

大気境界層におけるストリーク構造の
生成・発達・崩壊過程に関する数値的研究

日比野研志

京都大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻

概要

本研究では大気エクマン層内に普遍的に存在するストリーク構造の時間発展の解析を行った。観測や数値実験を用いた先行研究により、ストリーク構造がエクマン層内の乱流輸送の大部分を担っていることが示されており、ストリーク構造の研究は境界層研究の中でも重要な位置を占めている。ストリーク構造は数十分程度の時間スケールで生成消滅を繰り返す非定常な流れ構造であり、その生成・発達・崩壊といった各時間フェイズにおける時間発展の物理メカニズムの理解が必要である。本研究ではラージ・エディ・シミュレーション (LES) や線形安定性解析を用いてストリーク構造の生成メカニズムを考察した。この結果、最適摂動と呼ばれるノンモーダルな不安定によってストリーク構造の初期の時間発展が適切に表現できることが明らかになった。また、中立エクマン層においては水平方向に大きなスケールを持ちエクマン層深さの全体にわたる変曲点不安定ノーマルモードが出現することが線形理論で予測されているにもかかわらず、LES などの数値計算ではこのようなモードが出現しないという矛盾の原因も考察した。線形安定性解析において大気エクマン層に固有のキャッピング逆転層の効果を取り入れ、キャッピング逆転層が変曲点不安定ノーマルモードの発達を抑制することが示された。多くの LES を用いた先行研究ではキャッピング逆転層を境界層の上部に設定しており、その影響により変曲点不安定ノーマルモードの発達が阻害されていたと考えられる。また、最適摂動を初期条件として与えてストリーク構造の非線形時間発展を計算し、ストリーク構造が崩壊して別種の渦構造が形成されていく過程を解析した。ストリーク構造の非線形時間発展は現時点ではほとんど明らかになっていないテーマであり、今回得られた崩壊過程に関する結果は今後の研究の端緒となりうる。

目次

第1章	はじめに	7
1.1	大気境界層	7
1.2	大気境界層内の乱流輸送	8
1.3	流れの秩序構造	9
1.3.1	対流ロール構造	9
1.3.2	ストリーク構造	10
1.4	研究の目的	13
第2章	ラージ・エディ・シミュレーションを用いたストリーク構造の解析	15
2.1	大気エクマン層内のストリーク構造の数値実験の先行研究	15
2.2	ラージ・エディ・シミュレーションの設定	16
2.2.1	支配方程式	16
2.2.2	実験設定	19
2.2.3	離散化と数値スキーム	20
2.3	数値実験の妥当性の検証	21
2.3.1	エクマン境界層の基本的な性質	21
2.3.2	ストリーク構造の空間構造	26
2.4	ストリーク構造のエネルギー論	29
2.4.1	解析方法	29
2.4.2	結果	31
2.5	ミニマル領域 LES によるストリーク構造の時間発展の解析	33
2.5.1	ミニマル領域 LES の実験設定	34
2.5.2	結果	37
2.6	ストリーク構造発達の物理的解釈	39
2.6.1	オーアメカニズム	40
2.6.2	ロールメカニズム	40
2.6.3	オーアメカニズムとロールメカニズムの相乗効果	41
2.7	議論とまとめ	43
第3章	エクマン境界層の安定性解析	47
3.1	エクマン層内の線形安定性解析の先行研究	47
3.1.1	ノーマルモード不安定	47
3.1.2	ノンモーダル不安定と最適摂動	48

3.1.3	？の結果	50
3.2	研究目的	51
3.3	線形安定性解析の設定	51
3.3.1	支配方程式	51
3.3.2	基本場とパラメータの設定	54
3.3.3	ノーマルモードの計算	55
3.3.4	最適摂動の計算	56
3.4	ノーマルモードと最適摂動の基本的な性質	60
3.4.1	変曲点不安定ノーマルモード	60
3.4.2	最適摂動	63
3.5	キャッピング逆転層が増幅ノーマルモードに与える影響	66
3.5.1	計算設定	67
3.5.2	結果	67
3.6	議論とまとめ	70
第 4 章	LES で得られた風速プロファイルを用いた安定性解析	73
4.1	線形安定性解析の手法	73
4.2	エディ・ターンオーバータイムによる発達可能時間の制限	73
4.3	線形安定性解析の結果	75
4.4	議論とまとめ	78
第 5 章	最適摂動の非線形時間発展におけるストリーク構造の発達・崩壊	81
5.1	ストリーク構造の非線形時間発展に関する先行研究	81
5.2	数値実験の設定	81
5.3	結果	84
5.3.1	2次元計算におけるストリーク構造の時間発展に対する非線形効果	84
5.3.2	非線形効果によるストリーク構造の3次元的な不安定性	86
5.4	議論とまとめ	92
第 6 章	まとめ	93
付 録 A		101
A.1	LES での下端境界条件の設定	101
A.2	ミニマル領域 LES で見られたストリーク構造の発達	102
A.3	ノーマルモードの非直交性とノンモーダル不安定	106
A.4	チェビシェフ多項式	107
A.5	必要計算精度の低減	108
A.6	随伴方程式の導出	109
参考文献		111

第1章 はじめに

本博士論文では大気境界層中のストリーク構造と呼ばれる流れの秩序構造の生成・発達・崩壊といった時間変化の様子を様々な数値的手法を用いて詳細に解析する。

最初に1章では博士論文のメインテーマであるストリーク構造に関する基礎的な知見や観測による先行研究などの研究背景について説明する。ここでは2–5章の各論に共通となる前提情報のみを紹介することにし、各論に関する詳細な導入は各章の第1節に譲る。

最初に1.1節では研究対象であるストリーク構造が存在する大気境界層についての概説を行う。次に1.2節でストリーク構造の持つ重要な働きである乱流輸送について説明を行う。1.3節では大気境界層内に存在し、効率的な乱流輸送のために重要な役割を果たしている流れの秩序構造の紹介をする。ここで本研究のメインテーマとなるストリーク構造の特性について述べる。最後に1.4節で本博士論文の全体の目的と章ごとの構成を述べる。

1.1 大気境界層

大気境界層とは大気の中で地面からの影響を直接受ける大気層のことであり、地面と接し高度数百 m から 2000m 程度の高度までの層を指す。人間の生活圏はほとんどが大気境界層内にあるため、境界層内の気象学は人間の生活に密接な学問として非常に重要であり、これまでに多くの研究が行われてきた。境界層内の特性はそれより上方の自由大気のものとは大きく異なっており、境界層内に固有の気象現象が多く存在している。境界層内の気象の特徴としては以下のような点が挙げられる。括弧内は各特徴に固有のキーワードである。

- 層内はほぼ常に乱流状態にあり決定論的な予測が不可能 (乱流, 流れの安定性, 流れの秩序構造)。
- 地面との直接の相互作用がある (複雑地形, 植生などの地表面の特性の影響)。
- 放射過程が重要となる (放射冷却, 霜・霧, 地表面アルベド)。
- 上部の自由大気と地面との物質交換の中継をする (運動量, 水蒸気, 二酸化炭素等の乱流輸送)。

このように境界層気象学が扱う現象は多岐に渡る。

本研究で扱うストリーク構造は流れの秩序構造の一種であるが、流れの秩序構造や乱流を生み出す不安定は境界層の力学的 (メカニカル) な特性に由来するものと熱力学的な特性に由来するものの2つに大きく分けられる。

まず力学的な特性であるが、大気境界層内の風速は上端では自由大気と等しい風速を持つものに対して下端では粘着条件によりゼロとなっている。また、境界層は大気全体から見れば薄い層であるために境界層内では風速の鉛直シアが非常に大きくなっている。この大きな鉛直シアはその不安定性により乱れを作りだし、境界層内を乱流状態にする。風速シアによる不安定をメカニカルな不安定と呼ぶことがあり、本論文でもそのように呼ぶことにする。

次に境界層の熱力学的な特徴を示す。図 1.1 は境界層の厚さの 1 日の時刻変化を示しており、境界層は大きく分けて日中の混合層 (Convective Mixed Layer) と夜間の安定境界層 (Stable Boundary Layer) に分けられる。日中の太陽放射による加熱と夜間の放射冷却によって地表面の温度は日変化し、地面に接している境界層も加熱あるいは冷却される。それに伴って境界層内の成層状態は変化して、境界層内部の特性は大きく変化することになる。日中の不安定成層時には乱流が生じるが、この乱流を引き起こす不安定を本論文では熱的不安定と呼ぶことにする。

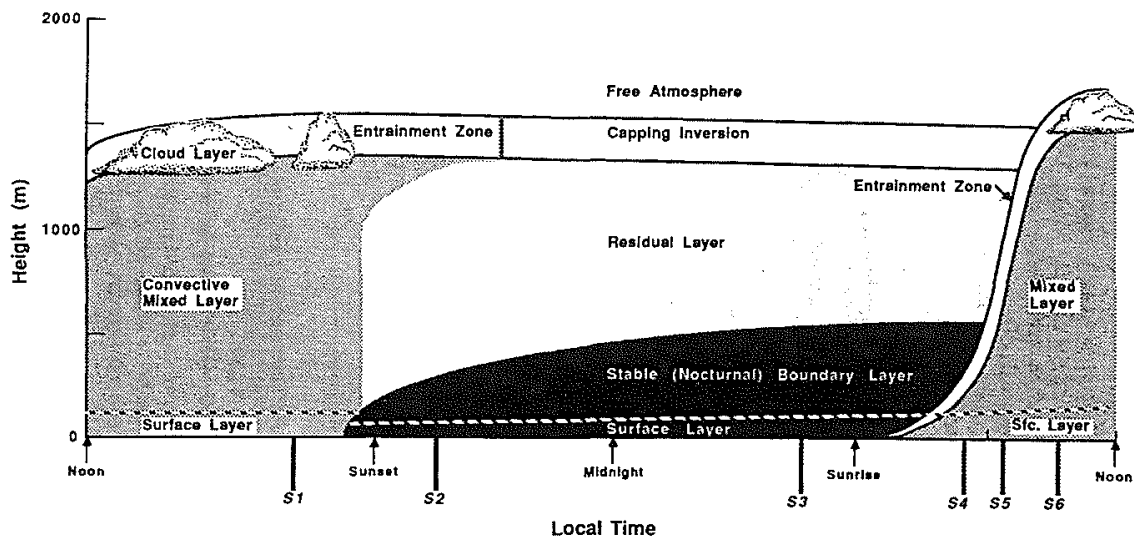


図 1.1: 境界層の厚さの日変化と各時刻における境界層の呼び方。?より引用。

1.2 大気境界層内の乱流輸送

前述したように大気境界層の重要な役割として大気全体と陸面や海面などの地表面との接点としての役割がある。例えば、大気中に存在する水蒸気や二酸化炭素は地表面や植生において放出あるいは吸収されており、大気境界層を通して大気全体と交換をしている。この場合に重要となるのが境界層内での物理量を輸送する効率、すなわちフラックスである。境界内の乱流の働きによってこのフラックスが増大し輸送が効率化することが知られており、この働きを乱流輸送と呼ぶ。

また、乱流は水蒸気や二酸化炭素などの物質を輸送するのみならず、運動量も輸送する。分子粘性による水平運動量の鉛直方向への運動量輸送フラックス $\nu \partial u / \partial z$ は通常は非常に小さいが、乱流による輸送 $\overline{uw}$ は大きい (ν は分子粘性係数、 u, w は水平と鉛直風速、 z は鉛直座標、オーバーラインは平均を表す)。乱流による運動量の輸送が存在しなければ境界層の厚さは数 mm から数 cm 程度になってしまうのである。

このように乱流輸送は境界層の気象学において非常に重要なものであるが、乱流は初期条件敏感性という厄介な特性を持っている。境界層内の空気の流れを長期間に渡って予報することは不可能であり、ある瞬間における流れの状態を完全に知ることは無意味である。そのために境界層の研究は流れの統計的な性質を求めることに重点が置かれてきた。

1.3 流れの秩序構造

しかし、1960 年代以降になされた流れの可視化実験や計算機シミュレーションにより激しく乱れた流れの中に特徴的なスケールやパターンを持つ構造が存在することが明らかになってきた。これらは秩序構造 (organized structure) あるいは組織構造 (coherent structure) と呼ばれ、乱流研究者の注目の的となった (木田・柳瀬, 1999)。秩序構造の定義は完全には定まっていないが、? による定義を借りれば「少なくとも 1 つの主要な変数 (速度、密度、温度など) が流れの最小スケールよりもはるかに大きな空間 (あるいは時間) スケールにわたって、自分自身あるいは別の変数との間で大きな相関を示すような 3 次元流れ領域」である。

木田・柳瀬 (1999) や ? によって紹介されている秩序構造はもっぱら実験室流体のような低レイノルズ数の乱流内に出現するものであるが、大気のような高レイノルズ数の流体にも同様の構造は存在している。そして、この大気境界層内の流れの秩序構造が乱流輸送にとって重要な役割を果たしていることが多くの先行研究によって示されている (例えば、?)。秩序構造による乱流輸送の概念は基本的には単純である。例えば熱輸送の場合ならば、流れの上昇域に高温域が、下降域に低温域が対応していれば (すなわち鉛直流と温度が相関を示せば) 全体の温度フラックスは上向きとなる。同様に上昇流域に水平流の低速域 (スweep と呼ばれる)、下降流域に水平流の高速域 (イジェクション) が対応していれば正味の運動量輸送が下向きとなる。

前述したように大気境界層内の流れの秩序構造は大きく分けて熱的不安定に由来する構造とメカニカルな不安定に由来する構造の 2 つに分けられる。代表的なものはそれぞれ対流ロール構造とストリーク構造であり、それらの詳細を以下の節で見ていくことにする。

1.3.1 対流ロール構造

日中の混合層 (図 1.1 参照) の内部では地表面からの加熱により不安定成層が形成されており乱流が発生する。この混合層内には対流ロール構造と呼ばれる秩序構造が形成されることが知られている。また、冷涼な陸域からの寒気の吹き出しが比較的暖かい海上に流れ込んだ時にも同様のロール構造が形成される (図 1.2(a))。対流ロール構造が発生した時に

環境場に十分な水蒸気が存在していれば上昇域に雲が形成されて筋状の雲が形成されることがある (図 1.2(b)). この現象はクラウドストリートと呼ばれ, 冬季の日本海にもしばしば発生しており, 衛星写真等で明瞭に見て取れる.

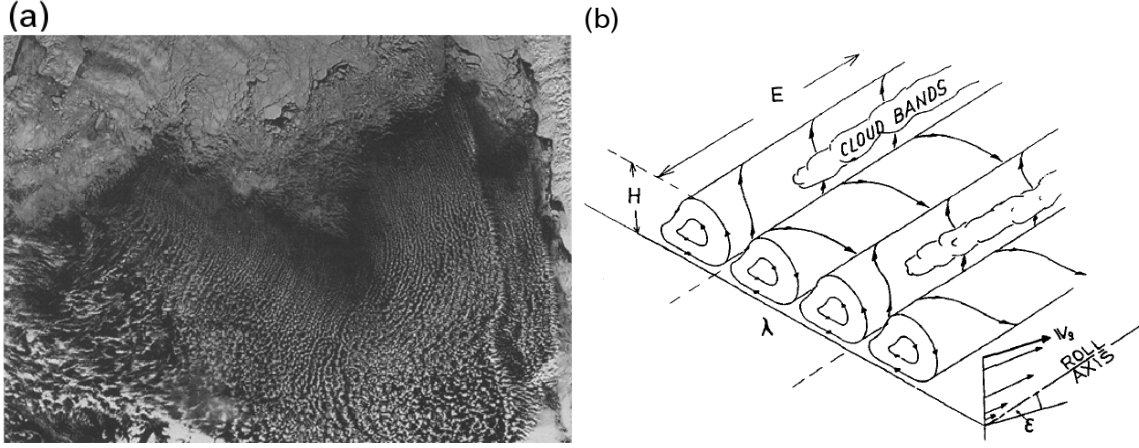


図 1.2: (a) バレンツ海上に発生したクラウドストリートの衛星画像: 暖かいバレンツ海上に冷たい空気が流入して不安定成層が形成され, 対流ロール構造が発達している. (b) 対流ロールとクラウドストリートの概念図: 対流ロール構造は鉛直循環流と水平流が共に含まれており, 流れはらせんを描いている. 上昇域には雲が発生することがあり雲域が長く列上に並ぶ. 共に?より引用.

対流ロール構造に関しては本研究ではこれ以上は扱わない. ?がよくまとまったレビュー論文であるので参照してもらいたい.

1.3.2 ストリーク構造

ここでは大気が中立成層あるいは安定成層をしている場合にメカニカルな不安定によって発達してくるストリーク構造について紹介する. まず, 境界層内の成層状態の指標として勾配リチャードソン数

$$R_i = \frac{g \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (1.1)$$

を導入する. ここで g は重力加速度, θ は温位, u, v は水平速度を表す. $R_i > 0$ なら安定成層, $R_i = 0$ なら中立成層, $R_i < 0$ なら不安定成層に対応している. 境界層内の全域において温位の鉛直勾配がゼロであるような厳密な中立成層というものはめったに出現しないが, 強風時には風速シアーが大きくなることでリチャードソン数の値はゼロに近づく. これは熱的な安定・不安定よりもメカニカルな不安定が優勢であることに対応しており, このような中立に近い境界層においてはストリーク構造が出現する.

一方、安定成層は図 1.1 で示された夜間の安定境界層などで実現する．安定成層時には密度成層は擾乱の発達を抑制する効果があるため，このような条件下で発達するストリーク構造はメカニカルな不安定に由来すると考えられる．ただし，安定成層によってストリーク構造の発達が抑制されることと重力波とストリーク構造との相互作用が起こるために，ストリーク構造の特性は中立成層時とは異なる可能性がある．このため，本研究では安定成層時のストリーク構造に関しては扱わない．

実際の大気の観測によって得られるストリーク構造の知見はタワーによる一点観測によるものが多く，空間構造に関する知見は少なかった．しかし，近年になってドップラーライダーを用いた観測によってストリーク構造の可視化ができるようになり，その空間構造を調べることが可能になってきた(?, ?, 藤吉ほか, (2008))．図 1.3 は?で示されたストリーク構造の観測結果の一例であり，水平風速が高速の領域と低速の領域が水平断面で交互に縞状に並んでいる様子が見て取れる．

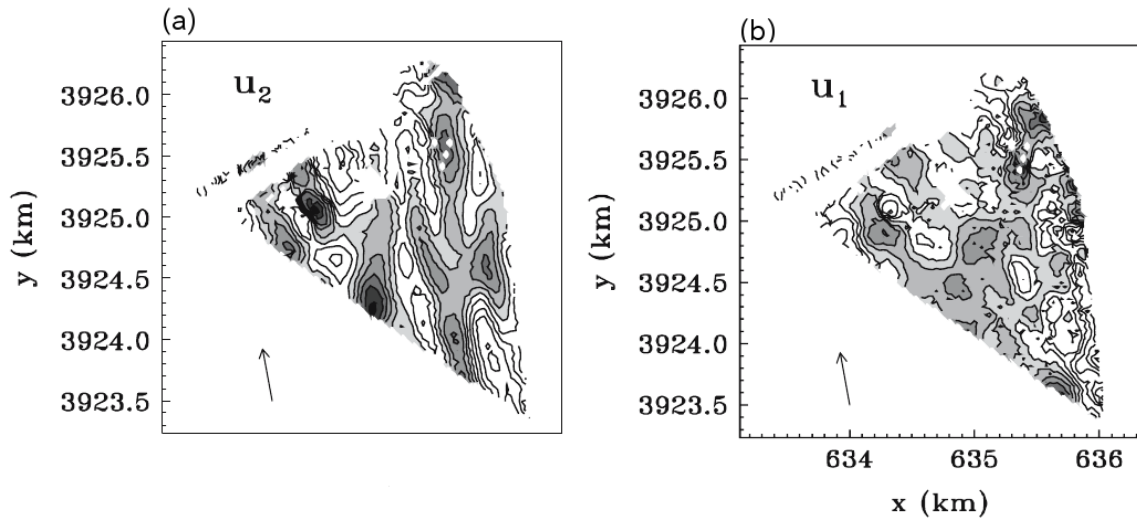


図 1.3: ドップラーライダーによって捉えられたストリーク構造の空間分布．(a) 流れの主流方向の速度成分，(b) 主流に直交する速度成分．明るい領域が高速域に暗い領域が低速域に対応している．図の加工の都合で (a) の横軸の目盛が無いが (b) と同じ目盛である．?より．

ストリーク構造の特性は簡単にまとめると以下のような．

- ストリークが伸びる向きはストリーク構造が存在する高度での風向とほぼ等しい．
- 地面近くに局在しており，鉛直方向の広がり数百 m 程度である．
- 対流ロール構造の水平間隔は数千 m 程度であるのに対し，ストリーク構造は数百 m 程度でありおよそ 1/10 である．また，ストリーク構造の水平間隔が環境場のどのような物理量に依存するのかについては様々な主張が存在している (境界層の高さ，風速，地面との摩擦応力，レイノルズ数，成層状態など)．

- 同じ環境場であればストリーク構造の間隔は観測される高度と共に広がる (図 1.4).

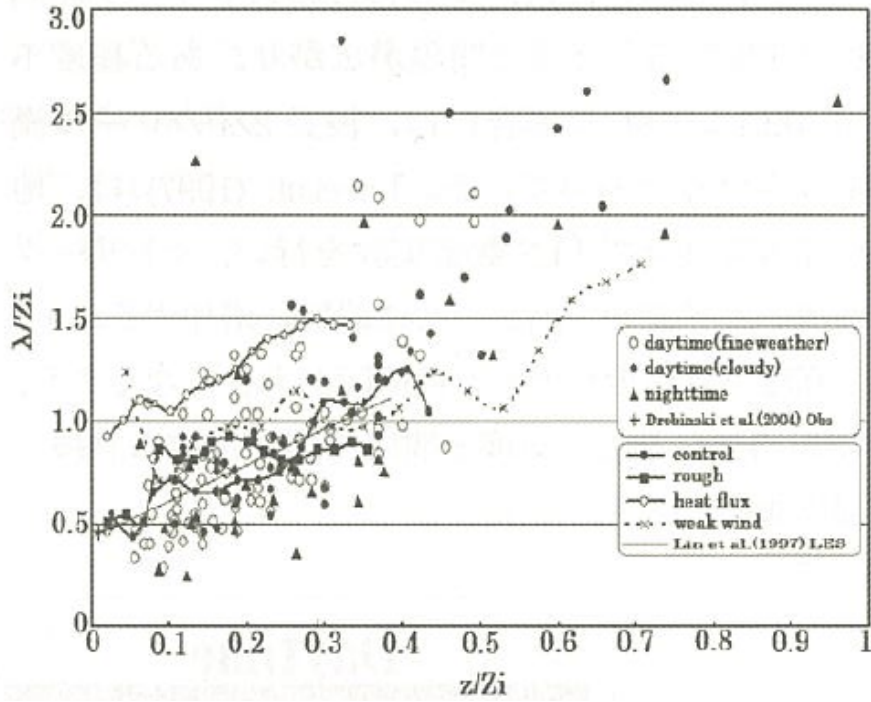


図 1.4: 観測と数値実験によって得られたストリーク構造の間隔と高度との関係. 横軸は境界層の厚さ Z_i で規格化したストリーク構造の高度, 縦軸は境界層の厚さ Z_i で規格化したストリーク構造の間隔. 高度が上がるにしたがってストリークの間隔が広がっている. 藤吉ほか (2008) より.

ストリーク構造は一般には水平風速のパターンがストリーク状に長く伸びている流れの秩序構造と解釈されるが, ストリークに直交する鉛直循環を伴っている場合も多い. このような運動を分離して扱うために, ストリーク構造の軸の方向 (ストリークの伸びている方向) の運動成分を DS (Down Stream) 成分, 軸に直交する水平成分と鉛直成分を合わせて OT (Over Turning) 成分と呼ぶことにする. 文献によっては運動の DS 成分をストリーク構造, OT 成分をロール構造と呼んでいるものもあるが, 本論文ではメカニカルな不安定によって生じる秩序構造全体をストリーク構造と呼ぶことにする. この用語の使い方に従えば, ストリーク構造の DS 成分 (図 1.3a) には長く伸びたストリークが明瞭に見られるが, OT 成分 (図 1.3b, ただし, この図はストリークの軸に直交する水平風速のみ) にはほとんど見られないと言える.

ここまで見てきた対流ロール構造とストリーク構造の性質の違いを表 1.1 にまとめた (藤吉ほか (2008), ?などを参考).

表 1.1: 対流ロール構造とストリーク構造の特徴の比較

	水平スケール	鉛直スケール	持続時間	由来	卓越成分
対流ロール	数千 m	境界層全域	数時間から数日	熱的不安定	OT 成分
ストリーク	200m-750m	地面から 250m-900m 程度まで	数十分	メカニカルな不安定	DS 成分

1.4 研究の目的

ストリーク構造を含む秩序構造の研究は大きく分けて以下の 2 つの方向性に分けられる。

- (1) 秩序構造の力学を理論的に明らかにする:
与えられた環境場の下でどのような構造が発達するのか? 乱流輸送を通じて環境場にどのような影響を与えるのか?
- (2) 秩序構造の効果を乱流モデリングに応用する:
秩序構造はスケールが小さく、広大な領域を扱う気象モデルにおいては直接に解像するのは難しい。方向性 (1) の力学の理解をもとにどのようにモデル化するのか?

