

d -covers of posets of nilpotent subgroups

山口大学・教育学部 飯寄信保

Nobuo Iiyori

Department of Mathematics, Faculty of Education,

Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8511, Japan

iiyori@yamaguchi-u.ac.jp

千葉大学・教育学部 澤辺正人

Masato Sawabe

Department of Mathematics, Faculty of Education,

Chiba University, Chiba 263-8522, Japan

sawabe@faculty.chiba-u.jp

この報告は 2022 年 2 月 17 日（木）にオンライン形式で行った講演をおおよそ再現するものである。講演内容はある種のベキ零部分群族に対して d -cover という概念を導入し、その cover に関するいくつかの考察である。本研究の詳細については論文 [3] を参照されたい。

1 はじめに

記号の準備などから述べる。 G を有限群とし $e \in G$ を単位元とする。 $\text{Sgp}(G)$ で G の部分群全体を表す。要素 $x \in G$ の位数を $o(x) \in \mathbb{N}$ で表す。最小公倍数 $\text{lcm}\{o(g) \mid g \in G\} \in \mathbb{N}$ を $\text{exp}(G)$ で表し、これを G の指数という。本講演の主対象は、自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、次のベキ零部分群からなる族 $\mathcal{N}(G, n)$ である。

$$\mathcal{N}(G, n) = \{H \in \text{Sgp}(G) \mid \text{ベキ零群 } H \neq \{e\}, \text{exp}(H) \mid n\} \subseteq \text{Sgp}(G)$$

指数 $\text{exp}(H)$ の条件を導入するに至った経緯を述べる。 G 上の方程式 $X^n = e$ の解集合 $L_n(G) = \{g \in G \mid g^n = e\} \subseteq G$ は有限群論の中で重要な役割を果たす。フロベニウス予想 [5] においてはもちろんのこと、群指標 [2, Section 9] や群に関する Quiver の表現 [4] などでも扱われている。そこで $L_n(G)$ の部分群版を考えたい。 $g \in L_n(G)$ に対して g で生成される巡回群 $H = \langle g \rangle$ の位数 $|H| = o(g)$ は定義から n を割り切る。このとき巡回群の特殊性から $|H|$ は $\text{exp}(H)$ と同一である。即ち $\text{exp}(H)$ は n を割り切る。そこでこの条件を一般に課し $\text{Sgp}(G, n) = \{H \in \text{Sgp}(G) \mid \text{exp}(H) \mid n\}$ に着目する。より一般に任意の部分群族 $\mathcal{H}(G) \subseteq \text{Sgp}(G)$ に対して次を導入する。

$$\mathcal{H}(G, n) = \{H \in \mathcal{H}(G) \mid \text{exp}(H) \mid n\}$$

特に我々が注目している部分群族 $\mathcal{H}(G)$ として次を挙げることが出来る。

$$\mathcal{N}_\pi(G) = (\text{非自明なベキ零 } \pi\text{-部分群全体}) \ (\pi \subseteq \pi(G))$$

$$\mathcal{S}_p(G) = \mathcal{N}_{\{p\}}(G) = (\text{非自明な } p\text{-部分群全体}) \ (\pi = \{p\} \subseteq \pi(G))$$

$$\mathcal{N}(G) = \mathcal{N}_{\pi(G)}(G) = (\text{非自明なベキ零部分群全体}) \ (\pi = \pi(G))$$

$$\mathcal{Ab}(G) = (\text{非自明な可換部分群全体}) \subseteq \mathcal{N}(G)$$

そこで $\mathcal{H} = \mathcal{N}_\pi, \mathcal{S}_p, \mathcal{N}, \mathcal{Ab}$ などに対して $\mathcal{H}(G, n)$ を考察する。

2 ホモトピー同値性

d -cover の議論に入る前に関連する複体の間のホモトピー同値性の結果を述べる.

命題 2.1 (Proposition 2.4, 2.5 in [3]) G を有限群とする.

