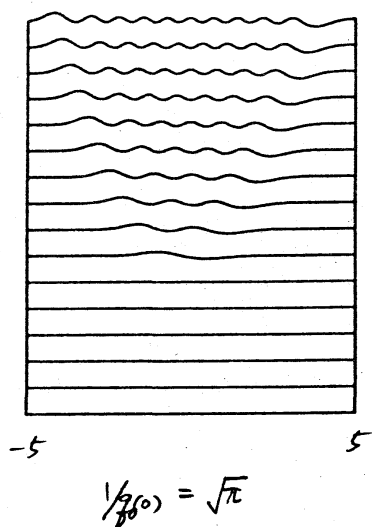
$$1/f_0(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$



$$1/f_0(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



$$1/f_0(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



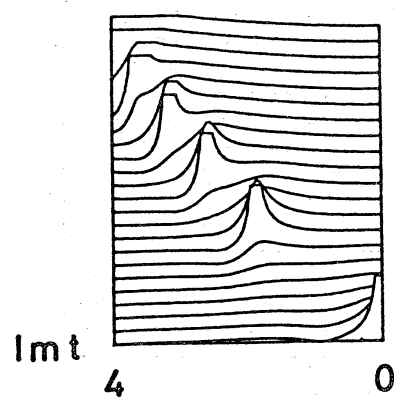
比較のため 戸田方程式と10セルのII型方程式が共有する有理関数解の立体図を上にかかげた。

次は $f_n(t)$ の絶対値 $|f_n|$ を複素 t -平面上に立体図で表わした時の $|f_n(t)| = |f_n(\bar{t})| = |f_n(t)|$ であり、 $\text{Re } t \geq 0, \text{Im } t \geq 0$ の部分でのみみわす。

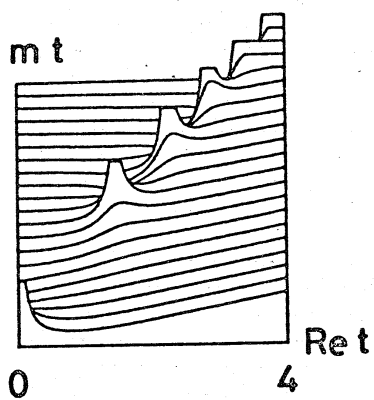
$|Q_1|$

P-IV (0, 2)

Ret

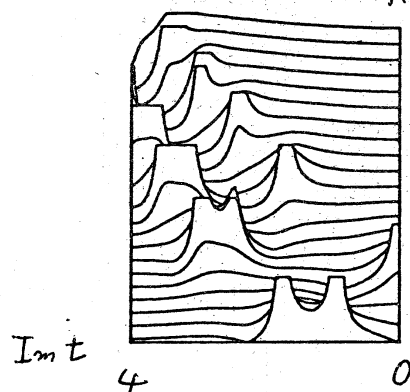


Imt

 $|Q_2|$

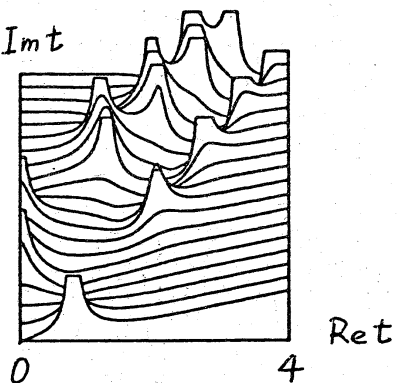
P-IV (-1, -8)

Ret



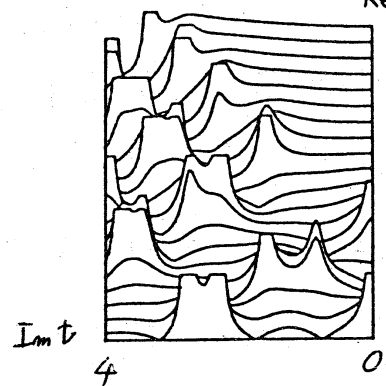
Imt

Imt

 $|Q_3|$

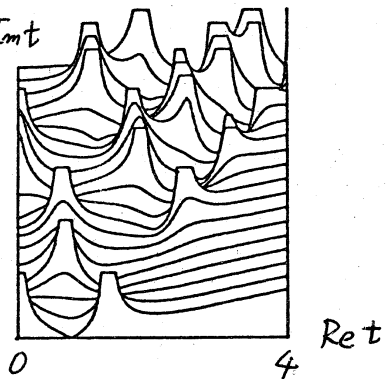
P-IV (-2, -18)