こうして見ると秩序構造の研究は気象学の中の重要なテーマである「異なるスケール間の相互作用をどのように扱うのか」という問題の一側面と考えられる。

本研究ではストリーク構造の生成・発達・崩壊過程といった時間変化の様子に焦点を当てる。なぜなら、ストリーク構造は数十分程度の時間スケールで生成消滅を繰り返す非定常な流れであるため、時間方向の変化が重要であると考えられるからである。各時間フェイズでのストリーク構造の時間発展には固有の物理的メカニズムが働いていると考えられ、それらを数値的手法によって探っていく。研究の方向性としては上述の方向性の (1) に含まれており、(2) に含まれる秩序構造のモデルへの応用については本論文では扱わない。

最後に以後の各章での内容を簡単に紹介する。2 章では高精度な数値実験を行って境界層内のストリーク構造を再現しその特性を解析する。特にストリーク構造の初期の生成・発達過程の特徴に注目している。3 章では理想化されたエクマン層の線形安定性解析を行い、不安定ノーマルモードと最適摂動の概念を説明する。また、キャッピング逆転層がこの不安定ノーマルモードと最適摂動に与える影響に注目をして解析をする。4 章では 2 章の数値実験で得られた現実的なエクマン層の安定性解析を行い、ストリーク構造の形成メカニズムについてまとめる。5 章では、ストリーク構造が発達した後の非線形時間発展の特徴を述べる。6 章では 2-5 章の結果を踏まえて博士論文全体のまとめを行う。

第2章 ラージ・エディ・シミュレーションを用いたストリーク構造の解析

中緯度から高緯度の大気境界層はコリオリ力の効果により、水平風速の向きが高度が上がるにつれて変化していくエクマン層となっている。渦粘性を定数と仮定して求めた古典的なエクマン層を本論文ではカノニカルエクマン層と呼ぶことにし、以下でエクマン層と呼ぶ時は、コリオリ力によって水平風速の向きが高度と共に変化する一般のエクマン層を指すことにする。

単純シアー流においてもストリーク構造は形成されることが知られているが(?), 大気中のストリーク構造の形成にとってはエクマン層の特性が重要な役割を果たしていることが後で示される。したがって、以下ではコリオリ力の効果を含んだエクマン層を解析の対象とする。この章ではエクマン境界層のラージ・エディ・シミュレーション (LES) を行ってストリーク構造を再現してその特性を解析する。

最初に1節でストリーク構造を数値シミュレーションによって研究した先行研究を紹介する。次に2節で本研究で用いる LES の設定を述べる。3節では LES で得られた中立成層エクマン層の基本的な性質や抽出されたストリーク構造の特性を調べ、先行研究の結果と比較することで本研究で用いた LES の妥当性を検証する。4節ではストリーク構造のエネルギー論を解析し、ストリーク構造の水平波長やストリークの伸びる方向がどのように決まるのかを考察する。5節ではミニマル領域 LES によってストリーク構造形成の時間発展の様子を明らかにする。6節ではストリーク構造発達の物理的なメカニズムについて考察する。最後に7節で LES を用いて得られた結果をまとめる。

2.1 大気エクマン層内のストリーク構造の数値実験の先行研究

1章でも述べたようにストリーク構造に関する観測はタワーを利用したものか、あるいは近年になって行われるようになったドップラーライダーによるものであって、データの集積は多くない。そのため、現在得られているストリーク構造に関する知見の多くは数値実験によってもたらされている。

境界層の数値実験を行っている多くの先行研究において風速分布のパターンがストリーク状になる流れ構造が報告されているが、この中には熱的不安定によって生じる対流ロール構造も含まれている。ここでは中立成層エクマン層の内部でメカニカルな不安定によって生じたストリーク構造の研究に絞って紹介する。Lin et al. (1996, 1997) では中立成層

エクマン層の LES を行い、ストリーク構造の間隔の高度依存性やストリーク構造の 3 次元空間構造を解析している。ストリーク間隔に関しては図 1.4 に示されているように、高度にほぼ線形に依存するような結果が得られている。しかし、3 次元構造は非常に複雑であり、普遍的な描像を確立するには至っていない。また、地面の粗度といった環境場の条件がストリーク構造に与える影響についても考察している。

?, ?, ? では同一の中立成層エクマン層の LES のデータセットを用いてストリーク構造の様々な解析を行っている。コンディショナルサンプリングや経験的直交関数展開といった手法を用いてストリーク構造を抽出して、その空間構造を解析している。この解析によってストリーク構造はすべての領域で運動量輸送をしているのではなく、より小スケールのイジェクションやスweepの領域がストリーク構造の中に埋め込まれていることが示された。? では観測で得られたストリーク構造との比較も行っている。

しかし、これらの先行研究にはいくつかの問題点が存在している。

- ストリーク構造の空間構造の平均的な描像に着目しており時間変化がほとんど解析されていない。
- ストリーク構造の抽出方法が体系的でなく、ストリーク構造の水平波長やストリーク構造の伸びる方向といったストリーク構造の特性がどのように決まっているのかが明解でない。

唯一、? では中立成層エクマン層の LES を行い、得られたストリーク構造の時間発展の考察を行っている。しかし、この先行研究で述べられたストリーク構造の時間発達の様子は単一の事例でしか示されておらず、その時間発展の特性が普遍的なものかは明らかでなかった。

本研究では先行研究の問題点を改良してストリーク構造の解析を体系的に行う。具体的には以下の解析を行う。

- ストリーク構造を抽出して、その特性を決定する重要なパラメータである水平波長とストリークの伸びる方向の違いに応じたエネルギー解析を行う。
- エネルギー的に最も有利なストリーク構造の時間発展をミニマル領域 LES によって解析する。

2.2 ラージ・エディ・シミュレーションの設定

2.2.1 支配方程式

前述したように大気境界層内は乱流状態になっているため大気エクマン層の数値実験には乱流モデルが必要である。気象モデルで用いられる乱流モデルとしては大きく分けて以下の 2 種類が存在している。

- レイノルズ平均モデル RANS (Raynolds-Averaged Navier-Stokes equations)

● ラージ・エディ・シミュレーション (Large Eddy Simulation - LES)

日常の天気予報等に用いられる気象モデルは格子間隔が大きいいため RANS を用いる。しかし、RANS はレイノルズ平均された物理量を計算するためのスキームであり、本研究で扱うような秩序構造の運動は陽には表現されず、パラメタライズされている。そのため、秩序構造の時間空間構造を陽に再現するためには LES を用いる必要がある。LES は乱流状態になっている流れの非定常時間発展をシミュレートするために用いられる手法であり、基本的な発想は格子サイズ以下の流れをパラメタライズして解像される流れに与える影響を見積もるようになっている。

用いる方程式系はブシネスク近似を用いたナビエ・ストークス方程式と連続の式、そして温位の保存の式である。通常、境界層内での温位の変化は小さく鉛直運動のスケールも小さいのでブシネスク近似を用いることができる。この方程式系にフィルタ操作を行うと以下の式が得られる (飯塚・近藤, 2008)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ & -\epsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k + (g_0/\theta_0) \delta_{i3} \bar{\theta} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \theta} - \bar{u}_j \bar{\theta}) \quad (2.3)$$

ここで、 u は流速で $i=1,2,3$ をとり、 p が圧力、 θ は温位を表す。変数に付いたオーバーラインはフィルタリングを表し、この変数をグリッドスケール (grid scale - GS) 変数と呼ぶ。また $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ はサブグリッド・スケール (Sub Grid Scale - SGS) 応力と呼ばれる物理量である。この項は乱流のモデリングにおいてしばしば現れるレイノルズ応力 $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ (プライムは擾乱成分、ここでのオーバーラインはレイノルズ平均) と混同されやすいが、SGS 応力とレイノルズ応力が一致するかはフィルターの性質により一般には一致しない。 f_i はコリオリパラメータ、 ν は分子粘性係数、 κ が分子熱伝導係数、 g_0 は重力加速度、 θ_0 は基準温位を表している。また浮力の項においてクロネッカーのデルタ δ_{ij} を使用している。以下では座標と流速は $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ と書き表すことにする。また、座標と計算領域は図 2.1 のようになっている。地衡風方向は x 軸の正の向きとする。

式 (2.1)–(2.3) を解くためには SGS 応力を GS 成分の物理量で表現しなければならない (クロージャ問題)。本研究では?や?で用いられている 1.5 次クロージャのスキームを用いた。このスキームでは SGS 応力テンソルのトレースの 1/2 倍である $e = 0.5(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$ (乱流運動エネルギー) を予報変数として解く。この値は各グリッドにおける運動の SGS 成分の強度を表現しており、それが GS の運動には粘性のように働くと仮定される (渦粘性近似)。具体的には以下の式を用いる。

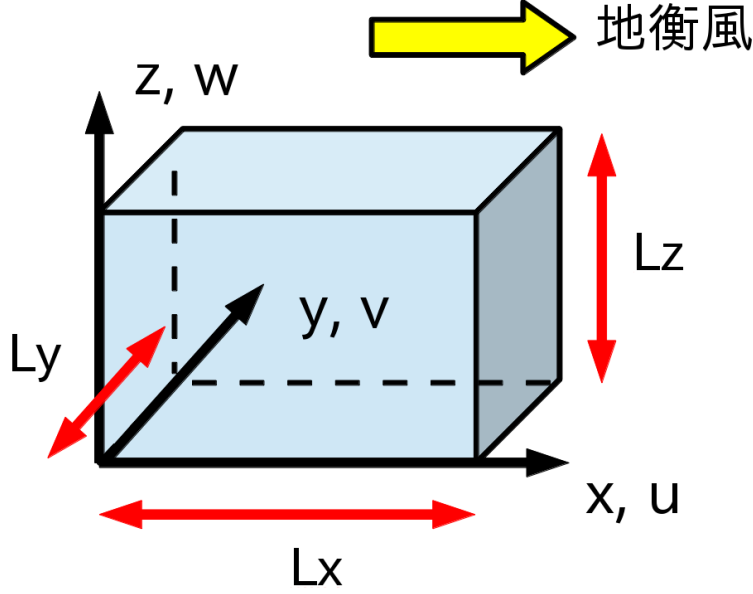


図 2.1: LES の座標設定. x, y が水平座標で z が鉛直座標. x 軸正の向きが地衡流の方向である. (L_x, L_y, L_z) は領域の大きさを表す.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \bar{u}_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{2m} L \sqrt{e} \frac{\partial e}{\partial x_j} \right) - \epsilon \quad (2.4)$$

$$\epsilon = C_\epsilon \frac{e^{3/2}}{L} \quad (2.5)$$

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} e - \frac{4}{15} \frac{L}{C_m} \sqrt{e} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.6)$$

ここで1本目の式がSGSの乱流運動エネルギーに関する予報方程式, 2本目は粘性散逸 ϵ を見積もるために次元解析から導出された式, 3本目の式は渦粘性モデルによってSGS応力を見積もる式である.

このスキームでは3つのパラメータ C_m, C_{2m}, C_ϵ を決める必要があるが, 本研究では? にならって, $C_m = 4, C_{2m} = 0.2, C_\epsilon = 0.7$ を用いた. また L はSGS成分の運動の長さスケールを表し, LESの場合では格子サイズを用いるのが普通である. 格子が立方体でない場合には $L = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ を用いる.

境界層の数値実験には他のLESスキームが用いられることもあるが, それらによる結果の違いは地面の非常に近く(高度20m以下)以外では小さい(?). 本研究で詳細に検討されるストリーク構造は鉛直方向に大きく, LESのスキームの違いによる結果の違いは小さいと考えられる.

境界条件は水平方向には二重周期条件, 上端境界は地衡風速度を用いた粘着固定条件とした. 下端境界条件は?と同様に最下層グリッドが接地層内に存在すると仮定して対数則を用いて決定した(詳細は付録A.1). この手順の際に地面の粗度がパラメータとして導入

される。温位に関しては水平方向は風速と同様に二重周期条件、上端と下端はその近くで環境場のプロファイルが中立成層なので熱フラックスをゼロとする境界条件を課した。

上端は粘着条件として地衡風速を与えて鉛直流はゼロとしているため鉛直流が上端境界によって反射されて下層に人工的な影響を与える可能性がある。これを除くためにレイリー摩擦項を導入してキャッピング逆転層 (後述) の上部では非地衡風成分を減衰させるようにした (?)。

2.2.2 実験設定

前述の支配方程式を用いてエクマン境界層の流れを再現する。環境場の設定は中緯度の標準的な設定を用いる。

- 粗度 $z_0 = 0.16$ (m)
- 地衡風速 $U_g = 10$ (m/s)
- コリオリパラメータ $f_i = (0, 0, 1 \times 10^{-4})$ (1/s)
- 重力加速度 $g_0 = 9.8$ (m/s²)
- 基準温位 $\theta_0 = 300$ (K)

初期条件としては速度場はカノニカルエクマン層のプロファイル

$$\bar{u} = U_g(1 - \exp(-z/\delta) \cos(z/\delta)) \quad (2.7)$$

$$\bar{v} = U_g \exp(-z/\delta) \sin(z/\delta) \quad (2.8)$$

で与えた。ここで、 δ は初期のエクマン層の厚さを表す e-folding 高度である。鉛直流はゼロである。この風速プロファイルは図 2.2 に示してある。

ここで本研究において重要な役割を果たすキャッピング逆転層について簡単に紹介をする。境界層の上端にはしばしば温位が急激に増加する逆転層が存在している (?)。境界層が乱流によるエントレインメントによって層の厚さを増していく時に、境界層高度がキャッピング逆転層の高度にまで達すると、逆転層内の安定成層のために層の厚さの増大は遅くなる。このような働きを持っていることからこの層はキャッピング逆転層と呼ばれている。

このキャッピング逆転層を LES の中で再現するために温位場には、

$$\bar{\theta}(z) = \frac{1}{2} \theta_{top} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z - z_i}{\sigma} \right) + 1 \right] \quad (2.9)$$

で表される温位プロファイルを初期条件として用いた (図 2.3)。ここで erf は誤差関数である。キャッピング逆転層の高度を表す z_i は 650m、キャッピング逆転層の厚さを表す σ は 80m、逆転層の強さを表す θ_{top} は 8K に設定した。また、温位場には境界層内に乱流を発達させるための乱れとして初期にランダムな微小擾乱を与えた。温位場のみに擾乱を与えたのは初期において連続の式を破らないようにするためである。

解析に用いるエクマン層は統計的定常状態になっている必要があるため、初期状態から10時間の予備積分を行い十分に乱流を発達させた。乱流の発達に伴い、風速が地衡風からずれたエクマン層は厚くなっていくが、逆転層があるために高度650m程度でエクマン層の発達は抑制されるようになる。10時間の予備積分時間を取ったことで、エクマン層の厚さが飽和してからもさらに十分な時間が経過している。このため δ (本研究では120mとした)で指定される初期のカノニカルエクマン層の厚さは、10時間経過後のエクマン層内の統計的状态には影響しないと考えられる。

十分に乱流が発達した後に2時間分のデータ出力を行い、そのデータを解析に用いた。以後用いる時刻 t はデータ出力開始の時刻を0sとした時の時刻とする。エクマン層ではコリオリ力による慣性振動によって平均風速のプロファイルが時間変化するが、2時間程度であればこの風速プロファイルの変化の影響は小さい。また、キャッピング逆転層はエクマン層が厚くなるのを抑制し、流れが統計的定常状態を保つのに役立っている。予備積分の期間中は温位場のキャッピング逆転層が弱くならないように温位場の鉛直拡散項を10分の1にした。

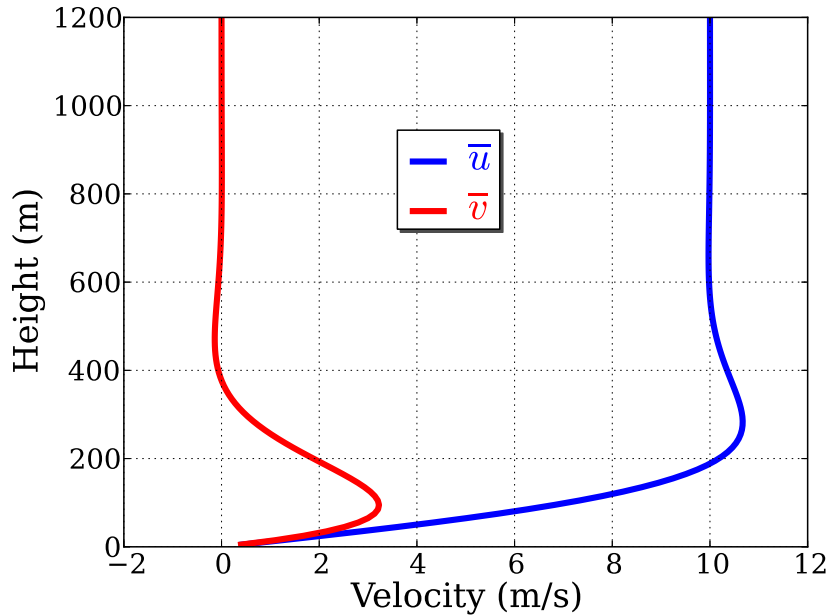
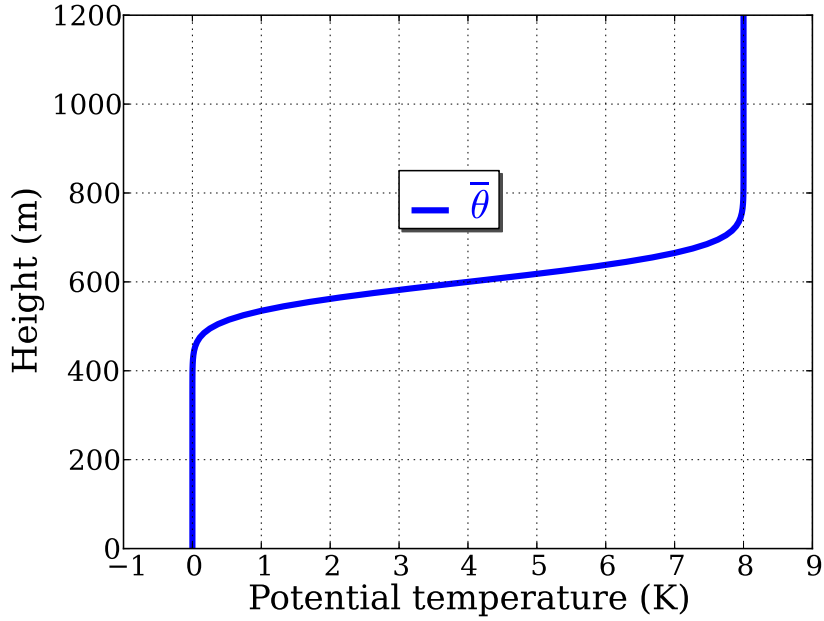


図 2.2: カノニカルエクマン層の風速プロファイル:(青) 速度の地衡流方向成分 $\bar{u}$, (赤) 地衡流に直交する成分 $\bar{v}$.

2.2.3 離散化と数値スキーム

用いた数値スキーム、計算領域の設定は以下の表のようにした。この離散化手法は?と同じである。


 図 2.3: 初期の温位場. 基準温位 θ_0 からの偏差を表している.

方向	離散化手法	計算領域 L	グリッドの数 N	格子間隔 d
水平	スペクトル選点法	$L_x=L_y=8000$ (m)	$N_x = N_y = 512$	$dx = dy = 15.6$ (m)
鉛直	スタaggerド格子を用いた 2 次精度中央差分	$L_z=1200$ (m)	$N_z=120$	$dz=10$ (m)

時間方向の差分には 2 次精度のアダムス・バッシュフォース法を用いて時間刻み幅 $dt=0.05s$ とした. また, 圧力カップリングの手法には SMAC 法を用いた. エイリアジング誤差を消去するため, 全波数の $2/3$ のみを残す?の手法を用いた.

ここまでの LES を用いた数値実験の計算設定である. 変数に付けていたフィルタリング操作を表すオーバーラインは以後は省略する.

2.3 数値実験の妥当性の検証

この節では本研究で行った LES を用いた数値実験の妥当性を検証する. エクマン層の基本的な特性やストリーク構造の空間構造などの先行研究によって明らかになっている結果を, 本研究での LES の結果から導き出せるかを確認する.

2.3.1 エクマン境界層の基本的な性質

ここでは再現されたエクマン層の基本的な性質を示す. 図 2.4 は風速場の水平断面分布のスナップショット ($t=3600s$) である. (a),(b) が水平速度の分布を (c),(d) が鉛直速度の分

布を示している．また図 2.4(a) と (c) が高度 15m、(b) と (d) が高度 155m における分布をそれぞれ示している．

この図からは以下の特徴が見て取れる．

- (1) 境界層内は非常に乱れており様々なスケールの運動が重なり合っている．
- (2) 水平風速に明瞭なストリーク構造が見られる一方、鉛直風速には長く伸びたストリーク構造は見られない．
- (3) 高度が高くなるほどストリーク構造の間隔は広がり、地衡風方向 (x 軸の正の向き) とのなす角が小さくなっている．

図 2.5(a) の水平風速の $y-z$ 断面分布を見ると、地面近く (高度約 50m より低い場所) では水平スケールが 100m 以下の小スケールの構造が見られるが、地面から離れると水平スケールが数百 m の大規模な構造が目立つようになっている．この図の結果は上述の特徴 (3) と整合的である．また、図 2.5(b) には鉛直風速の $y-z$ 断面分布を示したが、擾乱のスケールに明瞭な高度依存性は見られない．このような流れのスナップショットから見て取れるストリーク構造の特徴は 1 章で紹介した先行研究でのストリーク構造の性質と同様である．

次に時間・空間平均された風速の鉛直プロファイルを図 2.6 に示す．水平断面で平均しているため、連続の式より鉛直流は 0 である．図中に示したブラケットは水平断面と時間方向に平均した物理量を表す．LES の予備積分の際には温位の鉛直拡散を小さくしたために平均化された温位場は初期状態からほとんど変化せず、また、その後の 2 時間の積分を行っても変化は小さかったため図には示さなかった．図 2.6 を見るとカノニカルエクマン層と異なり、再現されたエクマン層の内部では乱流混合の働きが強く、風速分布は一定に近い．そしてキャッピング逆転層の高度で風速の値は急激に地衡風速に漸近している．これはキャッピング逆転層内の安定成層の働きによって乱流混合が抑制されるためと考えられる．また、この風速プロファイルを元にエクマンらせんを図 2.7 に示した．最下層のグリッドポイント (高度 5m) での風速の向きと地衡風方向とのなす角は 25.4° であり、カノニカルエクマン層の 45° よりも小さいことが分かる．

このようなカノニカルエクマン層と異なる性質を持つエクマン層は?や?などの先行研究で得られている．?での風速プロファイルは乱流混合のために高度約 100m より上空では風速がほぼ一定となっており、図 2.6 に示されている LES の結果から得られた風速プロファイルに近い．先行研究や図 2.6 に示されているような風速プロファイルはカノニカルエクマン層とは異なっているが、現実のエクマン層の近似としてはより正確だと考えられる．実際に観測で得られるエクマン層のプロファイルは大規模場の擾乱など様々な要素が影響を与えるために単純なプロファイルにはならないが、エクマンらせんの地衡風とのなす角はカノニカルエクマン層の 45° より小さいことが知られている (?).

次に乱流輸送に関わる物理量を見ていく．以下では水平断面で平均された速度を U, V のように大文字で、GS 成分からこの平均速度を差し引いた擾乱成分を u, v, w のように小文字で示すことにする．

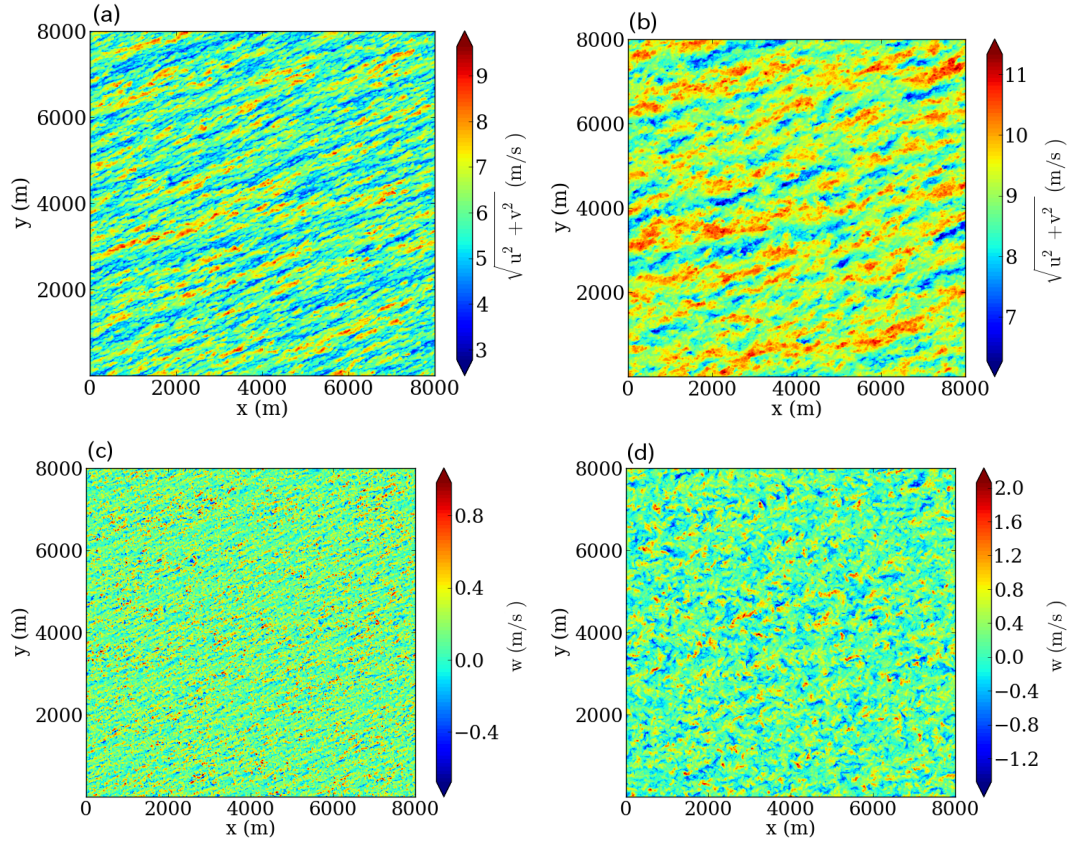


図 2.4: 時刻 $t=3600$ の水平速度 (a),(b) と鉛直速度 (c),(d) の水平断面分布. (a) と (c) は高度 15m, (b), (d) は 155m における断面図を示す.

GS 成分の擾乱の運動エネルギーと SGS 成分の運動エネルギーの鉛直プロファイルと共に図 2.8 に示す. SGS 成分のエネルギーは予報方程式 (2.4) での e である. ここで規格化に用いている u_* は摩擦速度であり, 計算領域の下端での境界条件を決定する際に求められる (式 (A.2)). 摩擦速度は地面近くの乱流強度を表す速度スケールであり, 時間平均値は 0.444 であった. 摩擦速度は解析時間の 2 時間のうちに 1% 程度しか変化しておらず, 本解析で用いるエクマン層内の乱流が統計的定常状態にあることを確認するのにとも用いられる.

図 2.8 を見ると, エクマン層の内部では $\langle w^2 \rangle, \langle v^2 \rangle, \langle u^2 \rangle$ がこの順序で大きくなっており, 高さとともに減少している. また, SGS の乱流運動エネルギーは地面近くで大きく高度が高くなるに従い急激に小さくなって GS 成分の運動エネルギーよりも小さくなっている. すなわち, 地面近くでは渦の空間スケールが小さく解像できていない運動エネルギーの寄与が大きいのにに対し, 地面から離れ渦のスケールが大きくなるにしたがって解像できている擾乱が大部分を占めるようになっていっていると解釈される.

次に擾乱による運動量フラックスの鉛直プロファイルを図 2.9 に示す. これは GS 成分による運動量フラックスである. SGS 成分によるフラックスは地面に非常に近いところ

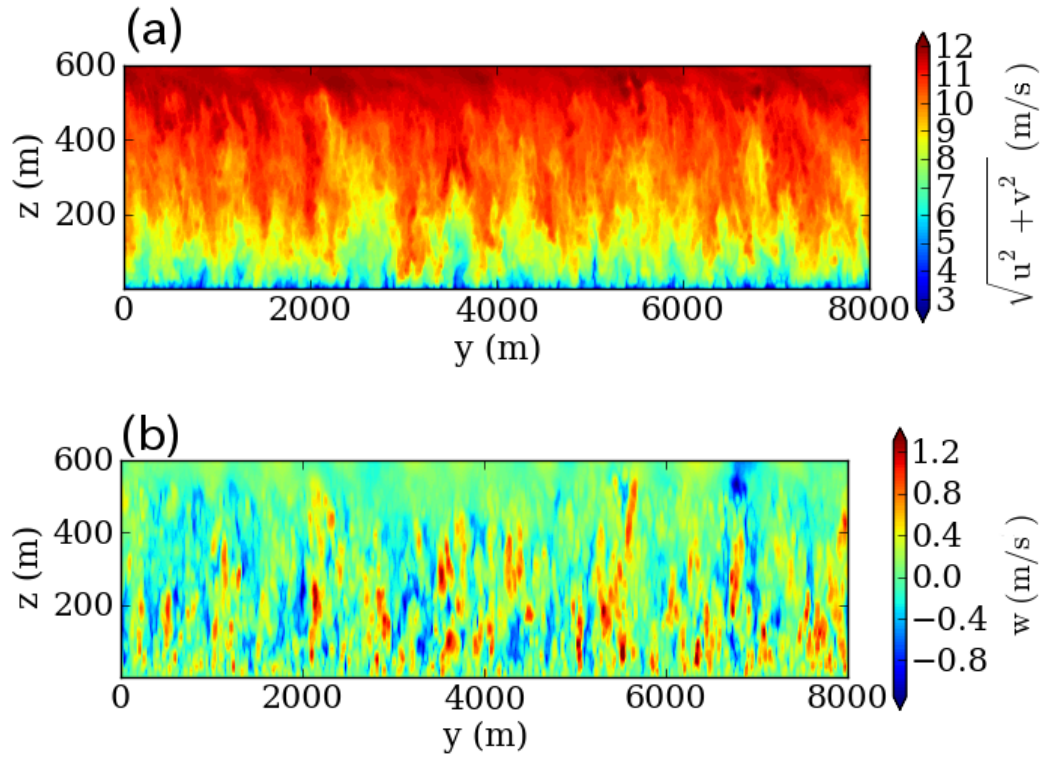


図 2.5: $x = 0$ (m), $t=3600$ (s) における水平速度 (a) と鉛直速度 (b) の y-z 断面分布.

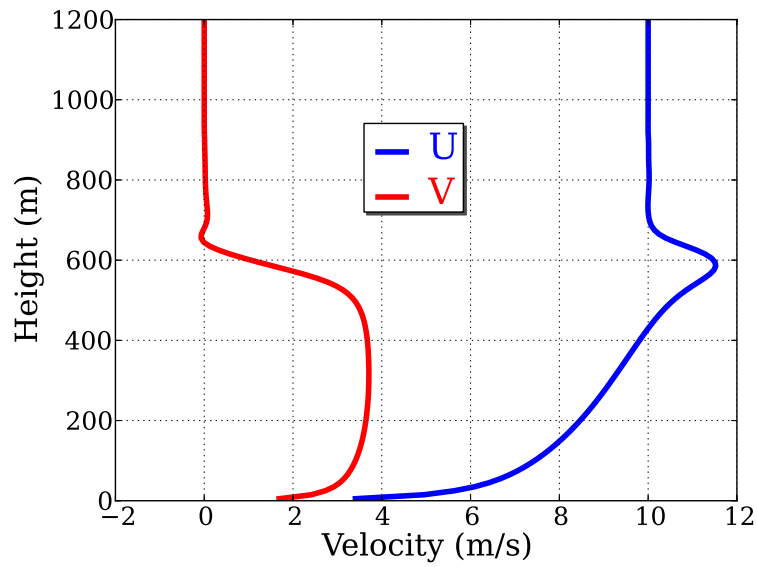


図 2.6: 時間・空間平均した平均水平風速のプロファイル.

を除いて無視しうるほど小さい(?).