1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{N}(G, n) \simeq \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ が成り立つ.
2. 任意の $p \in \pi(G)$ と $m, n, d \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ.

$$Ab(G, p^m) \simeq \mathcal{S}_p(G, p^n) \simeq \mathcal{N}(G, p^d) \simeq \mathcal{S}_p(G)$$

n を素数 p の冪にすれば (2) より様々な $\mathcal{H}(G, n)$ は Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$ とホモトピー同値になる. これは将来的に $\mathcal{S}_p(G)$ の可縮性に関する Quillen 予想 (cf. [7, page 118]) を考察する際に様々な視点を与えてくれる. また (1) のホモトピー同値性の証明では poset map である包含写像 $\varphi: \mathcal{N}(G, n) \hookrightarrow \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ を応用する. 即ち任意の $K \in \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ に対して逆像 $\varphi^{-1}(\mathcal{N}_{\pi(n)}(G)_{\leq K}) \subseteq \mathcal{N}(G, n)$ が可縮であることを示し, Quillen のファイバー定理 (cf. [7, Theorem 4.2.1]) を用いてホモトピー同値性を導く. (2) の論法も同様である.

3 $\mathcal{N}(G, n)$ の d -cover

任意に $K \in \mathcal{N}(G, n)$ をとる. 定義から $\exp(K)|n$ より任意の $y \in K$ に対して $\pi(o(y)) \subseteq \pi(n)$ および $\pi(K) \subseteq \pi(n)$ が成り立つ. 任意に $q \in \pi(K)$ を選び $K_q \in \text{Syl}_q(K)$, $x \in Z(K_q)$, $o(x) = q \in \pi(n)$ をとると K のべき零性から $K \subseteq C_G(x)$ となる. 即ち $K \in \mathcal{N}(C_G(x), n)$ ($x \in L_q(G)^\sharp$, $q \in \pi(n)$) である. 以上の議論から次を得る.

$$\mathcal{N}(G, n) = \bigcup_{p \in \pi(n)} \bigcup_{x \in L_p(G)^\sharp} \mathcal{N}(C_G(x), n)$$

これを $\mathcal{N}(G, n)$ の **cover** と呼ぶことにする. 特にある $x_1, \dots, x_d \in \bigcup_{p \in \pi(n)} L_p(G)^\sharp$ が存在し

$$\mathcal{N}(G, n) = \mathcal{N}(C_G(x_1), n) \cup \mathcal{N}(C_G(x_2), n) \cup \dots \cup \mathcal{N}(C_G(x_d), n) \quad (3.1)$$

となるとき, これを $\mathcal{N}(G, n)$ の **d -cover** と呼ぶ. $\{\langle y \rangle \mid y \in L_n(G)\} \subseteq \mathcal{N}(G, n)$ より (3.1) から

$$L_n(G) = L_n(C_G(x_1)) \cup L_n(C_G(x_2)) \cup \dots \cup L_n(C_G(x_d)) \quad (3.2)$$

が成り立つことにも注意する. ここでは詳細に立ち入らないが, 次のような用語と量を用意しておくことは有効である.

定義 3.1 (Definition 3.1 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の d -cover (3.1) の記号を用いる.

1. 各 $1 \leq j \leq d$ に対して次が成り立つとき d -cover (3.1) を **irreducible** と呼ぶ.

$$\mathcal{N}(G, n) \neq \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} \mathcal{N}(C_G(x_i), n)$$

一方 irreducible でない d -cover (3.1) を **reducible** と呼ぶ.

2. d -cover (3.1) を満たす最小の自然数 $d \in \mathbb{N}$ を $\ell_{G,n}$ で表す.

d -cover (3.1) を持つ $\mathcal{N}(G, n)$ の可縮性について次の命題が成り立つ.

命題 3.2 (Proposition 3.3 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の d -cover (3.1) の下で次が成り立つ.