Ret

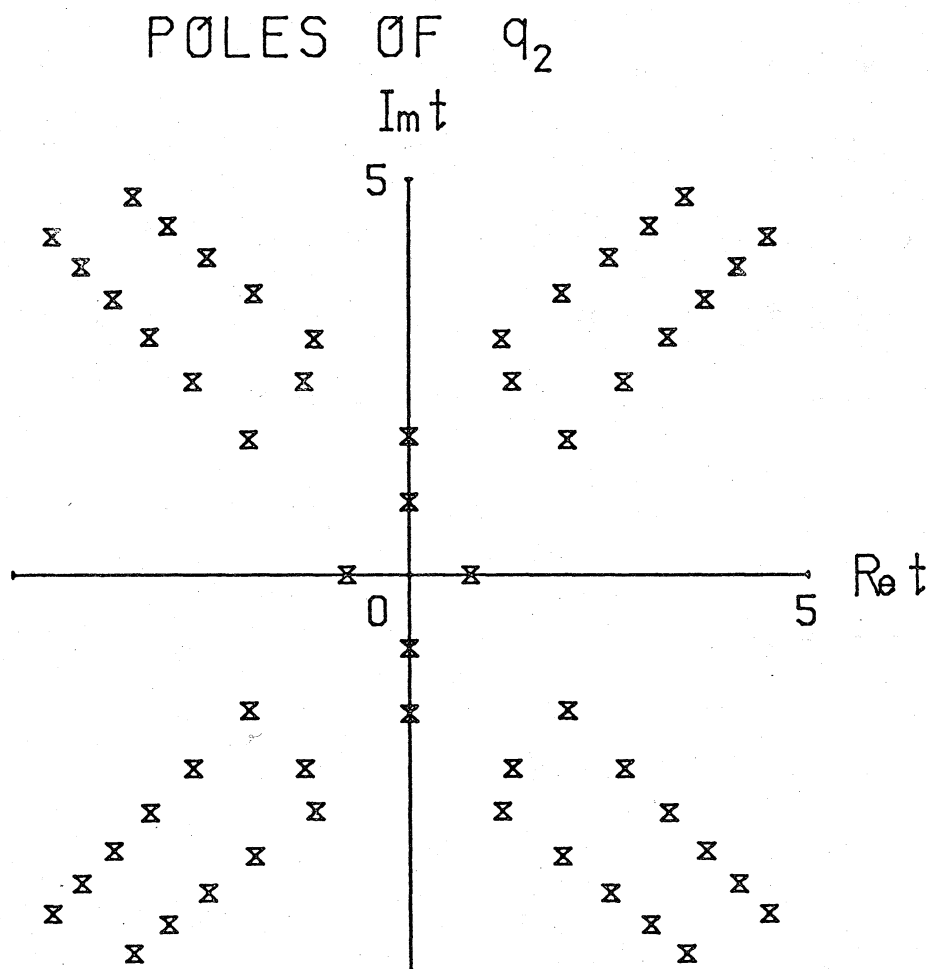


Imt

Imt



いづれも $|t|$ が大きい所は正確であるが、 t が小さいマ
 イコシ 37-70 PC-3/00 に 70 D ッ ター をつないでか
 いたものが 相当長時間を要する。ともかく q_2 の極の位置が
 おおまかみまといえる。我々の主要な目標は次図のように極を
 正確に計算し図示することである。これも相当長時間を要す
 るため残念ながら今の所 q_2 についてはしか完成してない。



f_m の極は $1/f_m$ の零点として ニュートン法がよいのはよいが (5) が成り立ち、 m の子の t_0 を適当な出発点として

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k + \frac{f_m(t_k)}{f'_m(t_k)} \\ &= t_k + \frac{1}{p_{m+1}(t_k) - p_m(t_k)} \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

t の反復を与えればよい。 t_0 の候補は t -平面を適当な格子に割り、 $|f_m|$ が十分大になる t を与えればよい。以上を f_m, p_m の値をいかに正確に計算するかにかかっている。漸化式の部分 (2) は簡単であるが f_m の計算には $\text{Erf}(t)$ 正確には $e^{t^2} \text{Erf}(t)$ の計算が必要でこの部分がマイコンにと、 m は f_m に与える。以下は

$$\text{Erf } t = \int_0^t e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf } t$$

を アブラモビッツ のハンドブックに従って

$$\text{erf } x \approx 1 - 1/A^{16}$$

$$A = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_6 x^6$$

$$a_1 = .07052 \quad 30784 \quad a_2 = .04228 \quad 20123$$

$$a_3 = .00927 \quad 05272 \quad a_4 = .00015 \quad 20143$$

$$a_5 = .00027 \quad 65672 \quad a_6 = .00004 \quad 30638$$

$$\operatorname{erf}(x+iy) \doteq \operatorname{erf} x + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x} \left[(1 - \cos 2xy) + i \sin 2xy \right] \\ + \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{20} \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{n^2 + 4x^2} \left[f_n(x, y) + i g_n(x, y) \right]$$

$$f_n(x, y) = 2x - 2x \cosh ny \cos 2xy + n \sinh ny \sin 2xy$$

$$g_n(x, y) = 2x \cosh ny \sin 2xy + n \sinh ny \cos 2xy$$

Σ の部分の項数を 20 としたのは精密な意味では、正確ではない。項数を 10 とした前出の $|f_n|$ の立体図をかいきると、(A) 大の所であまりから誤差の生じようが出る。又項数 20 としたとき $\operatorname{erf} t = 0$ を $2 - t^2$ と仮定した結果とアブラモビッツの資料は一致する。このことは $\operatorname{Erf} t$ の計算は上の近似が非常に正確であることを意味するが、我々に必要なのは $e^{t^2} \operatorname{Erf} t$ である。

$t = 5$ のとき $e^{t^2} \approx 7 \times 10^{10}$ であることに注意すれば $Erf t$ を極めて正確に計算したとしても $e^{t^2} Erf t$ は相当不正確ということになる。

結論としては $e^{t^2} Erf t$ のような近似を利用することがあることと 大型計算機を用いて全体に高速化しなければならぬことであるが ともにもう少し時間をいれたらよい。