鉛直運動量フラックスは下向き(負値)で高度が上がるにしたがって減少している. この

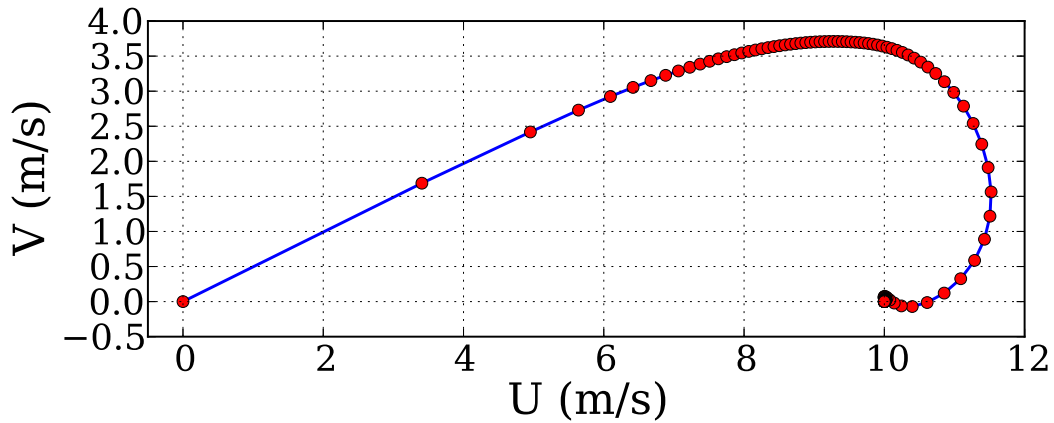


図 2.7: 時間・空間平均した平均水平風速のエクマンらせん (青線). 赤色の点では各グリッドポイントでの風速を示している.

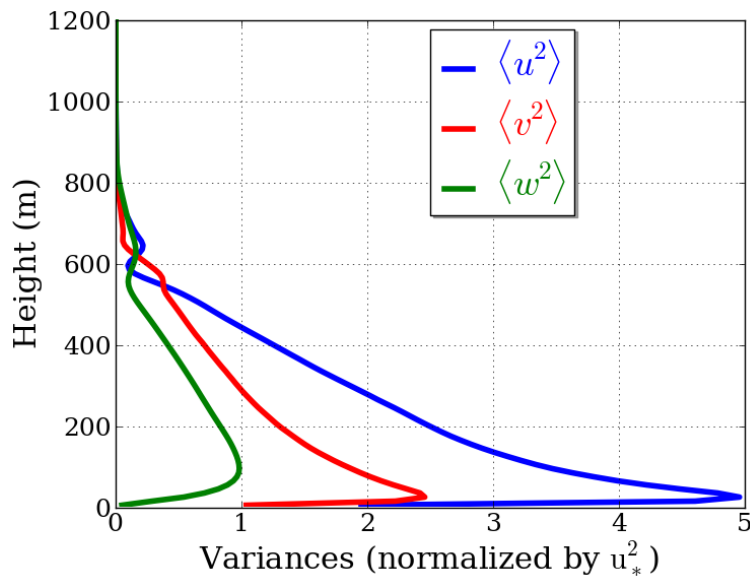


図 2.8: 摩擦速度で規格化した乱流速度の分散 (乱流運動エネルギー) の高度依存性.

運動量フラックスの鉛直収束は運動方程式において力のように働き、エクマン層理論におけるいわゆる「摩擦力」に対応している。この摩擦力によりエクマン層内の速度欠損 (地衡風速度よりも風速が小さくなっていること) が生じているため、運動量の乱流輸送はエクマン層の厚さや境界層内の風速などの大規模場の性質を決定するのに重要な役割を果たしている。

最後に今回用いた LES のスキームが乱流を正確に扱えているかを検証するために (?) を参考にしてパワースペクトルを計算する。図 2.10 は高度 155m での x 軸方向と y 軸方向のそれぞれの波数に対するパワースペクトルを示している。赤線、青線、緑線がそれぞれ速

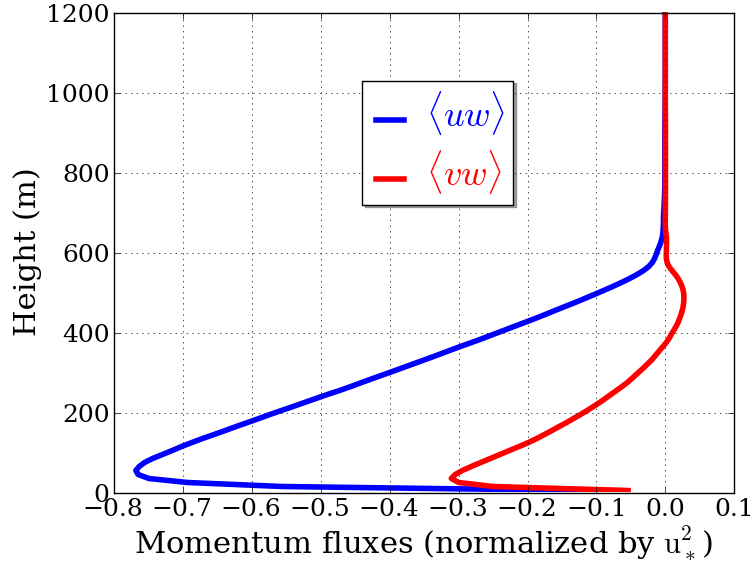


図 2.9: 摩擦速度で規格化した運動量フラックスの高度依存性.

度 u, v, w のパワースペクトルに対応しており、黒線が全エネルギーのパワースペクトルである．点線が $-5/3$ 乗の傾きを示しており、高波数領域ではパワースペクトルの傾きがこの傾きと等しいことが分かる．乱流理論によると空間スケールの小さな高波数領域では普遍的に等方性乱流が実現することが知られており、この高波数領域ではパワースペクトルの傾きが $-5/3$ 乗則にしたがい慣性小領域と呼ばれる(木田・柳瀬, 1999)．LESでは流れが慣性小領域まで解像されていることが仮定されているが(飯塚・近藤, 2008), 図 2.10 で慣性小領域が現れていることは、この仮定が成り立っていることを示している．

2.3.2 ストリーク構造の空間構造

図 2.4 に現れているストリーク構造の間隔や地衡風方向とのなす角は重要なパラメータと考えられる．これらの値を見積もるためには複雑に乱れた流れ場からストリーク構造を抽出する必要がある．ストリーク構造に限らず流れの秩序構造の抽出方法は様々なものが提案されている．以下に代表的な 3 つの手法を示す．

- (1) 自己相関係数を用いた手法(新谷・河村, 2003)
- (2) コンディショナル・サンプリングを用いた手法(?)
- (3) 経験的直交関数(Empirical Orthogonal Function - EOF)を用いた手法(?)

これらのうち(1),(2)を用いて、LESの計算結果を解析する．最初は自己相関係数を使った解析である．ストリーク構造は低速あるいは高速の流体が集まった領域であるため、同一のストリーク構造に含まれる流体同士は相関が高くなることになる．よって速度分布の

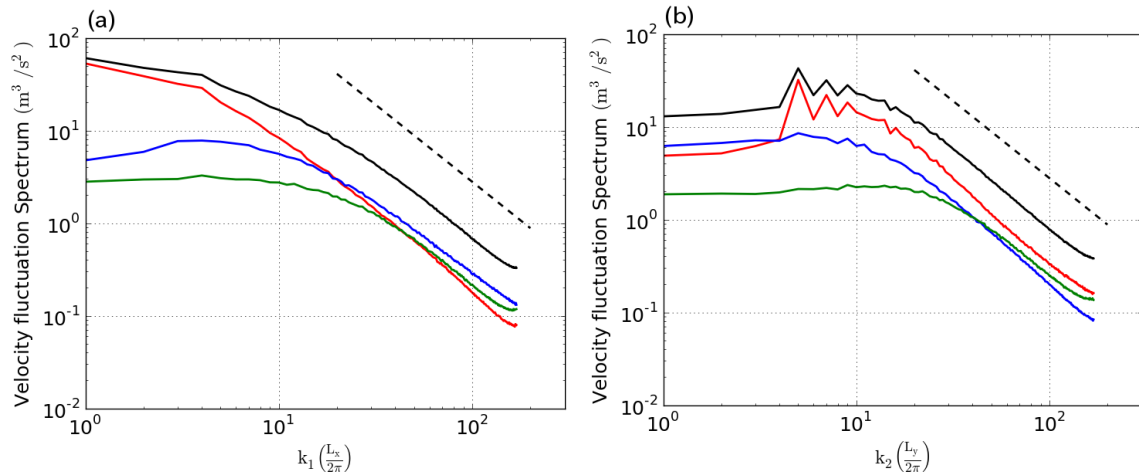


図 2.10: 高度 155m での (a) x 軸方向波数と (b) y 軸方向波数に関するパワースペクトル。赤線，青線，緑線がそれぞれ速度 u, v, w のパワースペクトルに対応しており，黒線が全エネルギーのパワースペクトルである。点線は $-3/5$ 乗則の傾きを示す。水平波数は計算領域の中にある波の数を表す無次元の水平波数で示している。

自己相関係数を計算すればストリーク構造の空間分布の特性が分かる。図 2.11 に自己相関係数の水平断面分布の時間平均を示した。ストリーク構造の性質は高度や速度の成分によって異なると考えられるため，3つの高度で水平速度 (a),(c),(e) と鉛直速度 (b),(d),(f) のそれぞれに対して計算を行った。高度は (a),(b) は 15m, (c),(d) は 75m, (e),(f) は 400m である。また，その高度での平均水平速度の方向を黒の矢印によって示した。

図 2.11 から分かることは，

- (1) 水平速度ではストリーク構造に対応する相関の高い領域が流れ方向に長く伸びている。
- (2) 鉛直速度では相関の高い領域は小さく，ストリーク状のパターンを示していない。
- (3) ストリーク構造の間隔は高度ともに広がっている。
- (4) 地面近くではストリーク構造の伸びている向きはその高度での平均風速に近い。

これらの性質は?などの観測結果や LES の風速分布のスナップショットから分かることであるがこの解析によってより明瞭となる。

次にコンディショナル・サンプリングを用いた解析結果を示す。コンディショナル・サンプリングとは LES によって得られた流れ場に対して，特定の条件を満たす地点を選び出し，その地点を原点として周囲の流れ場を重ね合わせることで，その条件を満たす場の平均的な特徴を調べられるようにする手法である。ストリーク構造の解析では，条件として運動量フラックスがあるしきい値を越えていることを用いる。これはストリーク構造は運動量の乱流輸送と関連が強いと考えられるため，運動量フラックスが大きな地点の特性を調べることでストリーク構造の本質的な特徴を取り出せると考えるからである。

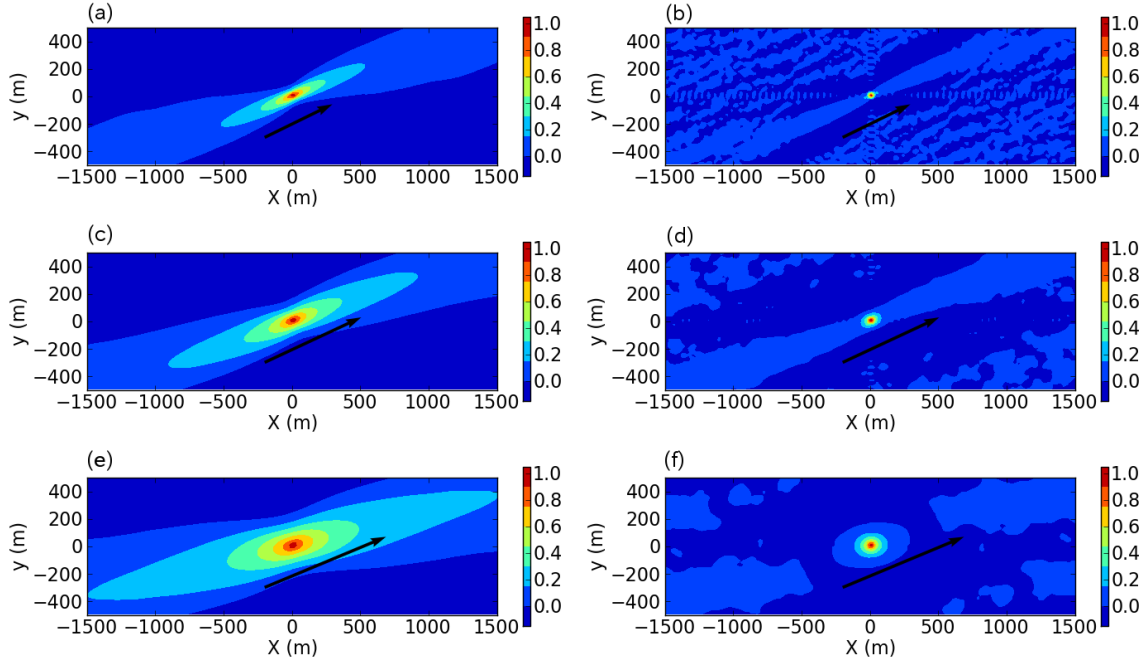


図 2.11: 水平速度 (a),(c),(e), 鉛直速度 (b),(d),(f) の自己相関係数の水平断面分布. (a),(b) は高度 15m, (c),(d) は高度 75m, (e),(f) は高度 255m での分布を示す. 図中の矢印はその高度での水平風の向きを表している.

具体的には?と同様に以下のようにして, コンディショナルサンプリングされた場を求める.

$$\hat{\Psi}(x', y', z', z_d) = \langle \Psi(x_d + x', y_d + y', z_d + z' | \mathcal{E}(x_d, y_d, z_d)) \rangle \quad (2.10)$$

ここで Ψ は求めたい物理量でハット記号はコンディショナルサンプリングされた変数を表す. また, (x_d, y_d, z_d) は条件を満たすかどうかを試験する点, (x', y', z') は試験点の周りの座標を表している. ここでのブラケットは時間・空間方向のすべてのグリッドポイントから条件を満たす地点を取り出して平均する操作を表す. ストリーク構造の特性は高さ方向に変化すると考えられるため, z_d は固定してパラメータとして扱う. そして条件として,

$$\mathcal{E}(x_d, y_d, z_d) = \begin{cases} q^- w^+(x_d, y_d, z_d) < \mathcal{T}_{qw} & \text{イジェクション} \\ q^+ w^-(x_d, y_d, z_d) < \mathcal{T}_{qw} & \text{スweep} \end{cases} \quad (2.11)$$

を用いた. ここで $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ で水平風速, $\mathcal{T}_{qw}$ は適当な応力のしきい値である. また, 変数の上付き文字の $+$, $-$ は各高度での水平断面平均からの偏差が正と負であることをそれぞれ示している. 上昇流を持ち水平流速の偏差が負の領域をイジェクション, 下降流を持ち水平流速の偏差が正の領域をスweepと呼び, 慣習にならって条件を2つに分けた, 本研究では扱わないがイジェクションとスweepの領域の特性はESL(Eddy Surface Layer)と呼ばれる地面の非常に近く(高度 10m 以下程度)とそれより上部の境界層では異なるなど興味深い性質を示す(?).

図 2.12 にコンディショナルサンプリングで得られた、水平速度、鉛直速度の等値面の水平断面を示す。ともに運動量フラックスのしきい値は? にならって $T_{qw} = -1.25u_*^2$ とした。前の自己相関係数の結果と同様に、鉛直速度の流れ方向への広がりや水平速度のそれと比較して小さい。また、イジェクションとスweepの違いによる空間パターンの違いはほとんど見られない。

自己相関係数の値は全ての地点での風速を用いて求めたものであるのに対して、コンディショナルサンプリングは実際に乱流輸送をになっている地点のみを取り出し、その地点での特性を調べられたという利点がある。また、図の流線や矢印で示されているように周りの流れ場の様子も調べることが可能である。

運動量を下向きに輸送するためには水平風速の偏差が正(負)の領域と鉛直風速が下向き(上向き)が一致している必要があるため、図 2.11 や 2.12 で示されたように鉛直速度の等値面のストリークの軸方向への広がりが小さいことは下向き運動量フラックスを担っている領域もストリーク構造と比較して小さな領域であることを示している。すなわち、この解析から分かることは高速ストリークや低速ストリークのような水平風速が一定の領域が流れ方向に長く伸びている中にイジェクションやスweepといったより小スケールの構造が埋め込まれているという事実である。この特性は? で主張されている結果と同様である。

これまで見てきたように本研究での LES で再現されたエクマン層やストリーク構造は観測例や過去の LES を用いた先行研究と同様の性質を示しており、LES の計算の妥当性が確認できたと考える。

2.4 ストリーク構造のエネルギー論

この節ではストリーク構造と平均流との相互作用に注目してエネルギー解析を行う。

2.4.1 解析方法

擾乱と平均流との相互作用を計算するためには各時刻におけるストリーク構造を抽出する必要がある、時間平均操作は行うことはできない。時間平均を行わずにストリーク構造を抽出するために、LES で得られた流れ場に対して水平波数と地衡風のなす角を指定するフィルターをかけることにする。具体的には、

$$\tilde{u}_i(x, y, z, t; \alpha, \epsilon) \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-K_x}^{K_x} \int_{-K_y}^{K_y} F(k_x, k_y; \alpha, \epsilon) e^{i(k_x x + k_y y)} \left(\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e^{-i(k_x x + k_y y)} u(x, y, z, t) dx dy \right) dk_x dk_y$$

としてフィルタリングされた速度場 $\tilde{u}_i$ を計算する。ここで $F(k_x, k_y)$ は図 2.13 で示したフィルターである。扇形領域の中の青色の領域のみを 1 として、それ以外の領域はゼロと

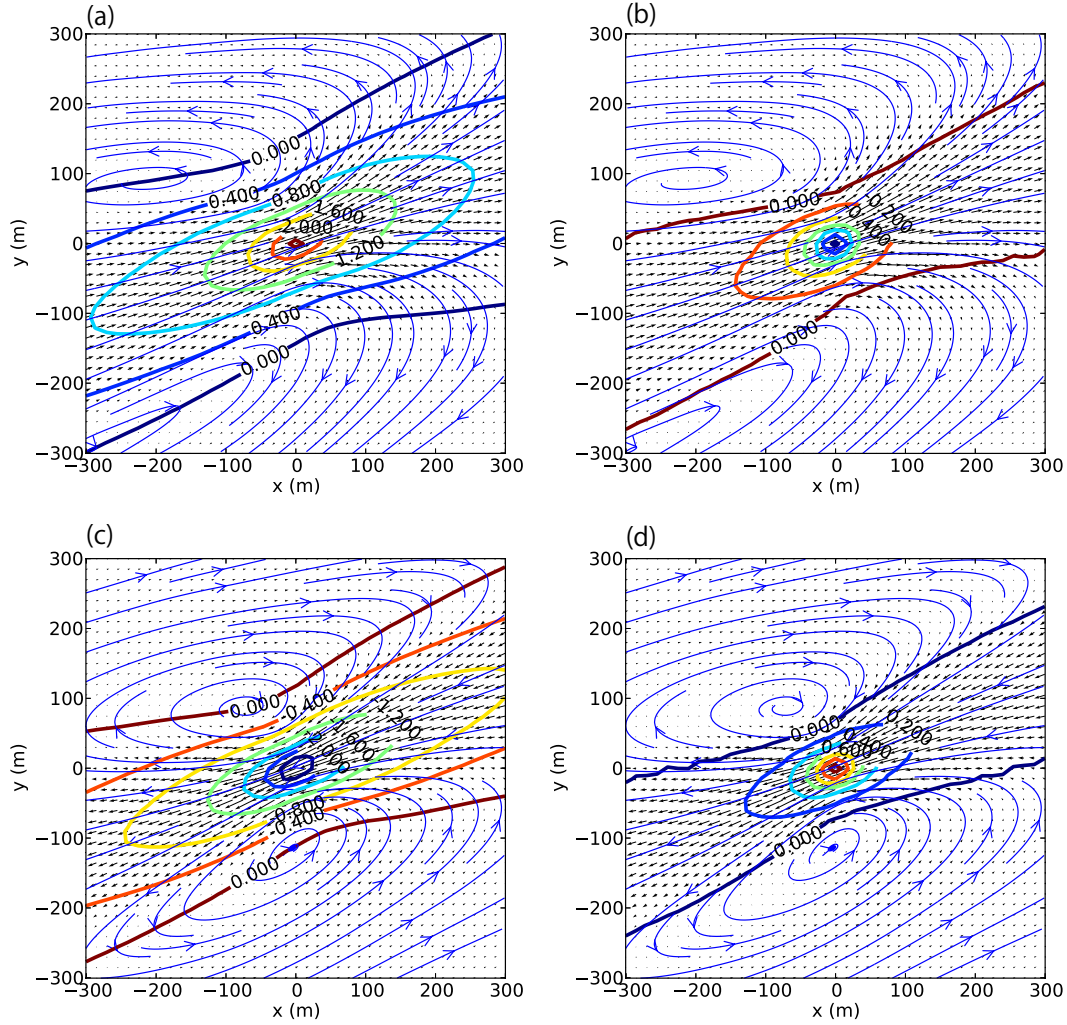


図 2.12: コンディショナルサンプリングで得られた水平速度 (a),(c) と鉛直速度 (b),(d) の水平断面分布. (a),(b) がスweep (水平流が高速で下降流), (c),(d) がイジェクション (水平流が低速で上昇流) を条件に課したときの分布. 矢印と流線は水平風速の分布を示している. 等値線についたラベルは速度の値である.

する. このフィルターを各高度での速度場に対して用いることで, 特定の水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ を持つ摂動のみが抽出される (図 2.14). 地衡風とのなす角は ϵ にならって図 2.14 のように地衡風方向を 0 度として反時計まわりを正, 範囲は $[-90^\circ, 90^\circ]$ で定義した.

この摂動の運動エネルギーは以下の式で見積もられる.

$$\frac{1}{L_x L_y z_{int}} \int_0^{z_{int}} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) dx dy dz \quad (2.13)$$

ここで z_{int} は積分領域の上端の高度である.

また流れの OT 成分と DS 成分を分離するために、座標を時計回りに角度 ϵ だけ回転させて x' 軸を抽出された 2 次元摂動の軸方向に合わせる．すなわち、

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\epsilon) + y \sin(\epsilon) \\ y' &= -x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon) \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.14)$$

として座標回転をする．このようにして得られた座標系を (x', y', z') と表し、平均速度を (U', V', W') 、擾乱速度を (u', v', w') と書く．この座標変換の結果、速度 3 成分のうち v', w' が OT 成分、 u' が DS 成分に対応するようになる．

抽出された 2 次元摂動は x' 方向に一様であるため、平均流からのエネルギーの変換量は座標変換した速度を用いて以下の式で見積もられる．(?).

$$\frac{1}{L_x L_y z_{int}} \int_0^{z_{int}} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(-\tilde{u}' \tilde{w}' \frac{dU'}{dz} - \tilde{v}' \tilde{w}' \frac{dV'}{dz} \right) dx dy dz \quad (2.15)$$

ここで被積分関数のうち 1 項目が DS 成分の運動エネルギーの変換量を 2 項目が OT 成分の変換量に対応している．

この節ではこれら摂動の運動エネルギーと平均流との運動エネルギーの変換量の 2 つを値のパラメータ依存性を解析する．

2.4.2 結果

最初に、抽出された摂動の運動エネルギーのパラメータ依存性を図 2.15 示す．積分領域 z_{int} は逆転層より下部のエクマン境界層全部として 500m に設定した．最大の運動エネルギーを示すパラメータは $\alpha = 0.0047$ (1/m)、 $\epsilon = 15^\circ$ であった．このことは LES のスナップショットやストリーク構造の空間パターンを示す図 2.11, 2.12 において、地衡風とのなす角が 15 度程度の摂動が卓越していることと整合的である．ストリーク構造の間隔、すなわち水平波長については、大スケールのものから小スケールのものまで連続的に存在しているが、およそ数百 m から 1000m 程度の摂動が多くエネルギーを持っている．すなわち、この地衡風とのなす角が 15 度程度で水平スケールが数百 m から 1000m 程度の摂動がストリーク構造に相当している．

次に、抽出された摂動と平均流との相互作用を解析するためにエネルギーの変換率を計算する．図 2.16(a) は式 (2.15) で $z_{int}=500$ (m) として計算した、平均流から抽出した摂動へのエネルギー変換量のパラメータ依存性を示している．また、積分領域の影響を調べるために z_{int} を 250(m) にしてエネルギー変換量を計算した結果を図 2.16(b) に示した．

図 2.16(a), (b) とともに最大値を示すパラメータは水平波数 $\alpha = 0.011$ (1/m)、地衡風とのなす角 $\epsilon = 15^\circ$ である．この地衡風とのなす角の値は、運動エネルギー (図 2.15) が最大でストリーク構造に対応している摂動の値と同じであり、ストリーク構造が平均流から多くの運動エネルギーを受け取っていることが分かる．一方それ以外の向きの摂動 (例えば ϵ が負の摂動) は正味のエネルギー変換量が小さくほぼ 0 になっている．すなわち平均流

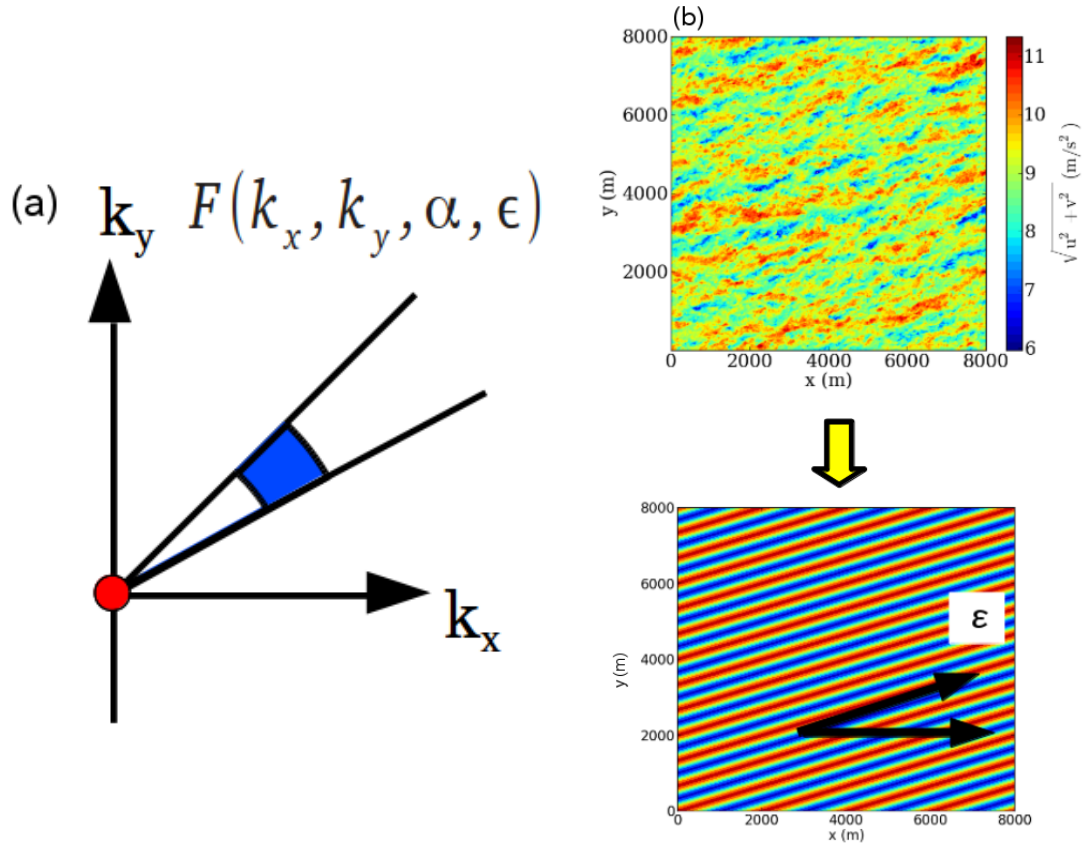


図 2.13: (a) ストリーク構造の抽出に用いる波数空間におけるフィルター． k_x, k_y は x, y 方向の波数．青色地点を 1 として用いると特定の水平波数と向きを持った摂動のみを取り出せる．水平波数は原点から青色の領域までの距離，地衡風とのなす角は扇形領域の角度によって調整することが可能である．(b) はこのフィルターによる流れ場の変化の例を示している．水平波長は 681m，地衡風とのなす角は 20 度を選択している．

から流れの擾乱成分へのエネルギー変換を見ると，低波数の領域では ϵ が 15 度周辺の摂動に対し選択的にエネルギーが供給されていることが分かる．

また，最大のエネルギー変換率を示す水平波数の値は，擾乱の運動エネルギーが最大を示す時の水平波数 ($\alpha = 0.0047$) と比較すると大きい，いわゆる渦粘性¹による散逸が波数の大きな擾乱ほど強く働くことを考慮すれば，この結果は妥当である．

運動エネルギーを多く持っておりストリーク構造を形成している擾乱は，平均流と強く相互作用をして多くの運動エネルギーを供給されていることが示された．

¹注目している流れがそれ以外の擾乱(渦)と相互作用をして運動エネルギーを失う過程が粘性拡散によるエネルギー散逸と似通っているため，渦による粘性という意味でこのように呼ばれる．