1. 各 $1 \leq i \leq d$ に対して $\mathcal{N}(C_G(x_i), n)$ は可縮である.
2. 部分集合 $\{x_i \mid 1 \leq i \leq d\} \subseteq G$ で生成された G の部分群 $\langle x_i \mid 1 \leq i \leq d \rangle$ がベキ零部分群ならば $\mathcal{N}(G, n)$ は可縮である. 特に $x_1, x_2, \dots, x_d$ が互いに可換ならば $\mathcal{N}(G, n)$ は可縮である.

(1) は poset map $\varphi : \mathcal{N}(C_G(x_i), n) \rightarrow \mathcal{N}(C_G(x_i), n)$ ($U \mapsto U \langle x_i \rangle$) が $\mathcal{N}(C_G(x_i), n)$ の錐可縮 (cf. [7, Definition 3.3.1]) を引き起こすことを示し, $\mathcal{N}(C_G(x_i), n)$ の可縮性を結論付ける. 一方 (2) は Nerve 定理 (cf. page 162 in [7]) を応用して証明される. 部分群複体において Nerve 定理は非常に有効な手段である.

4 $\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover

$\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover (4.1) を考える.

$$\mathcal{N}(G, n) = \mathcal{N}(C_G(s), n) \quad (s \in L_p(G)^\sharp, p \in \pi(n)) \quad (4.1)$$

命題 3.2.1 より $\mathcal{N}(G, n)$ は可縮である.

命題 4.1 (1-cover の特徴付け; Theorem 4.5 in [3]) 次は同値である.

1. $\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover (4.1) が存在する.
2. G の部分群 $H \leq G$ で $\langle \mathcal{N}(G, n) \rangle \leq H$ かつ $\pi(Z(H)) \cap \pi(n) \neq \emptyset$ なるものが存在する.

実際に (1) を仮定する. $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ を $\mathcal{N}(G, n) = \mathcal{N}(C_G(s), n)$ の極大元全体の集合とすると $\langle \mathcal{N}(G, n) \rangle = \langle \mathcal{N}(C_G(s), n) \rangle = \langle Q_1, \dots, Q_\ell \rangle$ となる. このとき $[Q_i, s] = \{e\}$ ($1 \leq i \leq \ell$) より $Q_i \langle s \rangle \in \mathcal{N}(C_G(s), n)$ となる. ここで Q_i の極大性より $s \in Q_i$ および $s \in \bigcap_{i=1}^\ell Z(Q_i) \leq Z(\langle \mathcal{N}(G, n) \rangle)$ を得る. そこで $H = \langle \mathcal{N}(G, n) \rangle$ とおくと $o(s) = p \in \pi(Z(H)) \cap \pi(n)$ が成り立つ.

逆に (2) を仮定する. 任意に $q \in \pi(Z(H)) \cap \pi(n) \neq \emptyset$ をとると, ある $s \in Z(H)$ が存在し $o(s) = q \in \pi(n)$ となる. このとき $s \in L_q(G)^\sharp$ であり $\langle \mathcal{N}(G, n) \rangle \leq H \leq C_G(s)$ が成り立つ. よって $\mathcal{N}(G, n) = \mathcal{N}(C_G(s), n)$ を得る.

$\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover (4.1) は条件が強いため, 上記のように容易に特徴付けがなされる.

注意 4.2 $\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover (4.1) が存在したとする. $H := \langle \mathcal{N}(C_G(s), n) \rangle = \langle \mathcal{N}(G, n) \rangle \trianglelefteq G$ とおくと $\langle s \rangle \leq H \leq C_G(s)$ となる. 特に $C_p \cong \langle s \rangle \leq Z(H) \trianglelefteq G$ より $\langle s \rangle \leq O_p(Z(H)) \leq O_p(G)$ である. よって $\mathcal{N}(G, n)$ の 1-cover (4.1) が存在すれば $O_p(G) \neq \{e\}$ が得られる.