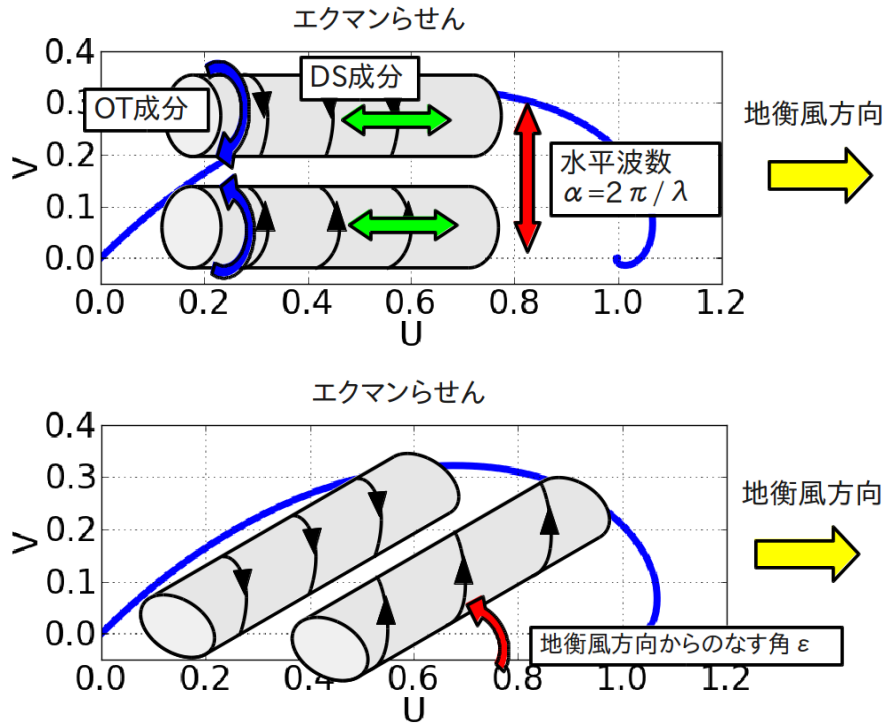


図 2.14: 抽出された2次元摂動の概念図，水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ が摂動の特性を示す．背景の青線は背景場であるエクマンらせんを概念的に描いたものである．

2.5 ミニマル領域 LES によるストリーク構造の時間発展の解析

この節ではストリーク構造の時間発展の様子を考察する．前節の結果から水平波長が数百 m から 1000m 程度で地衡風とのなす角が 15° 程度の摂動はストリーク構造とみなすことができる．特に平均流との相互作用に注目するために，平均流からのエネルギー変換量が最大の水平波数 $\alpha=0.011$ (1/m) のストリーク構造に注目する．

式 (2.12) によって表現されるフィルタリングは各時刻において実行することが可能であるが，全計算領域に対してこの操作を行うとストリーク構造が生成・発達・崩壊のどのフェイズに位置しているのかの時間情報は失われてしまう．なぜなら，水平計算領域 (8000m) はストリーク構造のスケール (スパン方向は数百 m から 1000m 程度) に対して十分に大きく，計算領域の様々な場所に発達フェイズや崩壊フェイズのストリーク構造が同時に存在しているからである (図 2.17)．すなわち，計算領域のすべてに渡って同一の時間発展のフェイズにあるストリーク構造が存在しない限り，式 (2.12) によるフィルタリングでは時間発展の様子を抽出することはできない．

そこで，本研究では?のミニマル領域実験の手法を境界層の LES に応用する．この手法は計算領域を意図的に小さくすることで，乱流構造の素過程を解析しやすくする手法であ

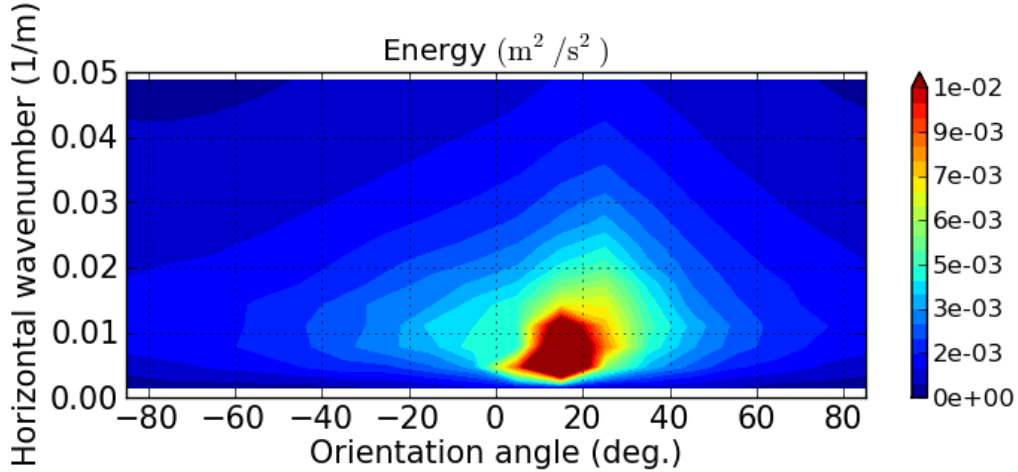


図 2.15: フィルタリングによって抽出された摂動が持つ運動エネルギー (高度が 0 から 500m までの平均値) の水平波数 (縦軸) と地衡風とのなす角 (横軸) へのパラメータ依存性。値が低い領域の高低を見やすくするために大きな値の等値線を省いてある。運動エネルギーが最大の摂動のパラメータは $\alpha = 0.0047$ (1/m), $\epsilon = 15^\circ$ で最大値は $1.9 \times 10^{-2} (\text{m}^2/\text{s}^2)$ である。

る。ただし、あまりにも領域が小さすぎると乱流が全く発生しなくなってしまうため、乱流が維持できる最小 (ミニマル) の領域サイズを選択する。

前節の結果から平均流と強い相互作用をしてをして最も大きなエネルギー供給を受けている、波長が 571m ($\alpha=0.011$ (1/m)) で地衡風方向とのなす角が 15 度のストリーク構造に注目して計算を行う。このストリーク構造をミニマル領域で計算することで時間発展のフェイズが計算領域全部で揃うことが可能になると期待される。発達フェイズが揃っていれば、式 (2.12) のフィルタリングによってストリーク構造の抽出を行い時間発展の様子を解析することができる。

以下では 2 種類の LES の区別を明確にするため、前節までの計算領域が大きな LES を大規模領域 LES、この節で扱う領域の小さな LES をミニマル領域 LES と呼ぶことにする。

2.5.1 ミニマル領域 LES の実験設定

ミニマル領域 LES の支配方程式や境界条件などの実験設定は大規模領域 LES と同じである。唯一異なっている計算領域は以下のように設定する (図 2.18(a))。

- 座標を回転して、 $\epsilon = 15^\circ$ に対応する擾乱が x 軸を向くようにする。
- 主流方向 (x 軸方向) の領域は $L_x = 4\lambda$, スパン方向 (y 軸方向) には $L_y = 2\lambda$ とする (λ はストリーク構造の水平波長で 571m)。ストリーク構造は主流方向への広がりが大きいため、主流方向には長めに設定した。 L_z は大規模領域 LES と同じで 1200m とする。

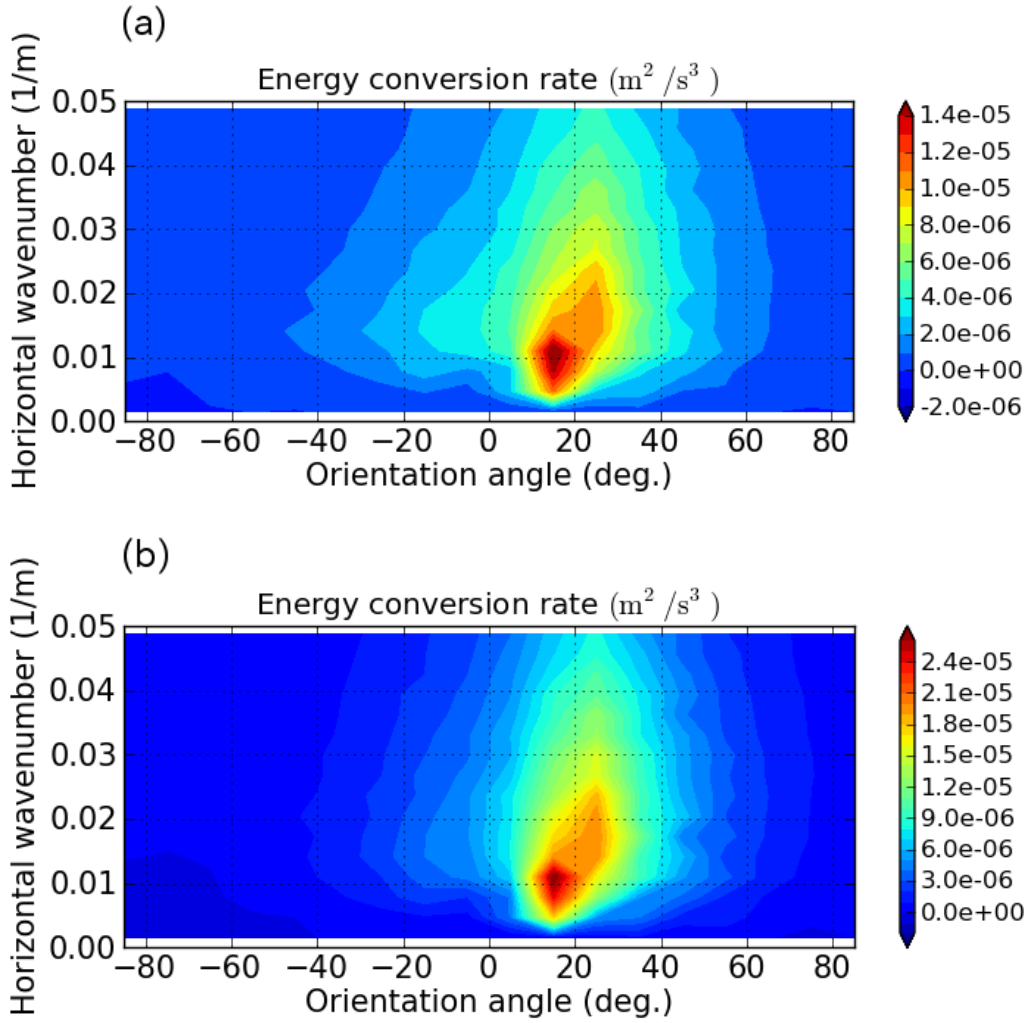


図 2.16: フィルタリングによって抽出された摂動に平均流から変換される運動エネルギーの量の水平波数 (縦軸) と地衡風とのなす角 (横軸) へのパラメータ依存性. 平均領域は地面から高度 500m まで (a) と 高度 250m まで (b). エネルギー変換量の最大の摂動のパラメータは (a) は $\alpha = 0.011 \text{ (1/m)}$, $\epsilon = 15^\circ$ で最大値が 1.5×10^{-5} , (b) は $\alpha = 0.011 \text{ (1/m)}$, $\epsilon = 15^\circ$ で最大値が $2.7 \times 10^{-5} (\text{m}^2/\text{s}^3)$ である.

- 解像度は大規模領域 LES と同程度にするために $N_x=150$, $N_y=75$, $N_z=120$ とする. この時, 格子間隔は $dx=dy=15.2\text{m}$, $dz=10\text{m}$ となる (大規模 LES では $dx=dy=15.6\text{m}$, $dz=10\text{m}$).

この計算領域を用いた数値実験では y 軸方向の波長が 2λ より長い流れの擾乱は存在しない. しかし, 図 2.15 を見ると最大のエネルギーを持つ擾乱の水平波長は 1337m であり, $2\lambda=1142\text{m}$ よりも長い水平波長を持つ擾乱も大きなエネルギーを持ってエクマン層の流れ場の中に存在している. したがって計算領域を小さくするという人為的な手法によって, 水平波長の大きな擾乱を除去することは平均風のプロファイルなどの流れの平均場にも

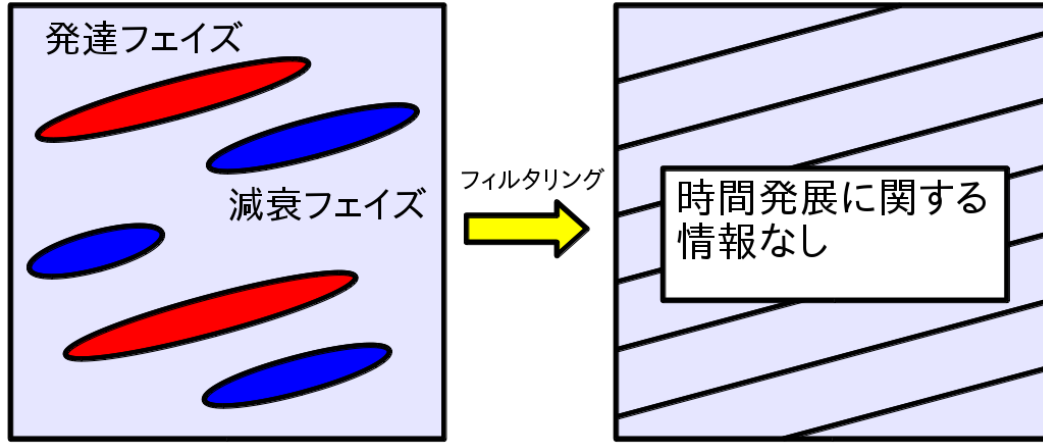


図 2.17: LES の計算領域の水平断面におけるストリーク構造の概念図. ある時刻におけるストリーク構造を見ると発達フェイズにあるものや減衰フェイズにあるものが混在している. この流れ場に特定の水平波長と地衡風とのなす角を抽出するフィルターをかけると, 各ストリーク構造が持っていた発達過程に関する情報は平滑化されて消えてしまう.

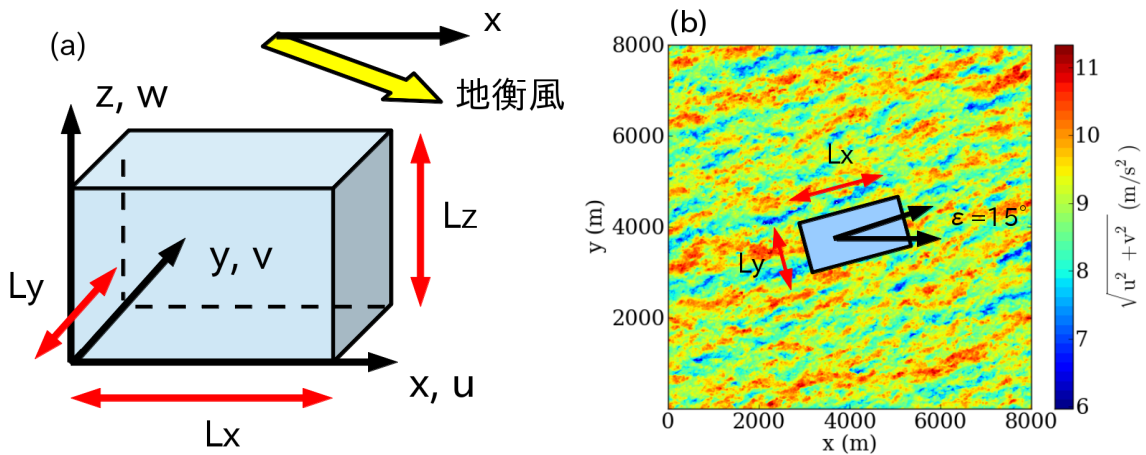


図 2.18: (a) ミニマル領域 LES の計算領域. 地衡風の方角を x 軸の方角から時計回りに 15° 度回転させている. (b) ミニマル領域 LES の初期条件の決定方法. 大規模領域 LES の水平領域 (大きさが x 軸方向に 8000m , y 軸方向に 8000m) から, x 軸方向に L_x で y 軸方向に L_y のミニマル計算領域を切り出す. 2つの領域の中心位置は同じにした.

影響を与えると考えられる. この効果を小さくするために, ミニマル領域 LES の積分は 7200s までと制限をして平均場が大きく変化しないようにする. その代わりに, 異なる初期条件を持つ実験を複数回行うことで流れ場の普遍的特性を得られるようにする.

このような初期条件は前節までで計算した大規模領域 LES の結果を用いて決定する. 大規模領域 LES の水平計算領域 $(L_x, L_y) = (8000\text{m}, 8000\text{m})$ の出力から, 新たな領域 $(L_x, L_y) = (4\lambda, 2\lambda)$ ($\epsilon = 15^\circ$) を切り出し, これをミニマル領域 LES の初期場とする (図 2.18(b)). 大規

模領域 LES の時刻 t が 0s から 7200s までの出力データを 360s 間隔で利用して、ミニマル領域 LES の初期の流れ場を 21 ケース決定した (それぞれケース 1 からケース 21 と呼ぶ).

このようにミニマル領域 LES の計算領域を設定したために、本解析で注目している水平波長 571m で地衡風とのなす角 15 度のストリーク構造は x 軸方向の無次元波数が 0 で y 軸方向には 2 である摂動に相当することになる. ミニマル領域 LES の出力データに図 2.13 に示されたフィルターを用いることで、このストリーク構造を抽出する. フィルターの特性を示すパラメータは水平波長 $\alpha = 2\pi/\lambda$, $\epsilon = 0^\circ$ となる.

この計算手法で注意する点として水平方向の境界条件がある. ミニマル領域 LES の初期の流れ場は水平方向には周期境界条件を満たしていないが、数値積分の際には周期境界条件を課して計算を行う. この不整合によって計算初期においては流れ場は非物理的な挙動を示すと考えられるため、計算初期の出力データは以後の解析には用いない (非物理的な挙動かどうかは流れ場を見て適宜判断する).

2.5.2 結果

最初にミニマル領域 LES で得られた流れ場のスナップショットを示す. 図 2.19 はケース 18 の $t=6660s$, 高度 105m での水平風速と鉛直風速の水平断面分布を示している. この時刻は後に示すようにストリーク構造が強く発達をした直後の時刻に相当している. $y \sim 200m$, $800m$ で低速ストリークが明瞭に現れており, x 軸方向にもほぼ一樣な構造を示している ($x \sim 1200m$ 周辺を除く). このため、前節で用いたフィルターを用いても、時間発展の情報が失われずにストリーク構造が抽出できると考えられる.

実際にケース 18 を用いてストリーク構造の時間発展を調べる. 図 2.20 はストリーク構造の運動エネルギーと平均流からのエネルギー変換量の時間変化を示している. 摂動の運動エネルギーと平均流からの変換量は式 (2.13) と (2.15) を用いてそれぞれ計算される. 式 (2.15) の被積分関数のうち 1 項目が DS 成分の変換量 (図 2.20(a)) を 2 項目が OT 成分の変換量 (図 2.20(b)) に対応している. z_{int} は 500m として計算を行った.

図 2.20 を見ると、およそ $t=5000(s)$ から $t=6200(s)$ の期間に大きな平均流からのエネルギーの流入とそれに伴うエネルギーの増大が OT 成分, DS 成分共に見られる. ストリーク構造は他の擾乱とも常に相互作用をしてエネルギー交換をしているため、必ずしも平均流から正のエネルギー変換があった時に擾乱のエネルギーが増大するとは限らないが、この時刻においては明確な平均流からのエネルギーの供給とそれに伴う擾乱の運動エネルギーの増大が見られる.

なお図 2.20 を見ると、 $t=500(s)$ から 2000(s) にかけても平均流からの大きなエネルギーの流入とエネルギーの増大が DS 成分の運動エネルギーで明瞭に見えているが、計算初期に存在する境界条件による数値誤差の影響が含まれている可能性があるため解析には用いなかった.

また注目すべき点は平均流からのストリーク構造への運動エネルギーの変換量の最大値が OT 成分では $t=5800s$ 程度であるのに対して DS 成分では $t=6200s$ 程度と遅くなっている点である. この性質については次の節で考察する.

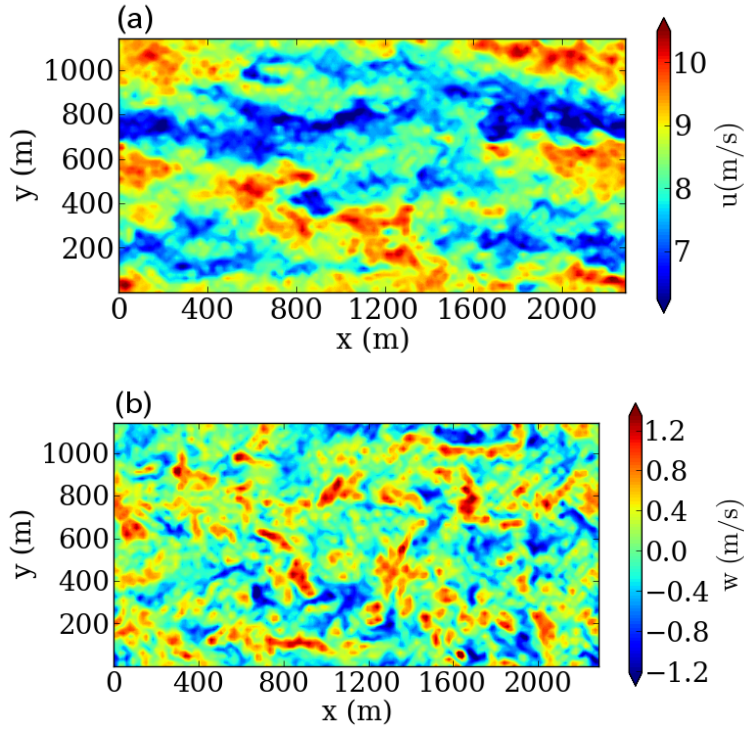


図 2.19: ミニマル領域 LES で得られた時刻 $t=6660\text{s}$, 高度 105m での速度 u (a), と鉛直速度 w (b) の水平断面分布.

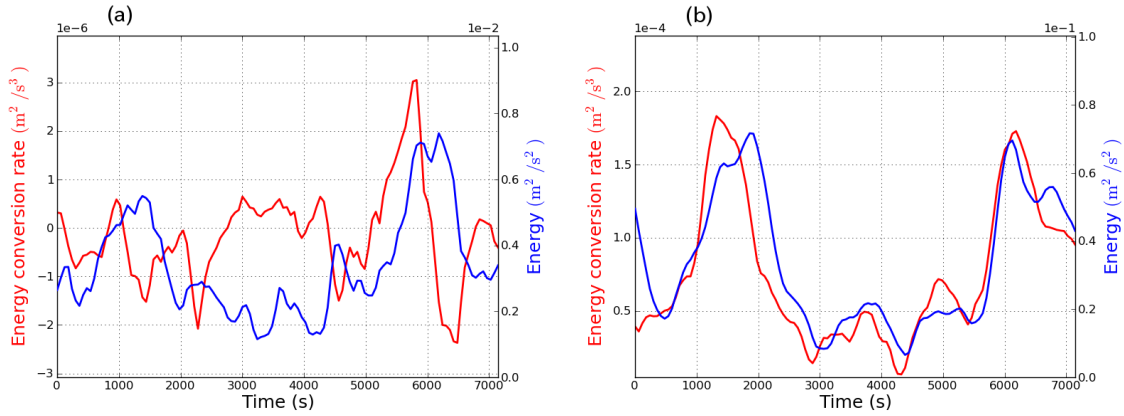


図 2.20: ケース 18 の数値実験で得られたストリーク構造の運動エネルギー (青線) と平均流からストリーク構造へのエネルギーの変換量 (赤線) の時間変化. (a) は OT 成分, (b) は DS 成分. 縦軸のスケールが (a) と (b) で異なっていることに注意が必要である.

次に, ストリーク構造が急激に発達している期間における速度分布の y - z 断面を図 2.21 に示す. y - z 断面における平均流の鉛直シアは y 軸負の向き, 図 2.21 での左向きである. 図 2.21 を見ると初期に図の右方向に倒れていた OT 成分の v', w' がシアによって一旦起

き上がりながらさらに左に倒れていく様子が見られる。また DS 成分である u' は OT 成分が成長を止めた後も成長を続け、鉛直に広く広がっていたものが地面近くに局在するような挙動が見える。

他のケースでも大きくエネルギーが増大する期間には同様の擾乱のパターン変化がしばしば出現しており、ここで示されたストリーク構造発達の時間変化はエクマン境界層の中で普遍的に起こっていると考えられる。他のケース (ケース 6, 9, 17, 21) での摂動のエネルギーと平均流からのエネルギー変換量の時間変化、そして擾乱のパターンの時間変化は付録 A.2 に示した。

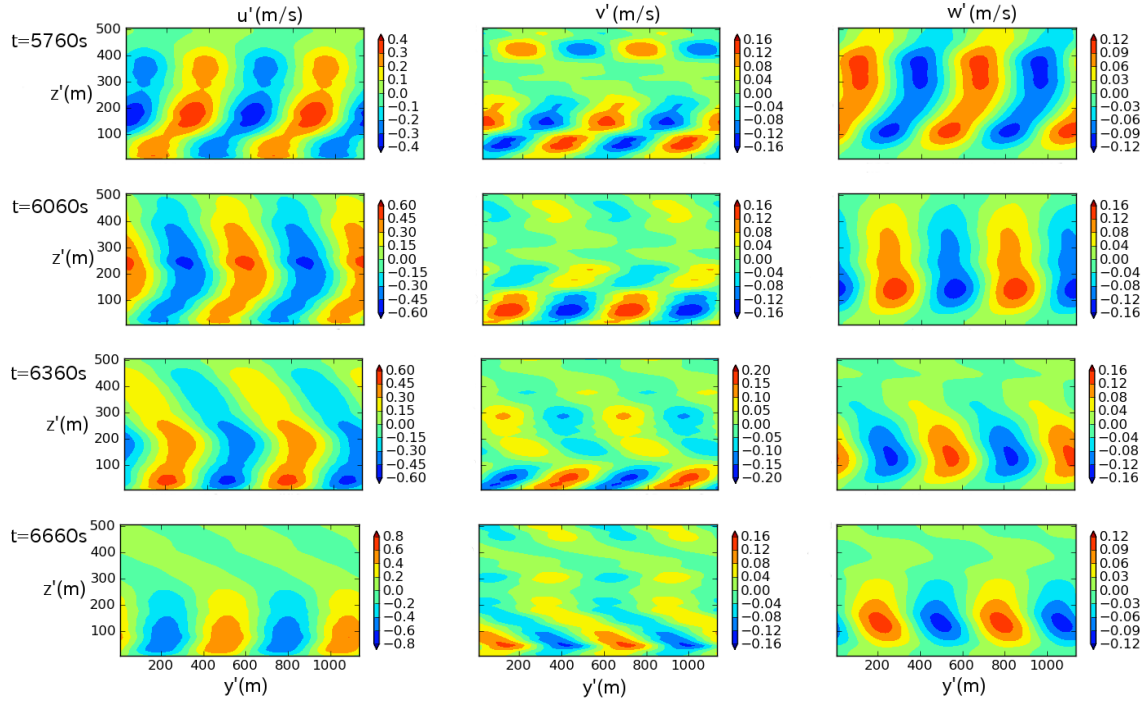


図 2.21: ケース 18 の数値実験で得られたストリーク構造の速度の 3 成分 (u', v', w') の y' - z' 断面での時間変化, 時刻は上から $t=5760\text{s}$, 6060s , 6360s , 6660s である。フィルタリングを行っているためすべての x' で摂動のパターンは同一である。

2.6 ストリーク構造発達の物理的解釈

この章ではミニマル領域 LES によって得られたストリーク構造の時間発展パターンの物理的解釈を行う。単純シア一流中の摂動発達のメカニズムに関しては?がオーアメカニズムとロールメカニズムの相乗作用によって摂動の急激な発達が起こることを示しており、この節ではエクマン層でも同様の解釈によってストリーク構造の発達が表せること示す。

2.6.1 オーアメカニズム

オーアメカニズム(?)とは図 2.22 のように平均場の風速が $V'(z')$ (黒線) で表され、風速のシアが y' 軸の正の向きである系において擾乱が発達するメカニズムのことである²。青の矢印で表される循環を持つ擾乱が存在しており、この擾乱がシアの向きと逆向きの y' 軸の負の向きに傾いている場合 (図 2.22a) を考える。この場合にはレイノルズ応力の $y'-z'$ 成分 $v'w'$ (v', w' はそれぞれ y' 軸方向, z' 軸方向の速度。小文字は擾乱成分を表す。) は負の値を取り、エネルギー方程式における生成項 $-v'w'dV'/dz'$ (式 2.15 参照) は正の値となり、擾乱は平均流からエネルギーを受けとることで成長する。逆に図 2.22(b) のように擾乱がシアと同方向に傾いている場合には、エネルギー生成項は負となり、擾乱から平均流に運動エネルギーが変換され擾乱は減衰することになる。

シアを持つ平均流は擾乱を移流することでそのパターンを変化させ図 2.22(a) の状態から (b) の状態に変化させようとする性質を持つため、擾乱固有の位相速度がそれに打ち勝つことができなければ図 2.22(a) の状態は維持されない。

変曲点不安定モードのようなノーマルモードの場合には自身の位相速度と移流の効果が釣り合い、図 2.22(a) の状態を維持することでオーアメカニズムによる成長が永続的に可能となっている(?)。しかし、後述するノンモーダル不安定などでは図 2.22(a) の状態は有限時間しか維持されないために、擾乱の発達も有限時間で終了する。

2.6.2 ロールメカニズム

ロールメカニズム(?)は鉛直流が存在する条件下で、平均鉛直シアを持つ水平流成分の擾乱を成長させるメカニズムである。図 2.23 では水平平均流は $U'(z')$ で示してある。この環境場のもとに上昇流 (図 2.23(a)) がある状態を考える。上昇流は平均流が低速の領域から流体を移流してくるため、この地点では擾乱の水平成分 (赤線) は負になる。この結果レイノルズ応力の $x'-z'$ 成分は負となり擾乱は発達可能である。図 2.23(b) には鉛直流が負の場合も示しているが、この場合もレイノルズ応力の $x'-z'$ 成分は負であり摂動は発達する。

オーアメカニズムとロールメカニズムが異なる点は擾乱の位相が変化する方向である。オーアメカニズムでは図 2.23 に示されているように擾乱のパターンはシアベクトル向きと同じ y' 軸方向に変化している。一方のロールメカニズムでは擾乱のパターンは平均水平流の向きである x' 軸方向には一様である。連続の式より擾乱の鉛直成分は正の値だけではなく負の値 (図 2.23(b)) も取るはずであるが、その位相が変化する向きは図に垂直な y' 軸方向である (図 2.23(c))。また、オーアメカニズムが有限時間しか働かないのに対して、ロールメカニズムには自身の中に鉛直流を抑制する機構が含まれていないために鉛直流が存在している限り永続的に働く点も、両者のメカニズムの違いである。

²図 2.22 では水平方向の座標を y' と書き表しているが、特定の向きを指定しているわけではない。図 2.21 との比較を用意するためにこのように書いた。ロールメカニズムの図 2.23 でも同様。

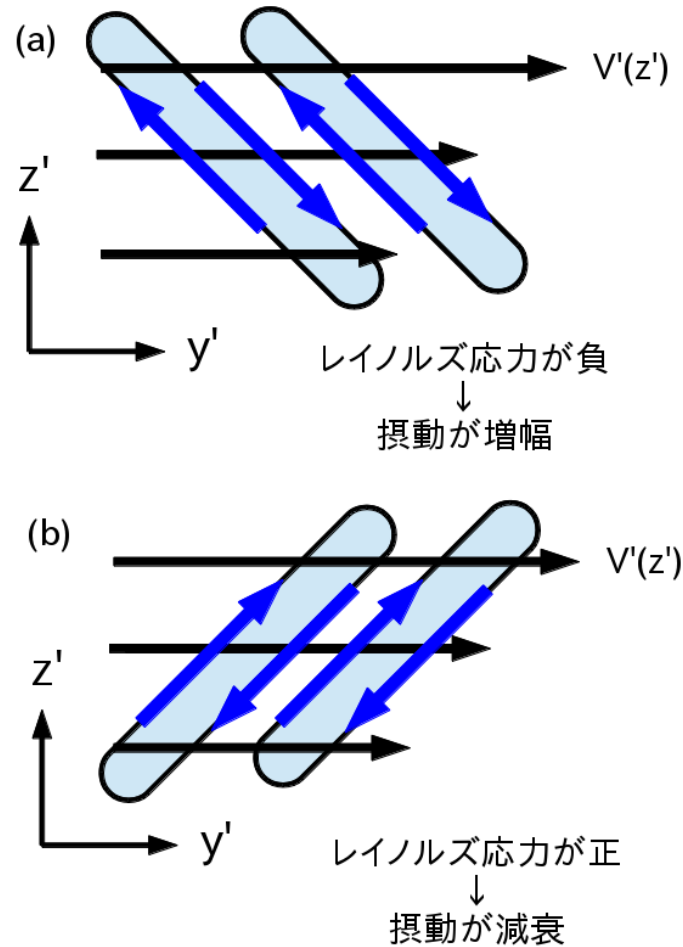


図 2.22: オアメカニズムの概念図. 黒線が平均流 $V'(z')$ を表しており風速のシアは y' 軸の正の向きである. 青の矢印で表される循環を持つ擾乱がシアの向きと逆向き (y' 軸の負の向き) に傾いている状態 (a) と同じ向きに傾いている状態 (b) を示している.

2.6.3 オアメカニズムとロールメカニズムの相乗効果

次に上で述べた2つのメカニズムの概念を用いてストリーク構造の急激な発達を説明する. この発達にはエクマン層の風速プロファイルのシアベクトルが水平2成分に分解できることが重要な意味を持っている (図 2.24). エクマン層内にストリーク構造 (図では円柱で表した) が存在している時に, エクマン層の平均流の鉛直シアベクトルはストリークの軸 (等位相線) に沿った向きの成分 (青の矢印) と直交する成分 (赤の矢印) に分けられる. ストリーク構造が図に示したような向きをしている場合には青矢印のシアが強くなるが直交成分のシアもゼロではない.

この条件下ではストリーク構造を形成する摂動の発達には2種類のメカニズムの両方が働くことになる. ストリーク構造の OT 成分が直交シア (赤) に対して傾いていればオアメカニズムによって OT 成分が強化される. 一方, OT 成分に含まれる鉛直流とス

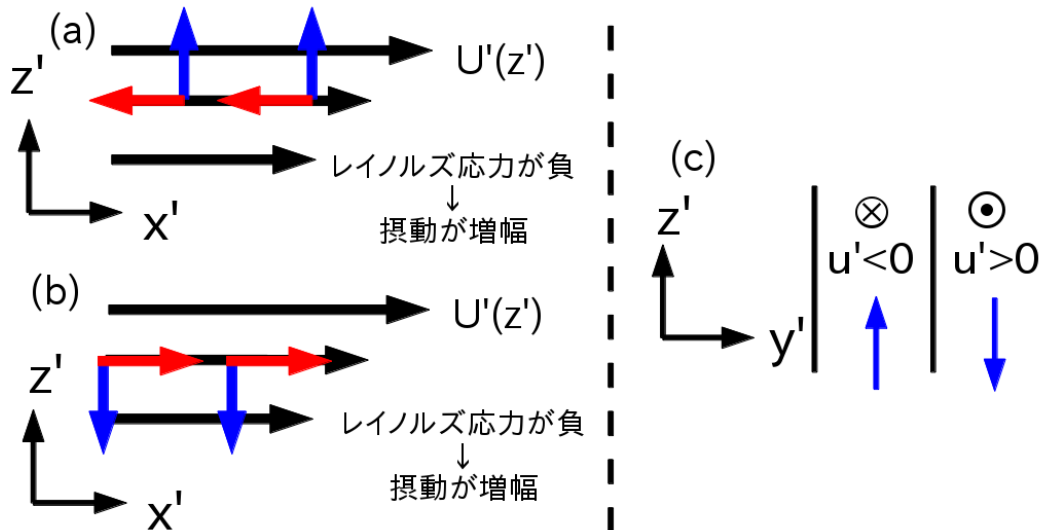


図 2.23: ロールメカニズムの概念図. (a) と (b) が $x' - z'$ 断面, (c) が $y' - z'$ 断面を示している. (a) と (b) での黒矢印は平均流 $U'(z')$ を表し, 青線が擾乱の鉛直成分 w' , 赤線が擾乱の水平成分 u' を示している. (a) では上昇流とそれに伴う水平低速流によってレイノルズ応力 $u'w'$ が負になり摂動が発達する様子を, (b) では下降流と水平高速流の場合で同様にレイノルズ応力が負となり摂動は発達する様子を示している. 擾乱は x 軸方向には一様であり, (c) に示されているように y' 軸方向に位相が変化している.

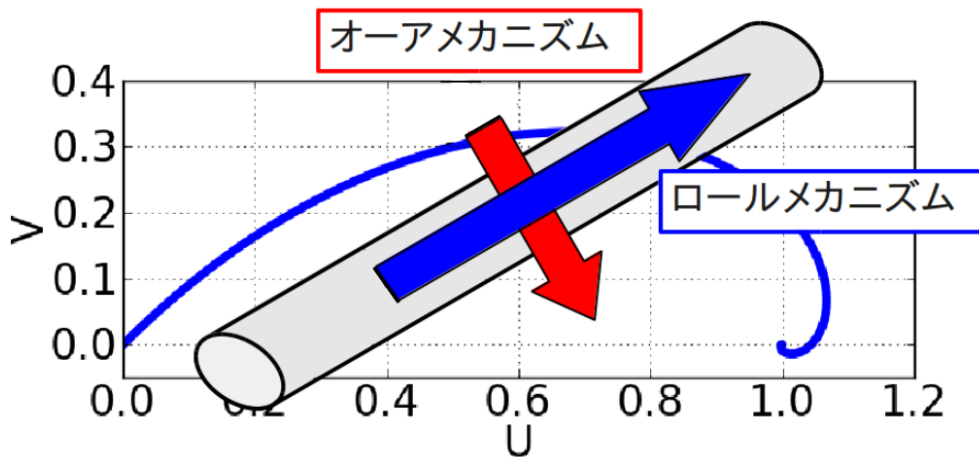


図 2.24: エクマン層内のストリーク構造に働く風速シアベクトル 2 成分の概念図.

トリークの軸方向のシア (青) によってロールメカニズムが働き, ストリーク構造の DS 成分が強化される.

この強化過程はミニマル領域 LES において見られたストリーク構造の時間発展の様子

(図 2.21) に見出される．OT 成分 (鉛直流 w')³ のパターンがシアーによって図の左方向に倒れていく様子が見て取れるが，パターンがシアーと反対の向きに傾いている間は OT 成分のエネルギーが増大する．その後は OT 成分の成長は止まるが，生じた鉛直流によってロールメカニズムが働き摂動の発達が続くことが可能である．したがって DS 成分への平均流からのエネルギー供給の方が OT 成分に対するものよりも時間的に後まで続くことが分かる．このメカニズムが図 2.20 で見られた，OT 成分と DS 成分へのエネルギー変換量の最大値を取る時間差を生じさせていると考えられる．このようにストリーク構造の発達期においてオーアメカニズムとロールメカニズムの両方が働いていることが見て取れる．

2.7 議論とまとめ

この章では LES を用いて大気エクマン層の数値実験を行い，そこで出現するストリーク構造の性質や形成メカニズムを考察した．最初に LES で再現されたエクマン層やストリーク構造の空間特性など基本的な結果を示し，これらが先行研究で示された結果と同様のものであることを示した．このことより本研究で行った数値実験の妥当性が確認され，以後はエクマン層の流れ場から抽出されたストリーク構造のエネルギー論や時間発展の特性を解析できるようになった．

複雑に乱れた境界層内の擾乱を水平波数と地衡風方向とのなす角に違いによって分解してエネルギー解析を行い，どのような擾乱が平均流から最も多くエネルギーを受け取っているかを解析した．その結果，ストリーク構造に対応する地衡風とのなす角が 15 度程度の摂動が平均流と強く相互作用をして他の向きと摂動の比較して多くのエネルギーを受け取っていることが示された．すなわち，ストリーク構造が含まれる空間スケールが数百 m 程度の擾乱に対しては，図 2.25 に示されるような乱流のエネルギー輸送の非等方性が存在していることが示された．

流体の運動エネルギーは平均流から大規模な渦へ，そして小さな渦へと順々に変換されている (エネルギーカスケード)(木田・柳瀬, 1999)．十分に小さなスケールでの渦から別の渦へのエネルギー変換は等方的に行われることが知られているが，エクマン層におけるストリーク構造のような大規模な渦においてはこの性質は成り立たない事が示された．

水平波長が数百 m 程度のスケールの擾乱では地衡風とのなす角が 15 度程度の擾乱が選択的に平均流からエネルギーを受けとりストリーク構造が形成されること，すなわちエネルギーカスケードの非等方性を示すことは，この研究で得られた新たな知見である．

図 1.4 に示されているように，ストリーク構造の水平波長は高度に依存して増大していくことが知られている．平均流とストリーク構造とのエネルギー変換の観点からこのことを理解するためにエネルギー解析の積分領域 z_{int} を 250m にした解析も行った (図 2.16b)．この場合には水平波長の大きな摂動が大きなエネルギー変換量を示すことが期待されたが，最大値を示すパラメータの値は z_{int} が 500m の場合と同じであった．これは今回の解

³運動の OT 成分の空間パターンを表す流線関数と鉛直流は水平方向に半位相ずれているが同一の空間パターンを持っているため，OT 成分のパターンを知るためには鉛直流のパターンを見れば良い．

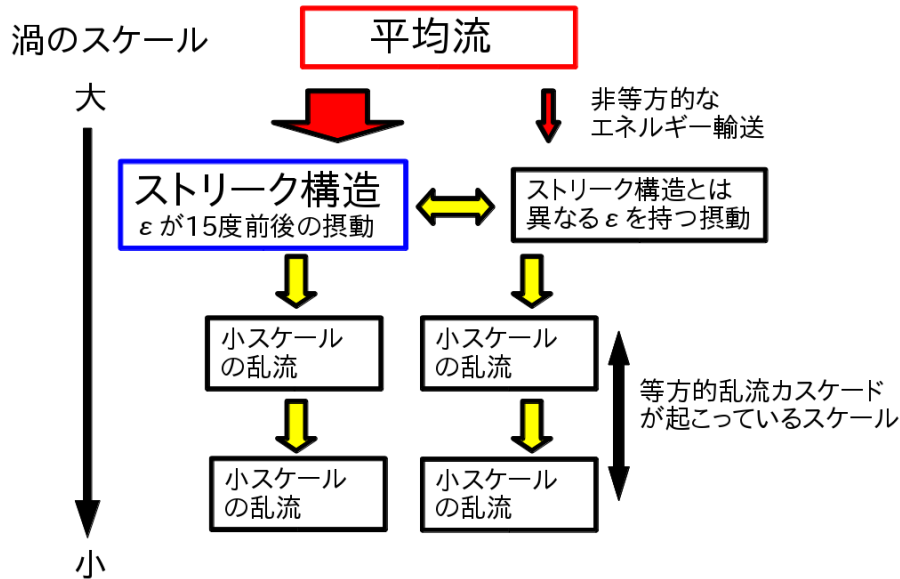


図 2.25: エクマン層における乱流のエネルギーカスケードの概念図. 平均流が持つ運動エネルギーが小スケールの渦の運動エネルギーに変換されていく様子を示している. 平均流からスケールの大きな渦にエネルギーが移される (赤矢印) 際には, ストリーク構造に対応する特定の向き ($\epsilon \sim 15^\circ$) を持つ擾乱に大部分のエネルギーが供給されており, エネルギーカスケードが非等方性を示す. より小スケールの乱流では等方的なエネルギーカスケード (黄矢印) が実現している.

析では低波数領域での水平波数の解像度が低いために, わずかなパラメータの違いによるストリーク構造の特性の違いは取り出せなかったものと推察される.

また, 大規模領域 LES では得ることができなかったストリーク構造発達の時間変化の様子をミニマル領域 LES を行うことで抽出して解析を行った. ストリーク構造の発達は数百 s 程度の時間で急激に起こり, その期間の摂動のパターンは固有の時間変化を示すことが示された. この時間変化の様子は?で述べられているオーアメカニズムやロールメカニズムの相乗作用によって解釈される.

図 2.21 を見ると摂動の OT 成分のパターンを表す鉛直速度 w' の分布は, 最初は平均風 V' の鉛直シア (図の左向き) と逆向きに倒れており, この間は平均流からストリーク構造の OT 成分に運動エネルギーが供給されている. 時刻 $t=6060\text{s}$ になると鉛直分布はほぼ直立してるが, この時刻は図 2.20(a) で示されているように平均流からストリーク構造の OT 成分のエネルギーの変換量が正から負に変わる時刻に相当する, そして, この時刻以降は鉛直分布は図の左方向に傾き, OT 成分へのエネルギーの変換量は負となっている. これらの結果はオーアメカニズムによる擾乱の発達過程と一致している.

オーアメカニズムにより強化された鉛直流がロールメカニズムによって軸方向速度 u' の発達を強めることによって, ストリーク構造の全エネルギーの急激な発達が引き起こされている. ?では単純シア一流中の擾乱の発達に関して, オーアメカニズムとロールメカ

ニズムのどちらか一方しか働かない場合に比べて、2つのメカニズムが相乗作用をする場合には大きな擾乱の発達を引き起こされることを示した。エクマン境界層のストリーク構造の発達においても同様にオーアメカニズムとロールメカニズムの2種類のメカニズムの相乗作用が本質的な役割を果たしていることが示された。

この章での解析によって、ストリーク構造の生成・発達期におけるエネルギー論と空間パターンの時間変化の様子が明らかになり、またストリーク構造の急激な発達を引き起こす物理メカニズムが特定できた。これらの知見は次章以降での解析に用いられる。

第3章 エクマン境界層の安定性解析

2章の解析で得られた、ストリーク構造が平均流から多くのエネルギーを受け取って急激な成長を見せるという結果は、ストリーク構造の初期の発達が生線形論によって説明できる可能性を示唆している。エクマン層内においてオーアメカニズムとロールメカニズムの2つのメカニズムが相乗作用して働く擾乱が急激な発達をしてストリーク構造となることが示されたが、ストリーク構造の特性(水平波長、地衡風とのなす角、鉛直構造)は数値実験によって得られたものであり、理論的に予測されたものではない。この章では生線形安定性解析を用いてエクマン層の不安定性を考察し、ストリーク構造となりうる擾乱を理論的に予測することを目的とする。

最初に1節でエクマン境界層の安定性解析を行っている先行研究を紹介する。2節で本章の目的を、3節で生線形安定性解析の手法を説明する。4節ではカノニカルエクマン層における変曲点不安定ノーマルモードと最適摂動の性質を解析する。5節ではキャッピング逆転層がエクマン層の安定性に与える影響について詳細に解析する。最後に6節でまとめを行う。

3.1 エクマン層内の生線形安定性解析の先行研究

3.1.1 ノーマルモード不安定

エクマン層内に出現する秩序構造の形成メカニズムを探るための生線形安定性解析は多くの先行研究で行われてきた。最初期のものでは、レイノルズ数の小さなエクマン層に対しての安定性解析が行われている。この研究では、中立成層カノニカルエクマン層を基本場として生線形安定性解析を行い、レイノルズ数の増大に伴い不安定ノーマルモードが出現すること示された。その後も多くの研究でこのノーマルモードは計算されており、レイノルズ数が54以上では平行不安定、113以上では変曲点不安定が出現することが示されている(?)。生線形安定性解析を行うエクマン層のレイノルズ数は200以上であることが多く、そのような条件下においては変曲点不安定は平行不安定と比べてはるかに発達率が大きいため、以後は変曲点不安定由来のノーマルモードのみを解析対象とする。この章で扱うレイノルズ数は本来の分子粘性係数を計算に用いる大気のレイノルズ数ではなく、渦粘性定数を用いているために非常に小さな値となっている点に注意が必要である。

その後、?などでこの変曲点不安定モードの性質が中立だけでなく安定や不安定成層をしたエクマン層に対しても調べられた。不安定成層を導入したエクマン層では1章で解説した対流ロール構造に対応すると考えられる不安定ノーマルモードが得られている。

ここまでの研究はカノニカルエクマン層を基本場として用いたものだったが、?や?では渦粘性係数を定数とするのではなく鉛直方向に変化できるようにしたより一般的なエクマン層の下で安定性解析を行っている。定量的な違いは見られるが、鉛直スケールの大きな変曲点不安定ノーマルモードが得られるという点では基本的な性質はカノニカルエクマン層を用いた研究と同様であった。

平行流の安定性理論では変曲点が存在することが不安定の必要条件となっており、エクマン層の変曲点不安定ノーマルモードはこれに対応している。?によれば、変曲点不安定のメカニズムはロスビー波の共鳴によって説明される。ここでロスビー波とは渦度の保存によって引き起こされる波のことであり、ベータ平面などで出現するロスビー波と物理的なメカニズムは同様である。

図3.1はこの波の共鳴を概念的に示している。この図では変曲点を持つ風速プロファイルの理想的な形として区分的に線形な風速プロファイルを用いており、この場合は変曲点は原点に対応する。変曲点の上下の2つのロスビー波が同じ位相速度(波が持つ固有の位相速度 + 背景場による移流)を持ち、2つの波の位相差が固定されている(位相がロックされている)場合には波の共鳴が起こり摂動が増幅することが可能となる。ただし、上下の2つのロスビー波の等位相な点を結んだ線がシアアの逆向きに傾いていることが必要である。これは2章でも述べたようにオーアメカニズムが働くための条件と同等である。エクマン層の風速プロファイルは変曲点を持っており、?ではストリーク構造の形成メカニズムとして変曲点不安定が候補として挙げられている。

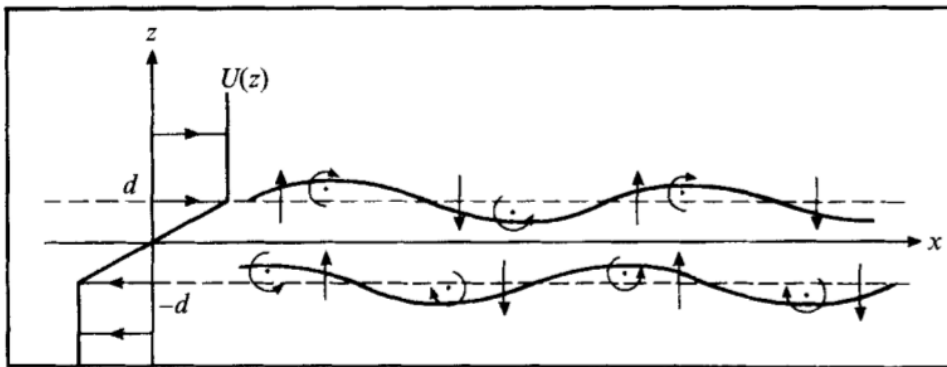


図 3.1: 波の共鳴によって引き起こされる変曲点不安定の概念図。変曲点を持つ風速プロファイルを区分的線形なプロファイルに置き換えて、エッジ ($z = d, -d$ の地点) の所に捕捉されたロスビー波の共鳴により不安定が起こることを説明した。?より引用。

3.1.2 ノンモーダル不安定と最適摂動

エクマン境界層の変曲点不安定ノーマルモードは様々な先行研究で調べられており、ストリーク構造形成メカニズムの候補とされているが、一方で変曲点不安定とは異なる別の不安定を主張する先行研究もある。その根拠としてあるのは、多くの大気エクマン層の数

値実験において変曲点不安定ノーマルモードに対応すると考えられるエクマン層の全域に広がる擾乱が発達してこないという事実である。(?). 不安定ノーマルモードが存在するならば数値実験においてはそのモードが他の擾乱に卓越して発達してくると考えられるが、数値実験を行うとストリーク構造は長時間にわたって維持されることはなく生成消滅を繰り返すという結果が先行研究では得られている。この事実は 2 章で行った LES でも確認することができ、ストリーク構造の生成消滅が見られるのみで支配的な不安定ノーマルモードの出現は見られない。

また、LES で得られるストリーク構造は水平方向・鉛直方向の広がり小さく地面近くのシアの強い領域にのみ存在しており、またストリークの伸びる向きも上空の地衡風方向と大きななす角を持っているなど変曲点不安定ノーマルモードとは異なった性質を持っている。さらに 2 章に示したミニマル領域 LES では、ストリーク構造の発達期において風速のパターンが時間と共に変化していく様子が見えており、単一のノーマルモードによってストリーク構造の発達が表現できるとは考えられない。このような事実から変曲点不安定以外のメカニズムによってストリーク構造が形成されるという主張がなされる。

?(以下 F97 と呼ぶ) ではストリーク構造の性質を説明するために、ノンモーダル (non-modal) な不安定による摂動の特性を解析した。ノンモーダルな不安定とは増幅ノーマルモードによらない不安定のことであり、特定のノーマルモードが単一で発達をするのではなく、いくつかのノーマルモードの重ね合わせられた摂動が全体として発達をするものである。そのためにノンモーダル不安定は特定の摂動のパターンを示さずに時間と共に形状変化をする。最適摂動に関する理論は比較的新しく、傾圧波 (?), 管内ポアズイユ流 (?) や成層単純シア流 (?) などに応用されている。

ノンモーダル不安定がおこる原因は線形安定性問題の非自己共役性にある (詳細は付録 A.3 参照)。シア流の場合は安定性問題の基礎方程式であるオーア・ゾンマーフェルト方程式が非自己共役性を持っているために、複数のノーマルモードが重ね合わさった摂動が最大発達率をもつ単一のノーマルモードよりも大きな発達率を示すことがありうる。ただし、このような急激な発達を示すのは有限時間に限られ、十分に長い時間が経過したのちはノーマルモードの定義より明らかなように最大発達率を持つノーマルモードが卓越するようになる。

次にノンモーダル不安定を解析するのに重要な概念である最適摂動について紹介する。初期に摂動が持っているノルムを 1 として任意の時間 τ (以下では最適化時間と呼ぶ) 経過後に何倍になっているかで有限時間の摂動の発達を見積もることとした時に、任意の摂動の中で最も倍率の大きな摂動を最適摂動と定義する。ここで用いるノルムは任意のものが使用できるが、F97 では摂動の発達を調べるための自然な尺度としてエネルギーノルムを用いており、本研究でもそれに倣う。最適摂動は複数のノーマルモードの重ね合わせで得られる場合もあるし、単一のノーマルモードが最適摂動となることもある。自己共役な安定性問題 (例: 基本場の流れがゼロの対流問題) においては任意の最適化時間に対して最大発達率を持つノーマルモードが最適摂動となるが、ノンモーダル不安定が起こるような非自己共役な系では最適摂動は複数のノーマルモードの重ね合わせとなることがある。

エネルギーの発達率が最も大きな摂動である最適摂動はノンモーダル不安定によって乱れが発生するような系において有限時間の摂動の発達を調べる際に最も注目すべき摂動

である。ただし、ノンモーダル不安定や最適摂動を扱う安定性問題は初期値問題に含まれる。初期に擾乱が持っていた振幅に応じて最終状態の振幅が決まるため、与えられた初期場によっては最適化時間経過後に最適摂動以外の擾乱が最大のエネルギーをもっていることもありうるのである。実際にエクマン層において大きな振幅を持って現れてくる擾乱と最適摂動との比較は4章のまとめで行う。

3.1.3 ?の結果

F97では大気エクマン層を対象として最適摂動の計算をおこない、ストリーク構造の発達に変曲点不安定ノーマルモードではなく最適摂動で表現されると主張した。大気エクマン層の安定性を支配する方程式は平均流が2成分あることによりオーア・ゾンマーフェルト方程式にさらに式が追加された方程式系であり(詳細は3.3節)、非自己共役な方程式系である。よって前述のノンモーダルな不安定が可能となっている。

F97で得られた最適摂動は最適化時間が短い場合と長い場合で以下の2種類に分けられる。

- evanescent instability
- growing instability

最適化時間が短い場合の evanescent instability は変曲点不安定による発達ノーマルモードを含まない最適摂動に対応しており、以下の性質を持っていた。

- 変曲点不安定ノーマルモードと比べて水平波長が短い。
- 鉛直スケールが小さく、摂動が地面近くに局在している。
- 数十分のオーダーで減衰する。

これらは中立エクマン層のLESで得られたストリーク構造と似通った性質である。よってF97ではストリーク構造の発達は最適摂動として解釈できると主張した。

一方の最適化時間が長い場合の growing instability は初期に変曲点不安定ノーマルモードを成分として含んでいる最適摂動に対応しており、十分に時間が経過すると摂動は変曲点不安定ノーマルモードに漸近していく。このような最適摂動も出現が可能なはずであるが、前述したように変曲点不安定ノーマルモードに対応する擾乱はLES等の数値実験では出現しない。この原因についてF97では evanescent instability が急激に発達することで変曲点不安定ノーマルモードの発達が阻害されているのではないかと推測しているが、明確な答えは分かっていない。

以下では変曲点不安定の含まない evanescent instability に着目し、最適摂動と述べた場合には変曲点不安定ノーマルモードを成分として含まない evanescent instability を指すことにする。

3.2 研究目的

本研究では F97 の主張を支持し、最適摂動によってストリーク構造の発達の様子が表現されると主張する。しかし、F97 以後の先行研究を見ても、この主張ははっきりとは受け入れられていない。これはストリーク構造の特性のうち空間構造はよく調べられているのに対して、時間発展の様子があまり調べられていない点に原因があると考えられる。最適摂動は変曲点不安定ノーマルモードよりも空間スケールが小さい等のストリーク構造と似通った特性を持ってはいるが、空間スケールは解析の設定 (例えば線形安定性問題における渦粘性の値) によって大きく異なってしまうため直接の根拠とはなり得ない。ノーマルモード不安定とノンモーダル不安定の根本の違いは時間変化にあるので、そこを明らかにしない限りどちらがストリーク構造の発達をより良く表現するのかという問いには答えられないと考えられる。

2 章のミニマル領域 LES によってストリーク構造発達の普遍的な時間変化の様子が得られており、それはノンモーダルな不安定の存在を示唆している。したがって、本研究ではストリーク構造と最適摂動の時間発展の様子を比較することで、最適摂動によってストリーク構造の特性が表現されるという主張を行う。

この章ではその準備としてカノニカルエクマン層における最適摂動の性質を明らかにする、また、もう一つの大きな問題である変曲点不安定ノーマルモードに相当する摂動がなぜ LES シミュレーションや観測では得られないのかを考察する。

3.3 線形安定性解析の設定

3.3.1 支配方程式

本解析では 2 章と同じでブシネスク近似を用いた非圧縮ナヴィエ・ストークス方程式を用いる。運動方程式、連続の式、熱力学の式を以下に示す。

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) u_* + f v_* \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial v_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial y_*} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) v_* - f u_* \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial w_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial w_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) w_* - g_0 \frac{\rho_*}{\rho_0} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial \rho_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial \rho_*}{\partial y_*} + w_* \frac{\partial \rho_*}{\partial z_*} = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) \rho_* \quad (3.5)$$

以後の計算の都合で速度は 3 成分を書き下している。座標系は F97 と同様で図 3.2 のようになっている。地衡風方向と y 軸のなす角を ϵ として座標系自身を回転できるように設定

している．なお，この ϵ はパラメータとして扱われることになる．2章で温位の代わりにここでは密度が用いられているが， $\rho'/\rho_0 = -\theta'/\theta_0(?)$ が成り立つため同様に扱うことができる． f はコリオリパラメータ， g_0 は重力加速度， ρ_0 は基準密度， K は渦粘性係数である．密度に関する渦拡散係数は運動方程式の渦粘性係数と同程度の量であるため本解析では同じ値とした．

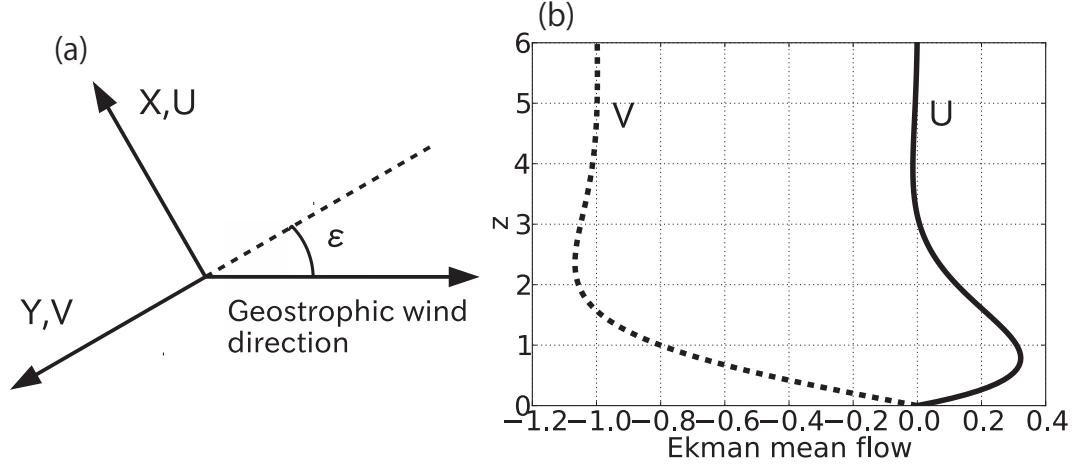


図 3.2: (a) 座標系の設定. (b)(a) の座標系を用いたときのカノニカルエクマン層の風速プロファイル ($\epsilon = 0^\circ$).