5 $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover

$\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) を考える.

$$\mathcal{N}(G, n) = \mathcal{N}(C_G(s), n) \cup \mathcal{N}(C_G(t), n) \quad (s \in L_p(G)^\sharp, t \in L_q(G)^\sharp, p, q \in \pi(n)) \quad (5.1)$$

命題 3.2.1 より $\mathcal{N}(C_G(x), n)$ ($x = s, t$) は可縮である. (3.2) より次の関係も重要である.

$$L_n(G) = L_n(C_G(s)) \cup L_n(C_G(t)) \quad (5.2)$$

5.1 $\mathcal{N}(G, p^d)$ の可縮性

定理 5.1 (Theorem 5.3 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする. ある素数 $p \in \pi(G)$ と $d \in \mathbb{N}$ に対して $n = p^d$ とする.

1. $[s, t] \neq e$ ならば $p = 2$ かつ $\langle s, t \rangle \cong D_8$ となり $\mathcal{N}(G, 2^d)$ は可縮である.
2. $[s, t] = e$ ならば $\mathcal{N}(G, p^d)$ は可縮である.

(1) における結論「 $p = 2$ かつ $\langle s, t \rangle \cong D_8$ 」は性質 (5.2) のみを用いて導かれる. また $\mathcal{N}(G, 2^d)$ の可縮性は $\langle s, t \rangle \cong D_8$ がべき零群であることから, 命題 3.2.2 を用いて導かれる. (2) も同様に $\langle s, t \rangle$ がアーベル群 (べき零群) であることから導かれる. 命題 2.1 より $\mathcal{N}(G, p^d)$ の可縮性は Brown 複体 $S_p(G)$ の可縮性でもある.

5.2 シロー部分群

定理 5.2 (Theorem 5.4 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の既約 2-cover (5.1) が存在したとする. 素数 $p \in \pi(G)$ に対して $n = |G|_p$ とする. このとき G の p -ランク $m_p(G)$ は 2 以上である. 特に G のシロー p -部分群は非巡回群である.

実際に s と t の位数は共に p である. また (5.1) の既約性から $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \{e\}$ である. $\text{Syl}_p(G) \subseteq \mathcal{N}(G, n)$ より次が成り立つ.

$$\text{Syl}_p(G) = \underbrace{(\mathcal{N}(C_G(s), n) \cap \text{Syl}_p(G))}_{\mathcal{D}_s} \cup \underbrace{(\mathcal{N}(C_G(t), n) \cap \text{Syl}_p(G))}_{\mathcal{D}_t}.$$

再び (5.1) の既約性から $\mathcal{D}_s = \text{Syl}_p(C_G(s))$ および $\mathcal{D}_t = \text{Syl}_p(C_G(t))$ を得る. ここでシロー部分群の個数を数えると次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 1 &\equiv |\text{Syl}_p(G)| = |\text{Syl}_p(C_G(s))| + |\text{Syl}_p(C_G(t))| - |\text{Syl}_p(C_G(s)) \cap \text{Syl}_p(C_G(t))| \\ &\equiv 1 + 1 - |\text{Syl}_p(C_G(s)) \cap \text{Syl}_p(C_G(t))| \pmod{p}. \end{aligned}$$

よって $P \in \text{Syl}_p(C_G(s)) \cap \text{Syl}_p(C_G(t)) \neq \emptyset$ が存在する. このとき P の極大性から $Z(P) \geq \langle s, t \rangle = \langle s \rangle \times \langle t \rangle \cong C_p \times C_p$ が導かれる.

5.3 最大正規 $\{p, q\}$ -部分群

定義 5.3 (page 218 in [1]) 有限群 G の最大べき零正規部分群をフィッティング部分群といい $F(G)$ で表す.

定理 5.4 (Theorem 5.9 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする. このとき $F(G) \cap O_{\{p, q\}}(G) \neq \{e\}$ が成り立つ.

この定理は最小位数の反例を用いて証明される.