この方程式系では LES の場合とは異なり空間フィルタリング行っていないため変数に上線は付けていない．*が付いている変数は有次元を表している．渦粘性係数はこの章で扱うカノニカルエクマン層の場合は定数となり，分子粘性の効果は渦粘性と比較して小さいため無視することとする．

次に方程式の無次元化を行う．速度のスケールとして地衡風速 G ，長さスケールとしてはカノニカルエクマン層の e-folding 高度 $\delta = \sqrt{2K/f}$ を用いる．時間スケールには移流時間 δ/G ，密度には基準密度 ρ_0 を用いた．無次元化された方程式は以下ようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{1}{Ro} v \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v - \frac{1}{Ro} u \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - g\rho \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho \quad (3.10)$$

ここで3つの無次元化パラメータ，レイノルズ数，ロスビー数，無次元重力加速度は以下

のように定義される.

$$Re = \frac{G\delta}{K}, \quad Ro = \frac{G}{\delta f}, \quad g = \frac{g_0\delta}{G^2} \quad (3.11)$$

ここで 2 章と同様に速度の平均量を太文字で表記し (密度に関しては $\bar{\rho}$), 擾乱成分は小文字で表記することにする. 擾乱成分に関する予報方程式を導き, その際に擾乱の 2 乗量は無視することで方程式を線形化する.

ここで平均場の変数は水平一様として, z のみの関数と仮定する. この仮定と連続の式から平均鉛直風 W は常にゼロであることが分かる.

次に擾乱成分に関しては 2 次元擾乱を仮定して, y 方向微分がゼロであると仮定する. この仮定は問題の一般性を失わせるものではない (後述).

線形化を行い, 上に述べた仮定を用いると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + wU' = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Ro} v \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + wV' = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{Ro} u \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g\rho \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + w\bar{\rho}_z = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) \quad (3.16)$$

ここで, プライムは鉛直常微分を表し, $\bar{\rho}_z = d\bar{\rho}/dz$ である.

次に u, w に関する流線関数を導入して (3.12), (3.14) 式を流線関数の式に変形する. 流線関数は 2 次元擾乱の OT 成分を表している. 残った DS 成分である v は以後, 軸方向速度と呼ぶことにする. この変形によって自動的に連続の式 (3.15) が満たされ圧力を陽に扱わなくて済むようになる. 最終的に支配方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + wV' = \frac{1}{Re} \Delta_y u - \frac{1}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Delta_y \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta_y \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} U'' = \frac{1}{Re} \Delta_y^2 \psi + \frac{1}{Ro} \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + w\bar{\rho}_z = \frac{1}{Re} \Delta_y \rho \quad (3.19)$$

ここで $\Delta_y = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, $u = \partial \psi/\partial z$, $w = -\partial \psi/\partial x$ である.

次に, 変数の擾乱成分を以下のようにフーリエ展開をする.

$$[v, \psi, \rho] = [\tilde{v}(z, t), \tilde{\psi}(z, t), \tilde{\rho}(z, t)] e^{i\alpha x} \quad (3.20)$$

ここで水平波数 α はパラメータとなる. 前述したように擾乱は 2 次元擾乱と仮定されているが, 2 つのパラメータである水平波数 α と地衡流とのなす角 ϵ を適当にとって重ね合

わせることで任意の擾乱が表現できる．このためこの仮定によって問題の一般性は失われない．

式 (3.20) を式 (3.17) – (3.19) に代入すると,

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{v} + i\alpha V' \tilde{\psi} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{v} - Ro^{-1} D \tilde{\psi} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(D^2 - \alpha^2) \tilde{\psi} &= -i\alpha U (D^2 - \alpha^2) \tilde{\psi} + i\alpha V'' \tilde{\psi} \\ &\quad + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2)^2 \tilde{\psi} + Ro^{-1} D \tilde{v} + i\alpha g \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{\rho} + i\alpha \bar{\rho}_z \tilde{\psi} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{\rho} \quad (3.23)$$

の形の方程式が得られる．ここで, $D = d/dz$ である．

次に境界条件を設定する．下端 ($z = 0$, 地面) では速度擾乱, 密度擾乱ともにゼロとする条件を課す．一方, エクマン層には特別な上端境界は存在しないため, 鉛直方向には半無限領域を扱うことになる．無限遠での境界条件として, 擾乱の適当なノルムに関して $|v, \psi, \rho| < M$ (M は定数) が成り立つとする有界条件を課すと, 連続モードが出現することが知られている．この連続モードによって半無限領域での解の完全性が満たされることが示されている (?).

3.3.2 基本場とパラメータの設定

流れの基本場としてはカノニカルエクマン層のプロファイルを用いる．

これはパラメータ ϵ を含んだ形で,

$$U(z) = -\sin(\epsilon)(1 - e^{-z} \cos(z)) + \cos(\epsilon)e^{-z} \sin(z), \quad (3.24)$$

$$V(z) = -\cos(\epsilon)(1 - e^{-z} \cos(z)) - \sin(\epsilon)e^{-z} \sin(z) \quad (3.25)$$

のように表される． $\epsilon = 0^\circ$ の時のプロファイルが図 3.2(b) に示してある．

摂動の水平波数 α と地衡風とをなす角 ϵ は擾乱の特性を表すパラメータであり, 2 章でストリーク構造の抽出を行った場合のパラメータと同一のものに対応している (図 3.3). 他の環境場の特性を示すパラメータは以下の値に固定する．

- 地衡風速 $G = 10(\text{m/s})$
- コリオリパラメータ $f = 10^{-4}(1/\text{s})$
- 重力加速度 $g_0 = 9.8(\text{m/s}^2)$
- 渦粘性係数 $K = 8(\text{m}^2/\text{s})$

LES では用いなかった渦粘性係数以外の値は LES の値と揃えてある．これらの値を用いるとレイノルズ数は 500, ロスビー数は 250, 無次元重力加速度は 39.2 というように計算される．またエクマン層の e-folding 高度は 400m で時間の無次元化に用いた移流時間は 40s となる．

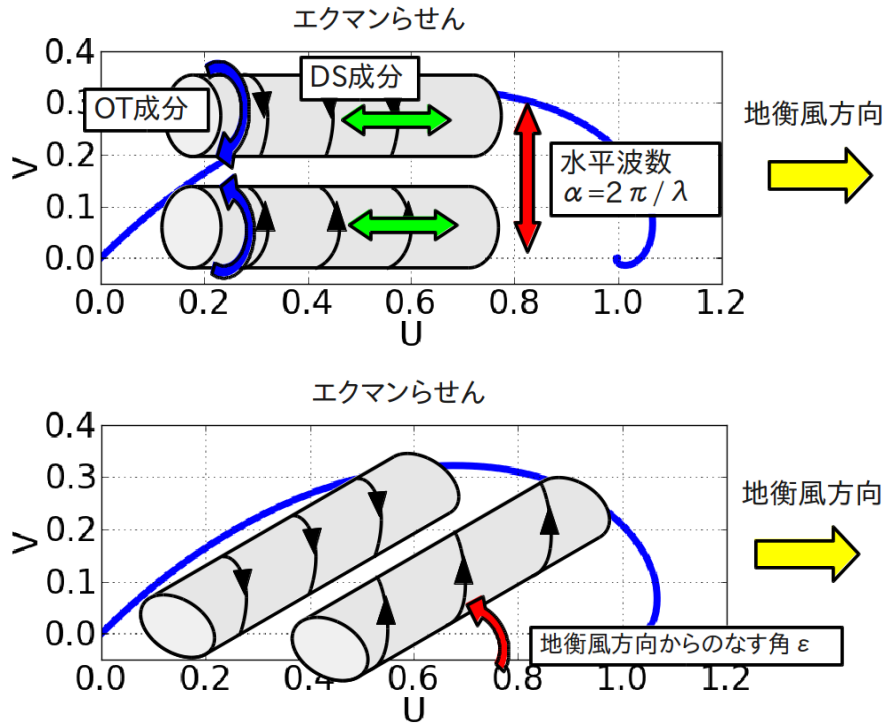


図 3.3: 図 2.14 の再掲．ただしこの摂動は x 軸方向 (摂動の軸方向) に一様な安定性解析における 2 次元摂動を表している．水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ が 2 次元摂動の特性を示す．運動の DS 成分は速度 v に OT 成分は $\psi(u, w)$ に対応している．2 章とは座標系の設定が異なるため，DS 成分と OT 成分に相当する速度が異なっている点に注意が必要である．背景の青線は基本場であるエクマンらせんである．

3.3.3 ノーマルモードの計算

次にノーマルモードの計算方法を説明する．ノーマルモードは線形安定性解析の基本となるものであり，すべてのノーマルモードの挙動が分かれば，任意の摂動の発展が分かることになる．

固有値問題の式 (3.21)–(3.23) の鉛直方向の差分化の方法には以下のような手法が存在する．

- (1) 有理チェビシェフ多項式による展開を用いて半無限空間をそのまま離散化する．
- (2) 有限領域 (地面から高度 z_{top} まで) に解析領域を制限しチェビシェフ多項式展開を用いる．

どちらの手法でも同様のノーマルモードが得られ，最大発達率のノーマルモードのみを解析する場合には大きな違いはない．しかし，以下で出てくる連続モードを含む最適摂動を計算するためには，(1) の手法では精度が低い (F97)．そこで本解析では (2) の手法を用い

て z_{top} は 40 とした．チェビシェフ多項式に関しては付録 A.4 にまとめてある．また，チェビシェフ多項式の最大次数は $N = 200$ とした．

式 (3.20) における鉛直と時間依存性を表現する部分を

$$[\tilde{v}(z, t), \tilde{\psi}(z, t), \tilde{\rho}(z, t)] = \sum_{n=0}^N [v_n(t), \psi_n(t), \rho_n(t)] T_n(z) \quad (3.26)$$

のように展開する．ここで， T_n はチェビシェフ多項式を表している．この式 (3.26) を式 (3.21)–(3.23) に代入し，チェビシェフ多項式の直交条件を用いると展開係数に関する方程式が分離できる．形式的に書くと，式 (3.21)–(3.23) が

$$\frac{\partial M \mathbf{q}}{\partial t} = L \mathbf{q}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{q}(t) = [v_n(t), \psi_n(t), \rho_n(t)] \quad (n = 0 \dots N) \quad (3.28)$$

のように変形される．ここで L は時間微分を含まないその他全ての項を含む線形演算子である．また M は式 (3.22) の時間微分の中に含まれている演算子を離散化したものである．

この離散化の際には，境界条件を満たすためにタウ法を用いた (?)．

ここで時間依存性を $\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}} e^{\lambda t}$ と書き表すことで，

$$\lambda M \hat{\mathbf{q}} = L \hat{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

となり，行列の一般化固有値問題を帰着させられた． λ が固有値であり複素数の増幅率， $\hat{\mathbf{q}}$ が固有関数でありノーマルモードに対応する．最後に行列の一般化固有値計算をせねばならないがこれには LAPACK¹ を利用した．

なお，固有値計算に関して式 (3.22) が 4 回微分を含む方程式であるため，行列の固有値計算を行うときに倍精度実数では精度が足りなくなるという問題があったので，? の手法を用いて精度不足を回避した (付録 A.5 参照)．

3.3.4 最適摂動の計算

ここでは最適摂動の 2 種類の計算方法を紹介する．1 つ目は F97 と同じで固有値展開を用いた手法である．2 つ目は随伴方程式を用いた手法であり，固有値展開を用いた手法が適用できない特殊なケースにのみ用いた．

(1) ノーマルモード展開を用いた手法

この手法は F97 で使われたものと同様なので手順のみを記す．

まず最初に摂動を以下のようにノーマルモードで展開することを考える．

$$[v(y, z, t), \psi(y, z, t), \rho(y, z, t)] = e^{i\alpha x} \sum_{n=0}^N k_n(t) [\hat{v}_n(z), \hat{\psi}_n(z), \hat{\rho}_n(z)] \quad (3.30)$$

¹<http://www.netlib.org/lapack/>

ここでハットがついた変数はこの系におけるノーマルモードであり、計算の過程に用いたチェビシェフ多項式とは異なることに注意が必要である。インデックス n はノーマルモードの番号を示す。チェビシェフ多項式展開による自由度 N と変数の数が 3 個であることから、ノーマルモードは $3N$ 個得られる。また、 $k_n(t) = k_n(0) \exp(\lambda_n t)$ は各ノーマルモードの重みを表しおり、展開係数ベクトルと呼ぶことにする。

本研究ではノンモーダル不安定の発達の尺度として、以下で計算される力学的エネルギーの平方根を用いる。

$$E = \int \frac{1}{2} \left(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 - \frac{g}{\rho_z} |\rho|^2 \right) dV = \quad (3.31)$$

$$\int \frac{1}{2} \left(|u|^2 + |\psi_z|^2 + \alpha^2 |\psi|^2 - \frac{g}{\rho_z} |\rho|^2 \right) dV \quad (3.32)$$

この式は領域全体に渡っての力学的エネルギーの積分を表している。

この力学的エネルギーはノーマルモードベクトルのエルミート形式で以下のようにかける。

$$E = \mathbf{k}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{k}, \quad (3.33)$$

ここで $\dagger$ はエルミート随伴 (各成分に関して複素共役をとって転置) を表す。ここで

$$M_{mn} = \int_0^\infty \left[\frac{\partial \hat{\psi}_m^\dagger}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial z} + \alpha^2 \hat{\psi}_m^\dagger \hat{\psi}_n + \hat{v}_m^\dagger \hat{v}_n - \frac{g}{\rho_z} \hat{\rho}_m^\dagger \hat{\rho}_n \right] dz \quad (3.34)$$

と定義される。

次に $\mathbf{M}$ をコレスキー分解して、 $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} = \mathbf{M}$ となる行列 $\mathbf{F}$ を求める。最適摂動は任意の最適化時間 τ に対して

$$\mathbf{F} e^{\Lambda \tau} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^\dagger \quad (3.35)$$

のように特異値分解を行うことで得られる。ここで Λ は対角成分に固有値を並べた対角行列である。また、 $\mathbf{S}$ の第 1 成分がエネルギーノルムの増大率を表す。また最適摂動の初期摂動は、

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v}_1 \quad (3.36)$$

から計算される展開係数ベクトルから求まる。通常のノーマルモード解析では摂動の形状は変化していかないのと対照的に、最適摂動は時間と共に変化する。その時間発展は、

$$\mathbf{k} = e^{\Lambda t} \mathbf{k}_0 \quad (3.37)$$

から求めた展開係数ベクトルをノーマルモード展開の式 (3.30) に代入することで求まる。

(2) 随伴演算子を用いた手法

固有値分解を用いた最適摂動の計算方法はすべてのノーマルモードを一旦求めた後は任

意の最適化時間に対して一回の特異値分解をするだけで計算できたので効率的であった。しかし、5節で示す解析のようにキャッピング逆転層を導入して系内に密度成層が存在する場合には適用不可能であった。この原因にはF97でも述べられているように固有値の近い2つのノーマルモードが存在した場合に系の非自己随伴性より通常の固有値計算の計算精度が落ちるという性質が関連している。本研究では密度成層が追加されたために重力波に相当するノーマルモードが存在することとなり、カノニカルエクマン層の本来のノーマルモードを計算精度が低下することになった。そのために、ノーマルモード展開を用いた手法では最適摂動の計算ができなかったと考えられる。

この問題を回避するためにキャッピング逆転層を含む系では随伴演算子を用いた手法(?)を用いて、特異ベクトルとしての最適摂動の計算を行った。特異ベクトルは以下の関係式で表される。

$$\begin{aligned} L\mathbf{v}_n &= \sigma\mathbf{u}_n \\ L^*\mathbf{u}_n &= \sigma_n\mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (3.38)$$

ここで L を時刻 $t=0$ から τ までの時間変化を摂動に起こす演算子であり、 L^* は L のエネルギーノルムに関しての随伴演算子である。また、 $\mathbf{v}$ は右特異ベクトル、 $\mathbf{u}$ は左特異ベクトル、 σ は特異値を表す。今回の解析では第1特異値に対応する右特異ベクトル $\mathbf{v}_1$ が最適摂動の初期状態に相当し、右特異ベクトル $\mathbf{u}_1$ は最適化時間経過時の最適摂動である。また、第1特異値は最適化時間経過によるエネルギーノルムの倍率を表す。

(3.39) から、

$$(L^*L)\mathbf{v}_n = \sigma_n^2\mathbf{v}_n \quad (3.39)$$

が得られるため、右特異ベクトルは L^*L の固有ベクトルとして計算が可能である。

演算子 L は摂動の時間発展を表すため、直接に行列の成分を求めることは難しい。そこでべき乗法(?)を用いて固有ベクトルを計算する。ここで L^*L は半正定値エルミート演算子であるので、計算される固有値は0以上の実数であることに注意が必要である。

ここからはべき乗法の計算手法について解説する。
半正定値エルミート演算子の固有値問題

$$L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (3.40)$$

を解く。任意のベクトル $\mathbf{x}$ は完全な固有ベクトル系 $\{\mathbf{x}_i\}$ を用いて以下のように展開できる。

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_N\mathbf{x}_N \quad (3.41)$$

各固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ は、

$$L\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad (3.42)$$

という固有値を持ち、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ という順序を持っていると考えても一般性を失わない。²

²ただし、厳密に等号が成り立つことは実際は起こらない。

(3.41) を (3.40) に代入し, (3.42) を利用すると,

$$\begin{aligned} L\mathbf{x} &= a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_N\lambda_N\mathbf{x}_N \\ &= \lambda_1 \left(a_1\mathbf{x}_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \mathbf{x}_2 + \dots + a_N \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right) \mathbf{x}_N \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

この演算を繰り返すと,

$$L^n\mathbf{x} = \lambda_1^n \left(a_1\mathbf{x}_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{x}_2 + \dots + a_N \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{x}_N \right) \quad (3.44)$$

となり, $a_1 \neq 0$ である任意のベクトルは演算をくり返される度に第一固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ に漸近していく. 実際の計算では演算をする度にベクトルの絶対値が大きくなるため適宜規格化を行いつつ収束させる.

これがべき乗法の手順であり, 式 (3.39) の固有値問題を解いて得られた固有ベクトルが式 (3.39) の右特異ベクトルとなる. そして, 右特異ベクトルに演算子 L を施したものが左特異ベクトルとして得られ, 両者のエネルギーノルムの比をとれば特異値が得られる.

式 (3.21)–(3.23) にこの手法を適用して計算することも可能だが, 本研究では流線関数を導入する前の式 (3.12)–(3.16) を用いて計算を行った. 元の演算子 L は式 (3.12)–(3.16) を用いて最適化時間 τ まで積分を行う演算であるので, 随伴演算子 L^* は式 (3.12)–(3.16) の随伴方程式を用いて, 最適化時間だけ時刻を遡ることに相当する. 流線関数導入前の元の方程式系 (3.12)–(3.16) に式 (3.20) と同様の三角関数型解を代入すると以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{u} - U' \tilde{w} - i\alpha \tilde{p} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{u} + Ro^{-1} \tilde{v} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{v} - V' \tilde{w} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{v} - Ro^{-1} \tilde{u} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{w} - D \tilde{p} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{w} - g \tilde{\rho} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{\rho} - \bar{\rho}_z \tilde{w} + Re^{-1}(D^2 - \alpha^2) \tilde{\rho} \quad (3.48)$$

$$i\alpha \tilde{u} + D \tilde{w} = 0 \quad (3.49)$$

ノルムを力学的エネルギーノルム (運動エネルギー + 位置エネルギーの平方根) で定義した場合の式 (3.12)–(3.16) の随伴方程式を山根 (2002) を参考にして求め三角関数解を代入すると以下の式を得る. 計算方法の詳細は付録 A.6 に示した.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{u} + i\alpha \tilde{p} - Re^{-1}(D^2 - \alpha^2)\tilde{u} + Ro^{-1}\tilde{v} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{v} - Re^{-1}(D^2 - \alpha^2)\tilde{v} - Ro^{-1}\tilde{u} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = U'\tilde{u} + V'\tilde{v} - i\alpha U \tilde{w} + D\tilde{p} - Re^{-1}(D^2 - \alpha^2)\tilde{w} - g\tilde{\rho} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -i\alpha U \tilde{\rho} + \alpha^2 Re^{-1}\tilde{\rho} - g^{-1}Re^{-1}\bar{\rho}_z D^2(g\bar{\rho}_z \tilde{\rho}) - \bar{\rho}_z \tilde{w} \quad (3.53)$$

$$i\alpha v + Dw = 0 \quad (3.54)$$

こうして得られた方程式を用いて以下のように最適摂動を求める。

- (1) ランダムな初期摂動 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho})^T$ を (3.45)-(3.49) を用いて最適化時間 $t = \tau$ まで積分する。
- (2) 得られた解を (3.50)-(3.54) を用いて時刻 $t = 0$ まで積分する。
- (3) 解のエネルギーノルム (X と表記する) を計算したのち 1 に規格化する。
- (4) $1 - X_{n+1}/X_n$ (n は試行回数) が十分小さくなるまでこの手順を繰り返す (本解析では 10^{-4} 以下)。

実際にはパラメータスイープ計算などで近いパラメータの場合での収束解が分かっている場合には、それを初期値にした方が収束が早い。

3.4 ノーマルモードと最適摂動の基本的な性質

ここではカノニカルエクマン層を基本場としたときの変曲点不安定ノーマルモードと最適摂動の結果を示して、この 2 種類の摂動の特徴を考察する。ここでの結果は F97 のものと同一であり、簡単に結果を示す。

3.4.1 変曲点不安定ノーマルモード

カノニカルエクマン層には密度成層は含まれないため、ここでは密度に関する式は除外して自由度 $2N$ の固有値問題の結果を示す。図 3.4 は水平波数 $\alpha=0.50$, $\epsilon = 16.9^\circ$ の時の固有値分布を示している。横軸が摂動の固有値の実部でありノーマルモードの成長率、縦軸が固有値の虚部でノーマルモードの振動数を表している。ノーマルモード解は $e^{\lambda_n t} e^{i\alpha y}$ に比例するため、固有値の虚部が 0 でないということは摂動が水平方向に移動することを意味する。

この系のノーマルモードには 2 種類のタイプが存在する。1 つは図 3.4 で上方で横に伸びる連続的に分布している連続モード、もう 1 つはそこから分岐して右下方へ飛び飛び

に分布している離散モードである．離散モードは変曲点不安定に由来するものであり，最も増幅率の大きなものは正の増幅率を持っていることが分かる．正の増幅率を持つノーマルモードを含む離散モードの集団は第一（地面から一番目の）変曲点によるものである．図 3.5 は図 3.4 の拡大図で，連続モードと y 軸の交点付近を示している．図 3.5 では第 2 変曲点に由来する離散ノーマルモードも得られている．

一方の連続モードは鉛直方向に半無限領域を扱っていることで生じるモードである．チェビシェフ多項式の最大次数を有限の波数で打ちきっている本解析では，点列として計算されているが本来は連続的に存在しているモードである．これは?で計算された連続モードと同等のものであり，エクマン層の場合には連続モードは最適摂動の中にも成分として含まれている重要なモードである．

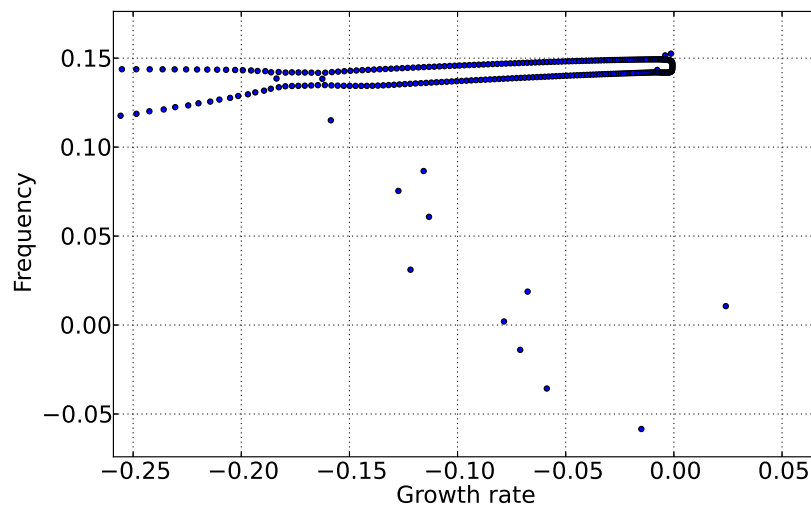


図 3.4: 水平波数 $\alpha = 0.50$, $\epsilon = 16.9^\circ$ での固有値分布．横軸は固有値の実部で摂動の発達率，縦軸は固有値の虚部で摂動の振動数を表す．ほとんど全てのノーマルモードが成長率が負であり，減衰モードとなっているが，変曲点不安定に由来する不安定ノーマルモードが $(0.023994, 0.010609)$ に 1 つ存在している．

次にパラメータ依存性を見るため α, ϵ に関してパラメータスイープ実験を行う．各パラメータの設定をした上ですべてのノーマルモードを計算し図 3.4 のような固有値分布を調べ，最大発達率を持つノーマルモードの発達率を計算する．この最大発達率のパラメータ依存性を図 3.6 に示した．地衡風とのなす角 ϵ が 16.9° で水平波数 α が 0.50 の時に最も大きな発達率を示すことが分かる．この時の不安定ノーマルモードは F97 も含めた多くの先行研究によって示されている変曲点不安定ノーマルモードである．

次に最大発達率を持つ変曲点不安定ノーマルモードの形状を図 3.7((a): 流線関数 ψ , (b): 軸方向速度 v) に示した．ノーマルモードはこの摂動のパターンを保ったまま発達するため，コンターの数値の絶対値に意味はなく相対的な値のみに意味がある．この最大発達率の変曲点モードが出現する時のパラメータ ϵ の値での水平平均風速の鉛直プロファイルを

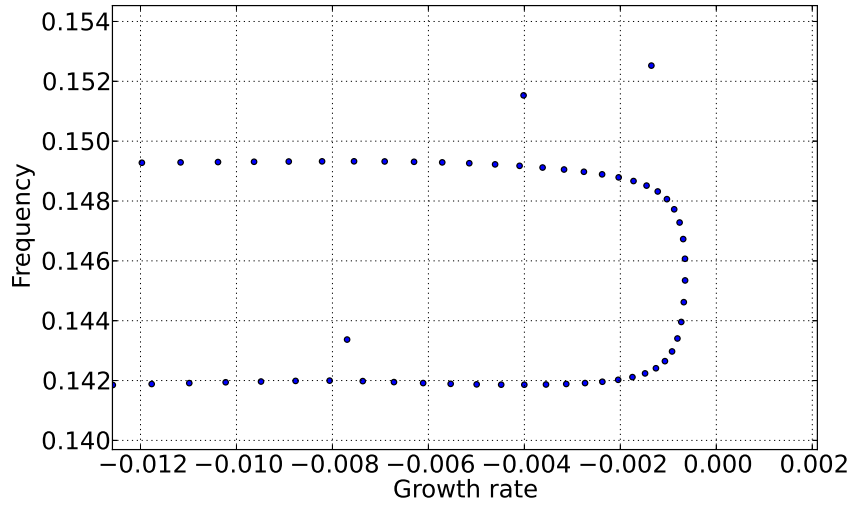


図 3.5: 図 3.4 の連続モードと y 軸の交点付近の拡大図.

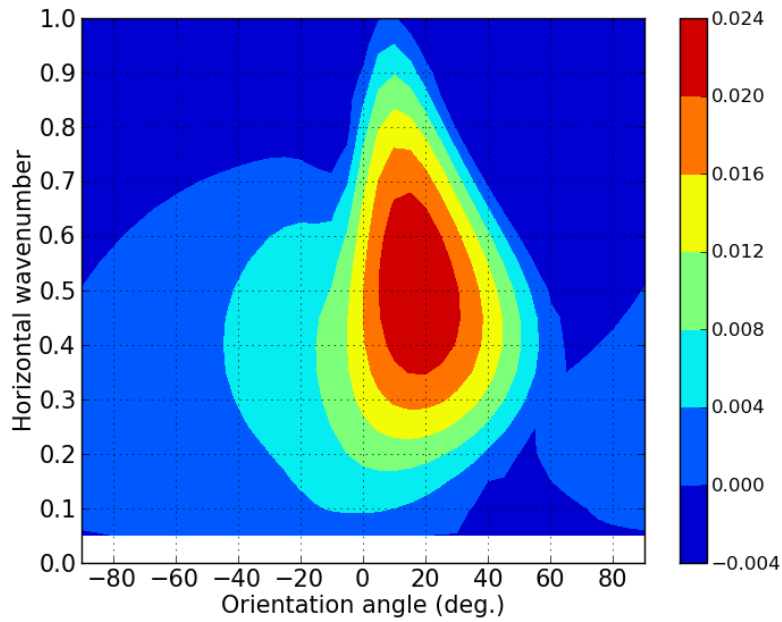


図 3.6: 変曲点不安定ノーマルモードの最大発達率の水平波数 α (y 軸) と地衡風とのなす角 ϵ (x 軸) に関する依存性. 最大発達率を持つのは水平波数が 0.50, $\epsilon = 16.9^\circ$ の時で発達率は 0.023994 である.

図 3.8 に示した. 変曲点不安定ノーマルモードのパターン (図 3.7) と水平平均風速の鉛直プロファイル (図 3.8) を比較すると以下のことが分かる.

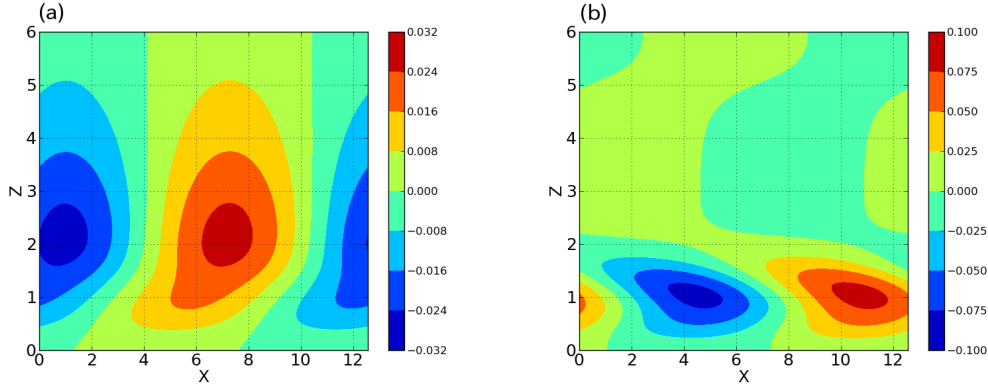


図 3.7: 水平波数 0.50, $\epsilon = 16.9^\circ$ での最大発達率ノーマルモードの流線関数 (a) と軸方向速度 (b).

- (1) 図 3.7 の断面での水平流 U の鉛直シアはエクマン層内の大部分 ($0.5 \lesssim z \lesssim 2$ では負であるのに対し, この領域での流線関数のパターンは x 軸の正の向きに傾いている. このような摂動はオーアメカニズムによって発達することが可能である. 流線関数のパターンは軸方向速度のパターンと比較して鉛直上方への広がり大きい. $z \gtrsim 2$ では流線関数のパターンはシアに対して傾いていないためオーアメカニズムは働かず, ノーマルモードの成長には関与していないと考えられるが, この流線関数と軸方向速度の広がりについては 5 節で説明する.
- (2) 摂動の DS 成分を表す軸方向速度 v の発達するメカニズムはロールメカニズムであるが, OT 成分に含まれる鉛直流と基本場 y 軸方向の風速 V の鉛直シアが必要である. 風速 V の鉛直シアは地面近く ($z \lesssim 2$) しか存在しないため軸方向速度の摂動の分布は地面近くに局在している.

3.4.2 最適摂動

ここでは最適摂動の性質を解析する. 図 3.9 は最適摂動のエネルギーノルム増幅率のパラメータ (水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ) 依存性を示している. ここで言う増幅率とは初期のエネルギーノルムを 1 として最適化時間になった時のエネルギーノルムの値を言う. 縦軸 (水平波数) の範囲が図 3.6 とは異なるので注意が必要である. 図 3.9 には最適化時間 τ が 15 と 25 の 2 ケースの結果をそれぞれ (a), (b) に示してある.

傾向として最適化時間が小さい場合には, 大きなエネルギーノルム増幅率を示す摂動の水平波数 α , 地衡風とのなす角 ϵ は両者とも大きく, 最適化時間が大きくなるにつれて変曲点不安定ノーマルモードが最大発達率を示すパラメータ値 ($\alpha = 0.50, \epsilon = 16.9^\circ$) に漸近していくことが分かっている (F97). これは十分に長い発達時間を設定すれば, 最大発達率を持つ不安定ノーマルモードが卓越してくることに対応している.

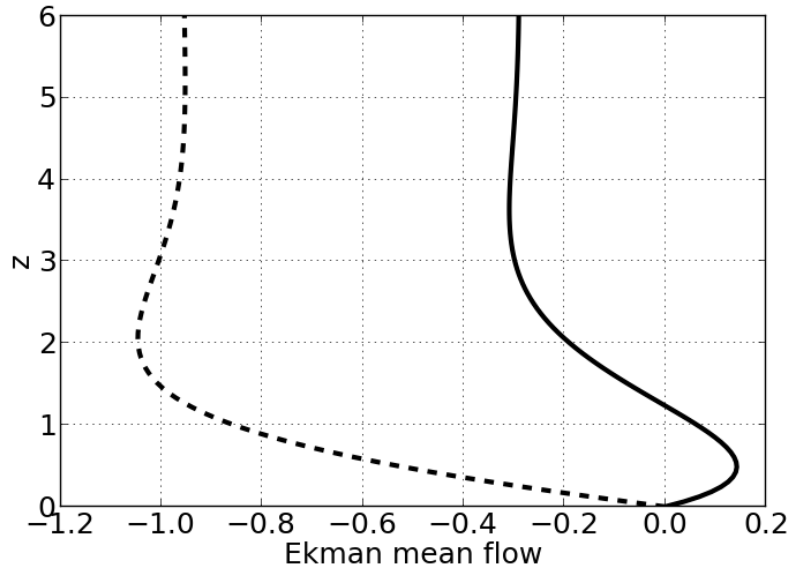


図 3.8: $\epsilon = 16.9^\circ$ でのエクマン層内の風速プロファイル. 実線が U , 点線が V を示している.

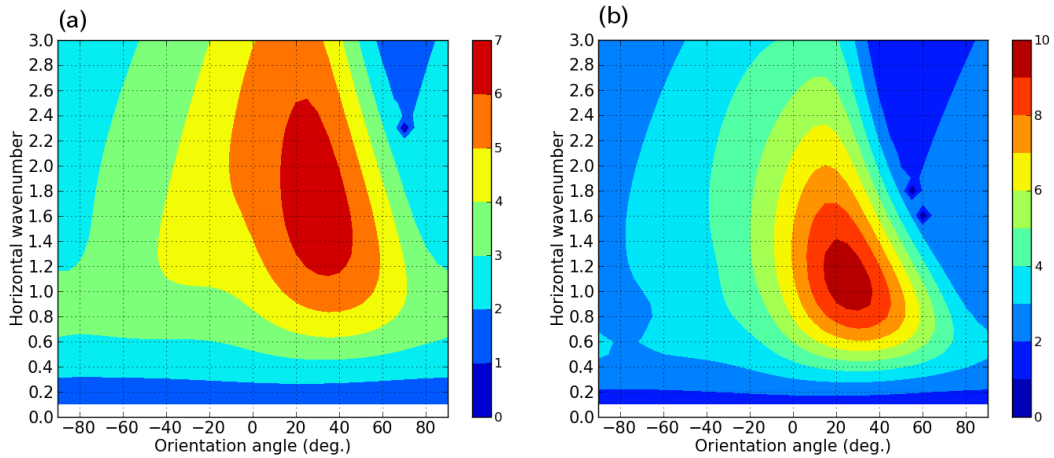


図 3.9: 最適摂動のエネルギーノルム増幅率のパラメータ (水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ) 依存性. (a):最適化時間 $\tau = 15$, (b):最適化時間 $\tau = 25$, それぞれ最大値を取るのは (a) は $\alpha = 1.68, \epsilon = 29.7^\circ$ の時で増大率は 6.6011, (b) は $\alpha = 1.085, \epsilon = 25.3^\circ$ の時で増幅率は 9.5960 である.

次に, 最適化時間 $\tau = 15$ の時に最大のエネルギーノルム増幅率を示す $\alpha = 1.68, \epsilon = 29.7^\circ$ の最適摂動の時間変化を図 3.10 に示す. (a),(b),(c),(d) が流線関数 ψ , (e),(f),(g),(h) が軸方向速度 v の分布の時間変化を示してある. 各図は上から時刻 $t=0, 0.5\tau, \tau, 1.5\tau$ での摂動である. 流線関数を見ると, 初期には図の断面での風速 U の鉛直シアーとは反対の向

き (x 軸正の向き) に傾いていた摂動がシアアの働きによって傾きが変わって突っ立っていく様子が見て取れる．流線関数 (OT 成分) が直立するまではオーアメカニズムによって摂動は平均流からエネルギーを受け取って成長することができる．これは前述の変曲点不安定の場合と同様である．しかし，時刻が最適化時間を過ぎた後 (図 3.10(d)) は，風速 U のシアアと同方向に流線関数のパターンが倒れているため，摂動から平均流にエネルギーが変換され摂動のエネルギーは減少する．

一方の摂動の DS 成分 (v) は鉛直流がある限りはロールメカニズムによって成長するため，摂動の OT 成分が減少を始めたのちも増加が続いている．ストリーク構造が持つ強い軸方向成分はこのメカニズムにより形成されると考えられる．最終的にこれらの運動エネルギーは粘性散逸によって失われる．

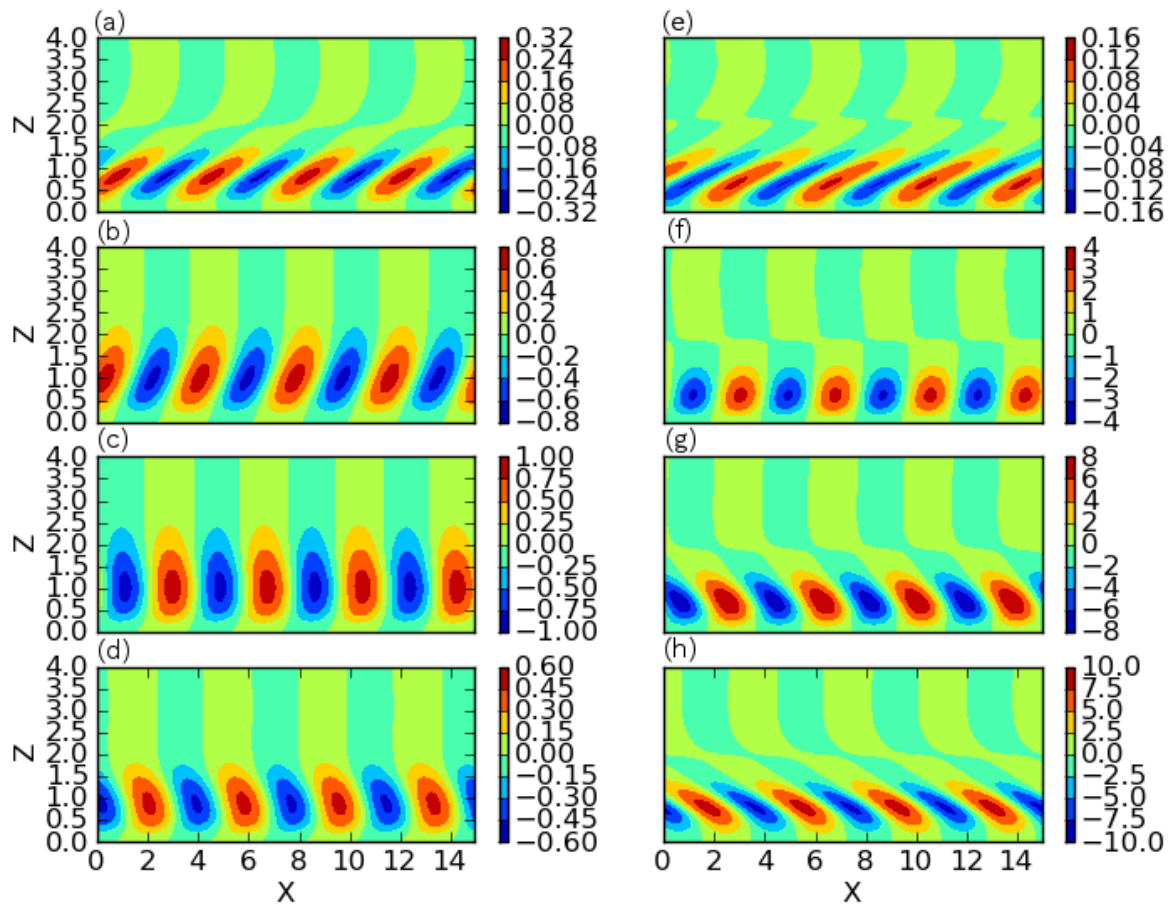


図 3.10: 最適化時間 $\tau = 15$ で最大のエネルギーノルム増幅率を示す最適摂動の流線関数 (a)-(d) と軸方向速度 (e)-(f) の時間変化．水平波長 $\alpha=1.68$ ，地衡風とのなす角 $\epsilon = 29.7^\circ$ ．上から時刻 $t = 0, 0.5\tau, \tau, 1.5\tau$ における分布を示す．値のスケールが図ごとに異なる点に注意が必要である．

このような特性を明確に示すために OT 成分と DS 成分のエネルギー解析結果を図 3.11 に示す．(a) には OT 成分の摂動のエネルギー (青線) と平均流からのエネルギー変換量 (赤

線)を示している。(b)はDS成分に関しての同様の結果である。この図を見ると、オーアメカニズムによるエネルギーの正の変換によって摂動のOT成分が成長し、ロールメカニズムによって摂動のDS成分が成長するという前述の説明が成り立っていることが確認できる。オーアメカニズムによるOT成分の成長は有限時間しか続かず、その後はOT成分は平均流へのエネルギーの変換と粘性散逸によって減衰していく。そのためOT成分に含まれる鉛直流が減少し、ロールメカニズムの働きも小さくなっていくため、DS成分も発達できなくなる。このようなメカニズムにより最適摂動の全エネルギーの成長も有限時間しか持続しないという結果が得られる。

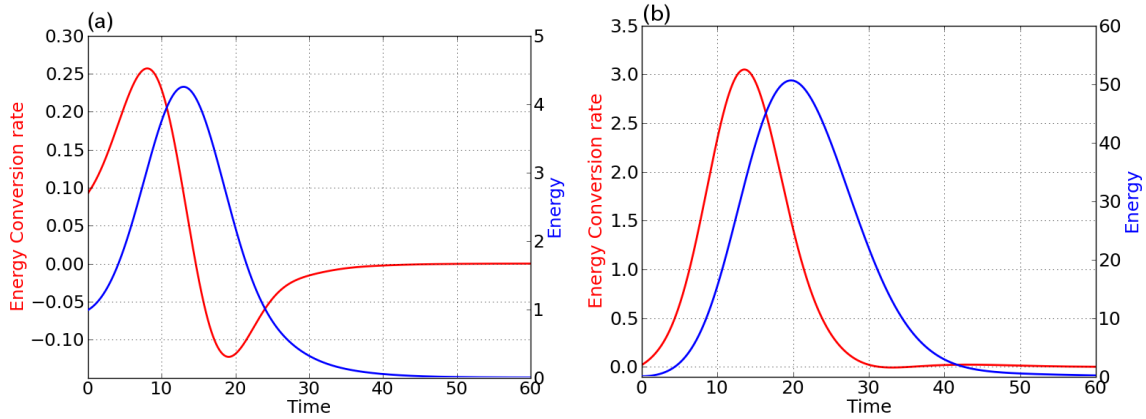


図 3.11: 図 3.10 で示された最適摂動の運動エネルギーと平均流から運動エネルギー変換量の時間変化。(a)は摂動のOT成分、(b)は摂動のDS成分。赤線が平均流から最適摂動への運動エネルギーの変換量、青線が運動エネルギーの量を示している。 $t=0$ でのエネルギーが1となるように規格化してある。

ここまでのF97で得られていたカノニカルエクマン層における変曲点不安定ノーマルモードと最適摂動の性質である。F97では最適摂動は変曲点不安定と比較して水平波長が短く鉛直方向への広がりも小さいこと、地衡風とのなす角 ϵ が小さいことなどから、最適化時間の短い最適摂動がストリーク構造に対応すると主張している。

3.5 キャッピング逆転層が増幅ノーマルモードに与える影響

前述したように最適摂動はストリーク構造と似通った特性を示すが、カノニカルエクマン層には変曲点不安定ノーマルモードも存在している。LESを用いた数値実験においてこの変曲点不安定モードが現れない理由については、これまでの解析では明らかになっていない。

この節では不安定ノーマルモードの発達を阻害する原因としてキャッピング逆転層がエクマン層の安定性に与える影響を考察する。先行研究²⁷⁾や2章のLESを用いた数値実験ではエクマン層の上部にキャッピング逆転層を設定しており、これらの実験では変曲点

不安定ノーマルモードに相当するような大規模で卓越した擾乱は出現していない。一方、エクマン境界層の線形安定性解析ではキャッピング逆転層の効果を取り入れたものは存在せず、その効果は調べられていない。そこでこの節では線形安定性解析にキャッピング逆転層を取り入れ、層内の不安定性に与える影響を調べる。キャッピング逆転層が存在すれば一般には風速プロファイルにも影響を与えると考えられるが、ここではキャッピング逆転層の安定成層の効果に注目するために、風速プロファイルはカノニカルエクマン層のままで解析を行う。

3.5.1 計算設定

基本的な計算設定は 3.3 節で説明したカノニカルエクマン層の時の手法と同様である。キャッピング逆転層を表現するために密度の基本場のプロファイルを以下のように設定する。

$$\frac{d\bar{\rho}}{dz}(z) = A \exp\left(\frac{-(z - z_i)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.55)$$

ここで $A = -0.2$, $\sigma = 0.5$ としてキャッピング逆転層の中心高度を表す z_i をパラメータとして導入する。逆転層の効果調べるためにこの高度を変化させて解析を行う。風速プロファイルや渦粘性の値などの他の条件は変更しない。

3.5.2 結果

最初にキャッピング逆転層がノーマルモード不安定に与える影響を調べる。図 3.12 はキャッピング逆転層の高さを変化させながら最大増幅率ノーマルモードの増幅率をプロットしたものである。キャッピング逆転層の高度が十分に高い条件 ($z_i \gtrsim 8.0$) では発達率とパラメータの値は 3.4 節で示したキャッピング逆転層が存在しない系での値に漸近している (発達率が 0.023994, 水平波数 $\alpha = 0.5$, 地衡風とのなす角 $\epsilon = 16.9^\circ$)。これはキャッピング逆転層が十分にエクマン層から離れていれば層内での擾乱の発達に影響を及ぼさなくなるからと考えられる。一方、キャッピング逆転層の高度を低く設定するにつれて不安定ノーマルモードの発達率は小さくなっていき 3.0 よりも低い高度に設定した場合は不安定ノーマルモードが存在しないことが示された。

ノーマルモードの発達率は逆転層高度 z_i の変化とともにほぼ単調に変化しているように見えるがキャッピング逆転層高度が約 4.2 の付近で単調でない変化の仕方をしており、この時、最大発達率を示すパラメータの値も大きく変化していることが見て取れる。これはキャッピング逆転層高度がこれより大きい場合に存在する変曲点不安定ノーマルモードがホルムボウ不安定によるノーマルモードに変化したためと考えられる (??)。3.1 節で説明したように変曲点不安定はロスビー波の共鳴によって説明されるが、共鳴をつかさどるロスビー波のうち上部の波がキャッピング逆転層内に存在する重力波に置き換わり、ロスビー波と重力波の共鳴が起こることでホルムボウ不安定が起こると説明される。

いずれにせよ、キャッピング逆転層はエクマン層内のノーマルモード不安定性を抑制する働きがあることが示された。逆転層がエクマン層に十分に近く強い影響を与える場合に

は、不安定ノーマルモードが存在せず線形安定性理論の観点で見れば安定な系になることが分かった。

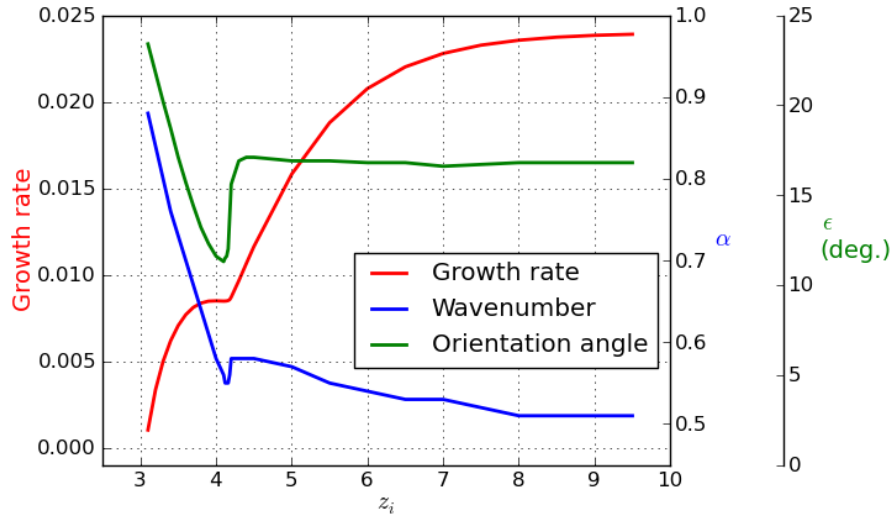


図 3.12: 最大発達率を持つ不安定ノーマルモードの発達率 (赤線), 水平波数 (青線), 地衡風とのなす角 (緑線) のキャッピング逆転層高度への依存性. キャッピング逆転層高度 z_i が 3.0 より低い条件下では不安定ノーマルモードは存在しなかった。

図 3.13 はキャッピング逆転層が存在しない場合とキャッピング逆転層が高度 $z_i = 3.1$ であるときの場合の 2 つの場合での最大発達率を持つノーマルモードを示している。この図では流線関数, 軸方向速度に加えて, 渦度の y 軸成分の分布を示している。前述したように, 逆転層の影響がない場合の流線関数の分布は軸方向速度や渦度の分布と比較して鉛直方向への広がり大きい (図 3.13(a))。これは変曲点不安定を構成するロスビー波の流線関数が水平波長に依存して鉛直方向への広がりが大きくなることに原因がある。変曲点不安定ノーマルモードは水平波長が長いので, このモードを構成するロスビー波が鉛直方向に大きく広がり, 図 3.13(a) のような分布を示すのである。これはロスビー波の共鳴を利用する変曲点不安定に特有の性質であり, この効果は OT 成分である流線関数に現れている。一方, DS 成分 (軸方向速度 v) はロスビー波の共鳴とは関係ないロールメカニズムによって成長するため, その空間分布 (図 3.13(b)) は鉛直方向への広がり小さくなるのである。

図 3.13(d) を見るとキャッピング逆転層によってこの流線関数の上方への広がりが抑制されている様子が見て取れる。この図は $z_i = 3.1$ なのでホルムボウ不安定ノーマルモードに相当しているが, 発達率は非常に小さくほぼ中立である。キャッピング逆転層によるノーマルモードの発達抑制の過程では, このようにノーマルモードの流線関数の変形が起こっていることが示された。

次にキャッピング逆転層が最適摂動に与える影響を調べた。図 3.14 にはキャッピング逆転層がない場合とキャッピング逆転層の高度が $z_i = 3.0$ の場合のエネルギーノルムの増幅

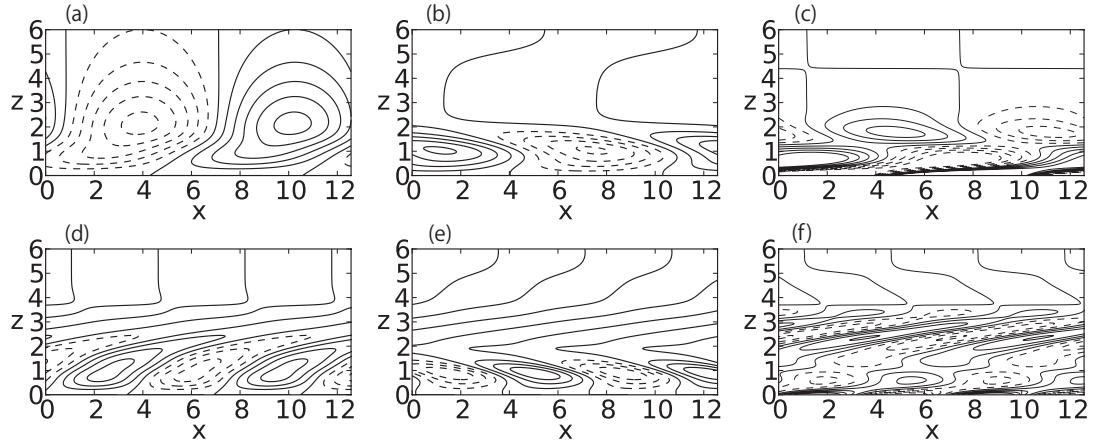


図 3.13: 最大発達率を持つノーマルモード:(a), (b), (c) は図 3.7 と同じノーマルモードであり, キャッピング逆転層が存在しない場合である. パラメータの値は $\alpha = 0.50, \epsilon = 16.9^\circ$ であり発達率は 0.023994. (d), (e), (f) はキャッピング逆転層の高度が 3.1 の場合であり, パラメータは $\alpha = 0.88, \epsilon = 23.4^\circ$ で発達率が 0.0001013 である. (a) と (d) は流線関数, (b) と (e) は軸方向速度, (c) と (f) は渦度の y 軸成分である. 最大値は (a) が 1.3464, (b) 4.1837, (c) 10.050, (d) 0.69270, (e) 7.6794, (f) 11.831 である. それぞれの等値線の間隔はそれぞれ (a) 0.25, (b) 1, (c) 0.5, (d) 0.2, (e) 2, (f) 2 である. いくつかの等値線は見やすくするために除いてある.

率を示した. キャッピング逆転層が無い場合の結果は図 3.9 に示した結果と同一だが比較のために載せた. 逆転層高度 $z_i = 3.0$ の場合はノーマルモード不安定は存在しておらず, この流れ場は通常の線形安定性解析では安定とされる. しかし, この場合でも最適摂動は特定の有限時間において強い発達を示している. エネルギーノルムの増幅率は逆転層が無い場合と比較しても 4.2%(最適化時間 $\tau = 15$ の場合) しか小さくなっておらず逆転層の影響は小さいといえる. 最適化時間 $\tau = 25$ の場合も強い発達は可能であるが, 逆転層が無い場合と比較して 21%ほどエネルギーノルムの増幅が小さくなっている.

F97 で行われた逆転層がない系での解析では最適化時間が長くなるほど最適摂動は変曲点不安定ノーマルモードに似て鉛直方向への広がりが大きくなることが知られている. 逆転層を含む本研究の系で得られる最適摂動は F97 の系での最適摂動と同様のメカニズムで形成されていると考えられるため, 最適化時間の長い最適摂動ほど変曲点不安定ノーマルモードと同様に鉛直方向への広がりが大きく, キャッピング逆転層の影響を受けやすいと考えられる. 最適化時間 $\tau = 25$ の最適摂動が $\tau = 15$ の最適摂動と比較して逆転層の影響を強く受けているのはこのためだと推察される.