5.4 $\mathcal{N}(G, n)$ の $\mathbb{Z}$ 上ホモロジー

定理 5.5 (Theorem 5.11 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする. このとき複体 $\mathcal{N}(G, n)$ は連結である.

実際に命題 3.2.1 から $\mathcal{N}(C_G(s), n)$ と $\mathcal{N}(C_G(t), n)$ は可縮よりこれらは共に連結である. よって定理を証明するためには $\mathcal{N}(C_G(s), n)$ と $\mathcal{N}(C_G(t), n)$ が繋がることを示せばよい. この場合繋がらないと仮定して矛盾を導くのである.

次の Mayer-Vietoris 列はよく知られている.

命題 5.6 (Mayer-Vietoris 列; cf. Theorem 25.1 in [6]) X を単体複体とする. A と B を X の部分複体で $X = A \cup B$ を満たすものとする. このとき次の完全系列が存在する.

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) &\longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \\ &\longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) において $X = \mathcal{N}(G, n)$, $A = \mathcal{N}(C_G(s), n)$, $B = \mathcal{N}(C_G(t), n)$ とおくと $X = A \cup B$ であり, また $A \cap B = \mathcal{N}(C_G(\langle s, t \rangle), n)$ が成り立つ. よって Mayer-Vietoris 列の応用が可能である. ここで A, B は共に可縮であり, また定理 5.5 から X は連結であることから次が成り立つ.

$$\begin{aligned} H_0(A) &= \mathbb{Z}, \quad H_n(A) = \{0\} \quad (n \geq 1) \\ H_0(B) &= \mathbb{Z}, \quad H_n(B) = \{0\} \quad (n \geq 1) \\ H_0(X) &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

よって $n \geq 2$ ($n-1 \geq 1$) に対して Mayer-Vietoris 列から次の完全列を得る.

$$\underbrace{H_n(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_n(B)}_{\{0\}} \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_{n-1}(B)}_{\{0\}}$$

即ち $H_n(X) \cong H_{n-1}(A \cap B)$ ($n \geq 2$) が成り立つ. 1 次のホモロジーについては再び Mayer-Vietoris 列から次の完全列を得る.

$$\underbrace{H_1(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_1(B)}_{\{0\}} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow \underbrace{H_0(A)}_{\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H_0(B)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_0(X)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{0\}$$

ここで一般に環上の有限生成加群 M_i に関する完全列 $\{0\} \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \{0\}$ に対して $\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rank}(M_i) = 0$ が成り立つ. よって上記の状況の下で次が成り立つ.

$$\text{rank}(H_1(X)) - \text{rank}(H_0(A \cap B)) + 2 - 1 = 0.$$

即ち $\text{rank}(H_1(X)) = \text{rank}(H_0(A \cap B)) - 1$ となり $H_1(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(A \cap B)$ が導かれる. 以上まとめると次の定理を得る.

定理 5.7 (Theorem 5.13 in [3]) $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする. このとき次が成り立つ.

1. $H_n(\mathcal{N}(G, n)) \cong H_{n-1}(\mathcal{N}(C_G(\langle s, t \rangle), n))$ ($n \geq 2$).
2. $H_1(\mathcal{N}(G, n)) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(\mathcal{N}(C_G(\langle s, t \rangle), n))$.

参考文献

- [1] D. Gorenstein, “Finite Groups”, Chelsea 1980, 2nd edition.
- [2] B. Huppert, “Character theory of finite groups”, De Gruyter Expositions in Mathematics, **25**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.

- [3] N. Iiyori and M. Sawabe, d -covers of posets of nilpotent subgroups, preprint.
- [4] N. Iiyori and M. Sawabe, Quiver representations of extended subgroup posets of finite groups, to appear in *Hokkaido Math. J.*
- [5] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25** (1991), 413–416.
- [6] J.R. Munkres, “Elements of algebraic topology”, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [7] S.D. Smith, “Subgroup complexes”, Mathematical Surveys and Monographs, **179**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.