最適化時間 $\tau = 15$ でエネルギーノルムの増幅率が最大となる $\alpha = 1.94, \epsilon = 33.1^\circ$ の場合について最適摂動の時間変化を図 3.15 に示す. キャッピング逆転層に近い高度 ($z \gtrsim 2$) では流線関数の分布が変形しているが, 基本的なパターンの時間変化は逆転層がなかった場合の時間変化 (図 3.10) と同様であり, 流線関数が時間と共にシアの向きである x 座

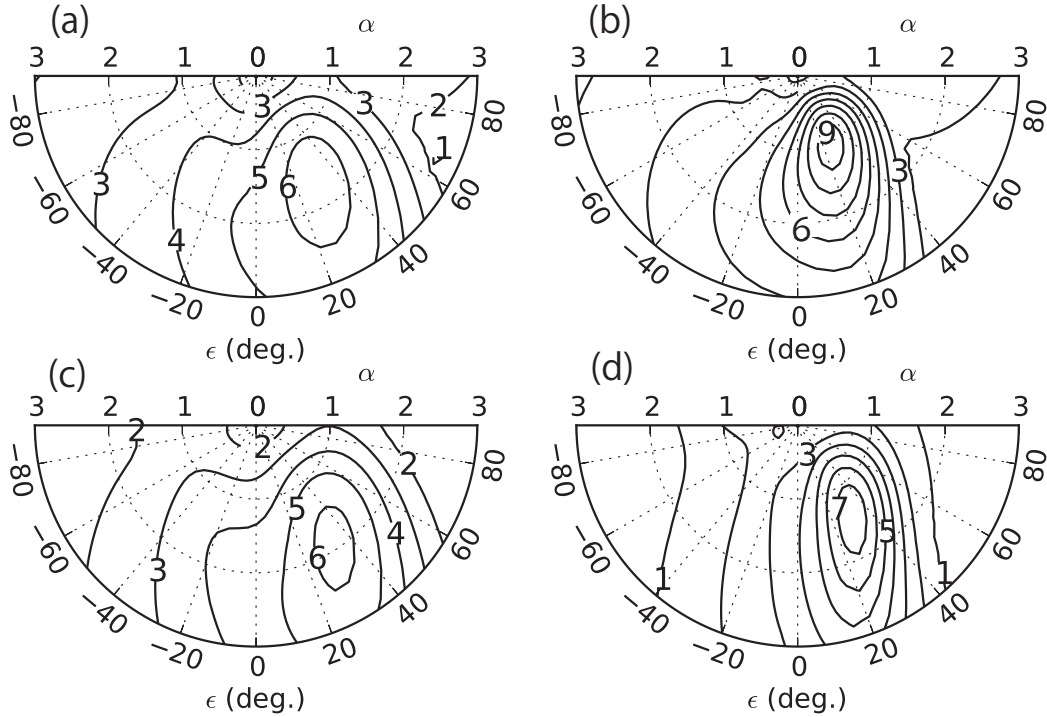


図 3.14: 最適摂動のエネルギーノルムの増幅率の水平波数 α と地衡風とのなす角 ϵ に関するパラメータ依存性. (a), (c):最適化時間 $\tau = 15$, (b), (d):最適化時間 $\tau = 25$, (a), (b) は図 3.9 と同じ結果で逆転層が無い場合の最適摂動の結果. (c), (d) は逆転層高度が $z_i = 3.0$ の時の最適摂動の結果. それぞれ最大値を取るのは (a) は $\alpha = 1.68, \epsilon = 29.7^\circ$ の時で増幅率は 6.6011, (b) は $\alpha = 1.085, \epsilon = 25.3^\circ$ の時で増幅率は 9.5960, (c) は $\alpha = 1.94, \epsilon = 33.1^\circ$ の時で増幅率は 6.3216, (d) は $\alpha = 1.48, \epsilon = 30.5^\circ$ の時で増幅率は 7.6221.

標の負の方向に倒れていく様子や軸方向速度が流線関数が減衰を始めた後も発達を続ける様子が見て取れる.

最適摂動は増幅ノーマルモードと比較して低い位置にあるためキャッピング逆転層の影響を受けにくいと考えられる. 多くのエクマン層の数値実験においてストリーク構造は発達するが大きなロール構造ができない原因は、キャッピング逆転層の効果が大きいと考えられる.

3.6 議論とまとめ

この章ではエクマン境界層の中で発達するストリーク構造の発達を理論的に説明するために、どのような擾乱が適しているのかという観点で線形安定性解析を行い、変曲点不安定ノーマルモードと最適摂動という 2 種類の摂動について考察した. 特に数値実験において設定されるが、安定性解析においてはこれまで考慮されてこなかったキャッピング逆転層の効果を調べた.

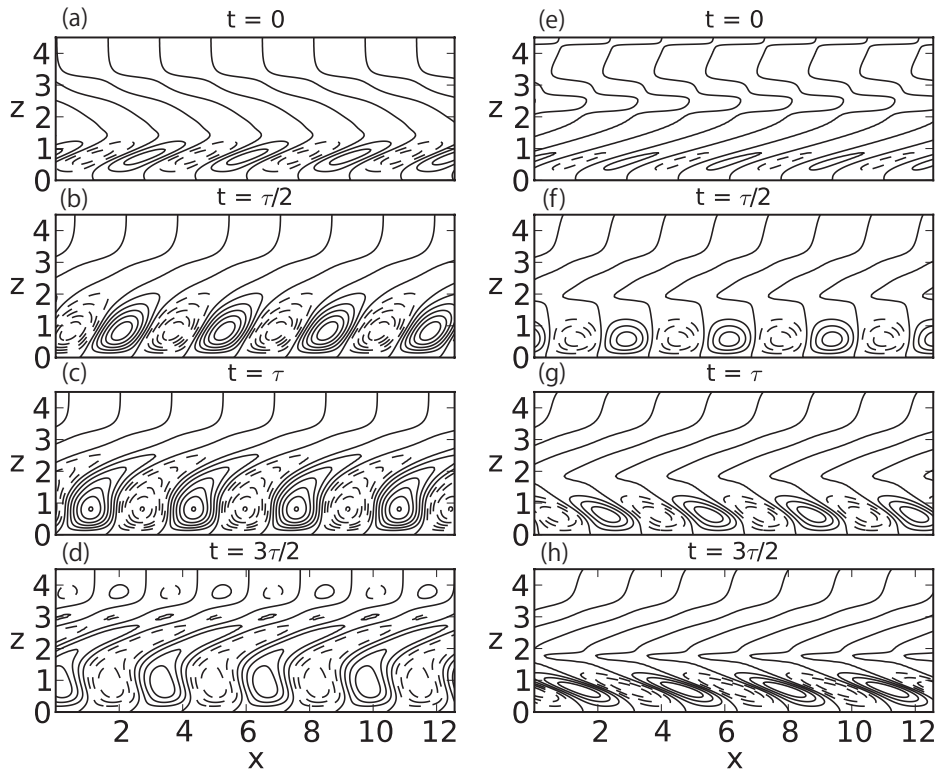


図 3.15: 最適化時間 $\tau = 15$ で最大のエネルギーノルム増幅率を示す最適摂動 ($\alpha = 1.94, \epsilon = 33.1^\circ$) の流線関数 (a)–(d) と軸方向速度 (e)–(h) の時間変化. 上から時刻 $t = 0, 0.5\tau, \tau, 1.5\tau$ における分布を示す. 等値線の間隔は流線関数はすべて 0.1, 軸方向速度は上から 0.1, 1, 2, 2 となっている.

キャッピング逆転層は変曲点不安定ノーマルモードの発達を抑制するが、最適摂動へ与える影響は小さいことが分かった. これはそれぞれの水平波長が重要な役割を果たしている. 前節でも述べたがシア一流中の摂動はロスビー波の性質をもち、水平波長に依存した鉛直への広がりを持つ. 変曲点不安定ノーマルモードは上方への広がりが大きかったために逆転層の安定成層によって発達が阻害された. 一方、最適摂動は水平波長が短く、上方への広がりも小さかったために逆転層の影響を受けずに発達できると考えられる.

また、最適摂動がノーマルモード不安定とは異なる原因もロスビー波の性質に関連している. 水平波長の短いロスビー波は位相速度が小さく、水平風の鉛直シアを持つ平均場の移流による摂動のパターンの変化 (流線関数が時間と共にシアの向きに傾いていくこと) を打ち消すことができない. このために最適摂動の空間パターンが変化してしまい、ノーマルモードではなくなっている. また、オーアメカニズムが有限時間しか働かないために、摂動の発達も有限時間しか起こらない.

この章で得られたカノニカルエクマン層における最適摂動の性質と、逆転層の効果に

よって変曲点不安定ノーマルモードの発達が抑制されるという結果は、中立エクマン層におけるストリーク構造が最適化時間 τ の小さな最適摂動によって表現できる可能性を強く示唆している。また、大気エクマン層ではストリーク構造が生成消滅を繰り返すのみで長時間にわたって維持されないという事実は、最適摂動がノンモーダルな不安定であり有限時間しか発達できないことと関係ある可能性がある。

これらの可能性を検証するためには、2章で行ったミニマル領域LESで得られたストリーク構造の時間発展の様子を最適摂動と比較する必要がある。ただし、本章で扱った基本場はカノニカルエクマン層でありLESで再現されたエクマン層とは異なるため、得られる最適摂動の性質も異なる可能性がある。よって次章ではLESの結果の風速プロファイルを基本場として最適摂動を計算して、本章で得られた最適摂動の性質が成り立つのかを検証する。

第4章 LESで得られた風速プロファイルを用いた安定性解析

この章では2章と3章の結果に基づいて、2章のLESにより得られたストリーク構造の時間発展の様子が最適摂動で表現できるのかを検証する。

4.1 線形安定性解析の手法

本章で用いる線形安定性解析の手法は3章のものと同様であるが、基本場にはLESで再現されたエクマン層の平均風速の鉛直プロファイル(図2.6)と温位場の鉛直プロファイル(図2.3)を用いる。これはグリッドポイント上で定義されているため、鉛直方向の離散化にチェビシェフ多項式展開ではなく差分法を用いた。鉛直微分は2次の中央差分を用いて計算した。また、LESの結果と比較しやすくするために座標系を2章と同じにした。

3章の線形安定性解析を行うためには渦粘性の値を指定する必要があるが、LESではSGS粘性係数は存在するが渦粘性は計算されていない。そもそも渦粘性はストリーク構造も含めた乱流の全体としての働きを見積もったものであり、LESの結果から見積もることは難しい。そこで渦粘性は定数として3種類の値を用いて、それぞれの場合で最適摂動を計算して比較を行った。このような設定でLESで再現されたエクマン層における最適摂動の特性を解析する。渦粘性の値は $K = 0.25, 0.5$ および $1.0(\text{m}^2/\text{s})$ を用いた。

3章で示したように最適化時間によって最適摂動の特性は大きく変わるため、最適摂動の計算のためには最適化時間を決める必要がある。しかし、LES等の数値実験においては任意の最適化時間の最適摂動が発達可能であり、特定の最適化時間が選択されるわけではない。ただし、次の節の考察によって最適化時間には上限値が存在すると考えられる。

4.2 エディ・ターンオーバータイムによる発達可能時間の制限

本研究で扱っているストリーク構造は乱流場の中に存在しているため、対象とするストリーク構造とはスケールや向きの異なる様々な擾乱が有限の大きさを持って存在している。これらの乱流はストリーク構造の発達期において、その秩序だった運動を阻害することによってストリーク構造の発達を抑制する働きを持っていると考えられる。ここではエディ・ターンオーバータイムという時間スケールを導入することによって、この乱流の働きを見積っている。この時間スケールより長い時間をかけて発達するような擾乱は、その組織だった構造(coherency)が維持できないために実際には発達できないと主張した。す

なわち最適化時間がこのエディ・ターンオーバータイムよりも長い最適摂動は環境場の乱流の働きで発達できないために考慮する必要がないことを意味している。

エディ・ターンオーバータイム τ_{eddy} を計算する方法はいくつか存在する。ここでは以下のよう定義した。

$$\tau_\varepsilon = \frac{q^2}{\varepsilon} \quad (4.1)$$

ここで q^2 は乱流運動エネルギー (TKE), ε は散逸率である。乱流カスケードの理論 (木田・柳瀬, 1999) によれば散逸率は ε は平均流から乱流成分へのエネルギー注入率と慣性領域におけるエネルギー輸送率に等しい。よって LES で得られる流れ場でこの時間スケールを見積もる場合には、乱流運動エネルギーが平均流から注入されて SGS 成分の運動エネルギーに変換していくまでの滞留時間に相当すると考えられる。滞留時間は空間スケールが小さくなるほど短くなるため、SGS 成分に注入されてから粘性で散逸するまでの時間は小さく無視できると考えられる。本研究では ε として、平均流から乱流成分へのエネルギー変換量

$$\int_{z-0.5dz}^{z+0.5dz} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(-uw \frac{dU}{dz} - vw \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz \quad (4.2)$$

を用いた。2章のエネルギー解析で用いた式 (2.15) では擾乱はフィルターによって抽出された摂動のみであったが、式 (4.2) では全擾乱成分を表す小文字の速度を用いている点に注意が必要である。また各高度でのターンオーバータイムを計算するために積分領域も異なっている。

2つ目の τ_{eddy} の定義としては、

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{2\pi}{[u][k]}, \\ [u] &= \left(\int_0^\infty E(k) dk \right)^{\frac{1}{2}}, \\ [k] &= \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk} \end{aligned} \quad (4.3)$$

が用いられる。ここで $E(k)$ はパワースペクトルである。これは運動エネルギーで重み付けした平均波長を長さスケール、運動エネルギーから求めた速度を速度スケールで見積もった時の移流時間スケールである。

2章の LES で得られた大気エクマン層に対してこの2種類の時間スケールを計算した結果を図 4.1 に示す。エクマン層の乱流の特性は高さと共に変化するため、各高度において計算を行い高さの関数として示した。

高度が約 400m 以上で乱流の性質が変化しているのは、キャッピング逆転層の効果で擾乱が抑制されているためと考えられる。ストリーク構造はキャッピング逆転層よりも下層にのみ存在しているため、約 400m より上部の値は無視する。この結果を見ると τ_ε の方が τ_k よりも大きくなっているが、オーダーとしては同程度であり、エディ・ターンオーバータイムは最大で 750s 程度であると見積もられる。

?ではストリーク構造のストリークの中心高度でのエディ・ターンオーバータイムを最大の発達可能時間とみなしている．しかし，最適化時間を決定しても最適摂動のパラメータ α や ϵ の値によってはストリークの中心高度は異なるため，最適摂動の中心高度を前もって決めることは意味がないと考えられる．本研究ではエディ・オーバータイムが最大でも 750s という最大値の目安のみを用いる．

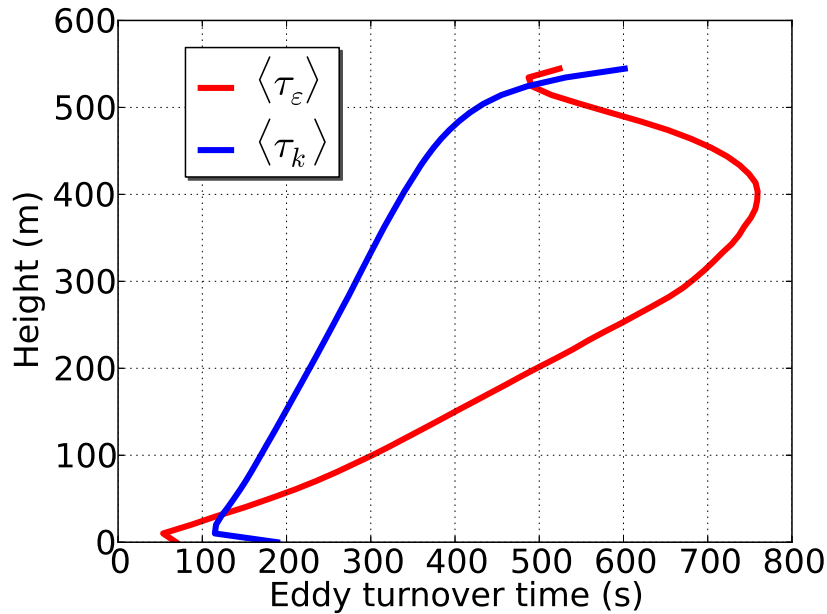


図 4.1: LES によって再現されたエクマン層のエディ・ターンオーバータイム．2 種類の方法で求められたエディ・ターンオーバータイムの鉛直方向依存性を示してある．

4.3 線形安定性解析の結果

ここからは LES で再現されたエクマン層における安定性解析の結果を示す．渦粘性係数，水平波数，地衡風とのなす角の値に関わらず不安定ノーマルモードは存在しなかった．

最適摂動の場合は前節で考察したエディ・ターンオーバータイムの制約により，最適化時間が 750s よりも短い最適摂動のみが発達可能である．そこで最適化時間を 100s, 300s, 500s, 700s の 4 ケースについて計算を行った．また，前述したように渦粘性係数も 3 ケースあるため全部で 12 ケースについて最適摂動の計算を行った．

図 4.2 は各ケースでの最適摂動のエネルギーノルム増幅率のパラメータ依存性を示している．また，最大発達率の値，その時のパラメータの値を表 4-1 にまとめた．

最大のエネルギー増幅率を示すパラメータの値を見ると，水平波長は最適化時間や渦粘性係数の値によって異なっているが地衡風とのなす角はどの場合でも約 30 度で最大値を示している．水平波長や渦粘性の値によらず，高波数領域では地衡風とのなす角 ϵ が 30

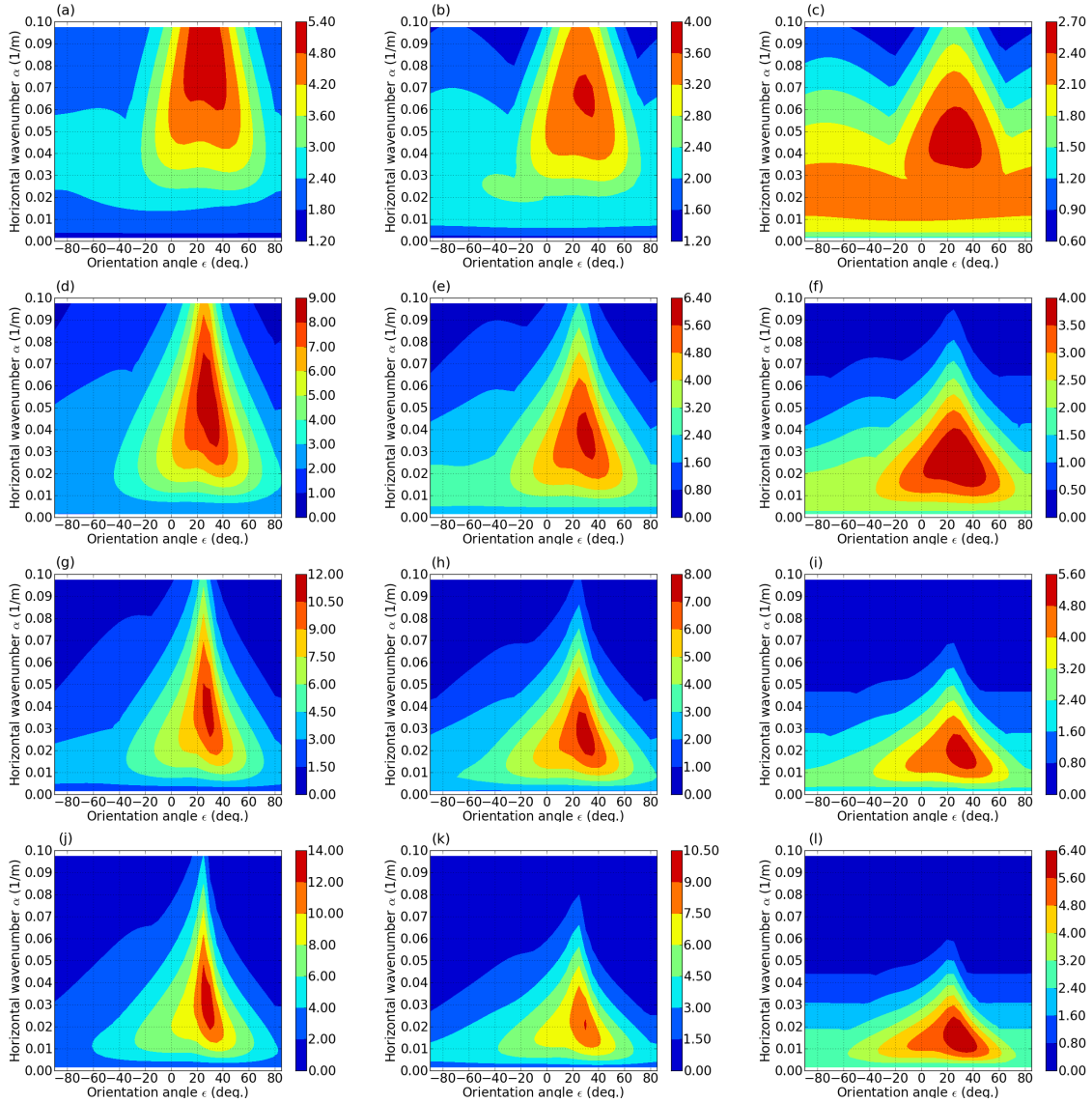


図 4.2: 最適摂動の増幅率のパラメータ (水平波数が縦軸, 地衡風とのなす角が横軸) 依存性. (a), (b), (c) の最適化時間は 100s, (d), (e), (f) は 300s. (g), (h), (i) は 500s, (j), (k), (l) は 700s である. (a), (d), (g), (j) が渦粘性係数 $0.25(\text{m}^2/\text{s})$, (b), (e), (h), (k) が $0.5(\text{m}^2/\text{s})$, (c), (f), (i), (l) が $1.0(\text{m}^2/\text{s})$ の場合である. 最大の増幅率とその時のパラメータの値は表 4.1 にまとめた.

度付近の摂動のみが大きなエネルギーノルム増幅率を示す一方, 低波数領域では幅広い範囲の ϵ で大きなエネルギーノルム増幅率を示している.

パラメータの値の違いに着目すると, 渦粘性係数や最適化時間が大きくなるほど最大のエネルギーノルム増幅率を示す最適摂動の水平波長は長くなっていることが分かる. 渦粘性係数に関しては波長が短い摂動ほど粘性の効果が大きいことを考えれば自然な結果である. また, 最適化時間 τ に関しては, τ が大きいほど最大のエネルギーノルム増幅率を

表 4.1: 各ケースにおける最適摂動の最大増幅率とその時の水平波長 (計算は水平波数を用いて行ったがわかりやすさのため波長を記す).

	最適化時間 τ (s)	100	300	500	700
$K = 0.25(\text{m}^2/\text{s})$	増幅率	5.118	8.767	11.251	13.444
	水平波長 (m)	69	123	167	211
	地衡風とのなす角 (deg.)	29	30	29	28
$K = 0.5(\text{m}^2/\text{s})$	増幅率	3.639	5.864	7.555	9.105
	水平波長 (m)	95	172	234	290
	地衡風とのなす角 (deg.)	31	31	30	29
$K = 1.0(\text{m}^2/\text{s})$	増幅率	2.508	3.999	5.239	6.393
	水平波長 (m)	137	246	338	421
	地衡風とのなす角 (deg.)	31	32	31	30

示す最適摂動の水平波長が大きい, という結果は 3 章でのカノニカルエクマン層での結果と整合的である.

本章の解析で得られた最適摂動の特性を調べるために, 最適摂動の空間パターンの時間変化とエネルギー解析の結果を示す. 渦粘性係数は $1.0(\text{m}^2/\text{s})$ で最適化時間が 500s のものを選択したが, 他の値の場合でも大きなエネルギー増幅を起こす最適摂動は以下で図に示す結果と同様の性質を持っている. 図 4.3 はこの最適摂動の風速の 3 成分の時刻 $t=0\text{s}$ から 750s までの時間変化を示している. 3 章では流線関数によって流れの OT 成分を表したが, ここでは速度の 3 成分 u, v, w の空間パターンを示した. ただし, この 2 次元擾乱の場合は鉛直流と流線関数の空間パターンは同じであるため, 運動の OT 成分の空間パターンを知るためには鉛直流のパターンに注目する. また, 図 4.4 には最適摂動のエネルギーと平均流からのエネルギー供給量の時間変化を運動の OT 成分と DS 成分に分けて示した.

図 4.3 を見ると, 鉛直流のパターンは初期に x 軸の正の向き (平均風速シアーと逆向き) に倒れているが, 時間とともにシアーによって x 軸の負の向きに傾いていく様子が見て取れる. OT 成分の空間パターンが平均風のシアーにたいして傾いている時刻には平均流から正のエネルギー変換があることが分かる (図 4.4). その後, 運動の OT 成分が平均風のシアーと同方向に倒れてしまうと, 平均流からのエネルギー変換量は負になっている. また, 運動の DS 成分である速度 u は OT 成分が減衰し始めた後も発達を続け大きな振幅を持つようになっている.

このような特性は 3 章で説明した, カノニカルエクマン層における最適摂動がオーアとロールの 2 種類のメカニズムによって急激に発達するという結果と同一である. すなわち, LES で再現されたエクマン層における最適摂動はカノニカルエクマン層での最適摂動と同様の性質を持っていることが示された.

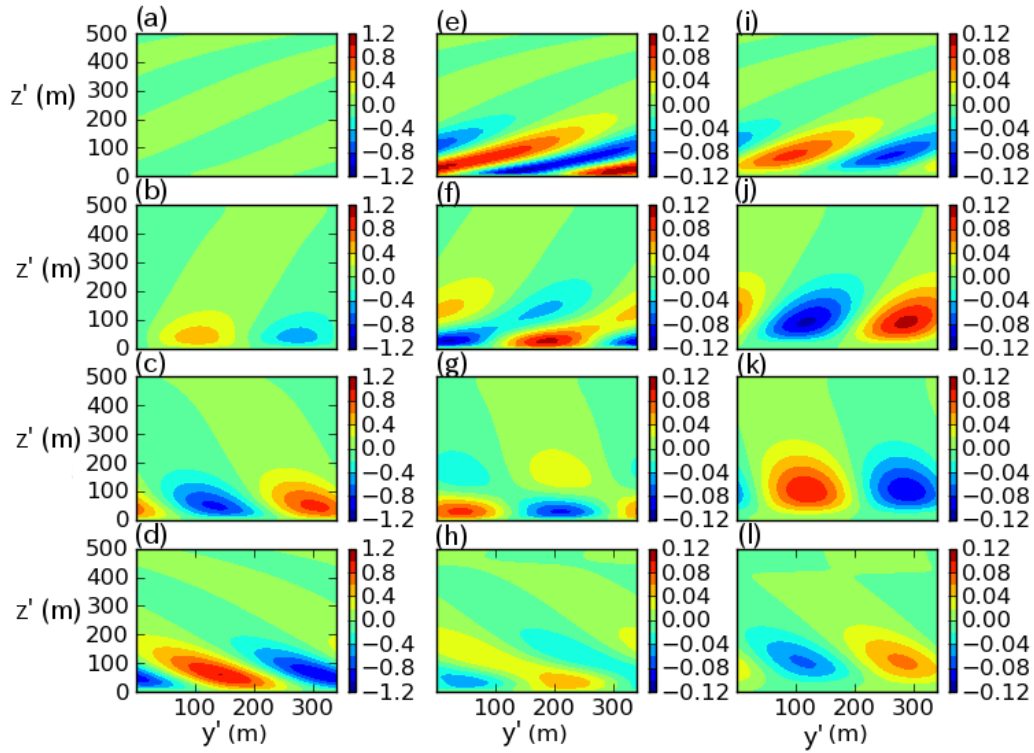


図 4.3: 最適化時間 τ が 500s, 渦粘性係数 $1.0 \text{ (m}^2/\text{s)}$ の時の最適摂動の時間変化, (a)-(d) が速度 u , (e)-(h) が v , (i)-(l) が w の空間分布を表している. 時刻は上から $t=0(\text{s})$, 0.5τ (s), τ (s), 1.5τ (s) である.

4.4 議論とまとめ

この章では LES で得られた現実的なエクマン層の流れ場に対して線形安定性解析を行い, 最もエネルギー増幅率の大きな最適摂動の解析を行った. その結果得られた最適摂動はロールメカニズムとオーアメカニズムを利用して時間的に空間パターンを変化させながら発達する摂動であり, その性質は 3 章でのカノニカルエクマン層での最適摂動と同様であった.

本研究の目的の 1 つである「エクマン層の最適摂動によってストリーク構造の特性が説明できることを示す」ためには本章で得られた最適摂動と 2 章の LES から抽出されたストリーク構造を比較する必要がある. まず, 水平波数や地衡風とのなす角といったパラメータに依存性であるが, 2 章で示された平均流から摂動へのエネルギー変換量 (図 2.16) と本章での最適摂動のエネルギー増幅率 (図 4.2) のパラメータ依存性を比較する. LES で再現されたエクマン層において平均流から最もエネルギーを受け取っていたのは ϵ が 15 度のストリーク構造であった. ただし, この角度を中心として ϵ が 10 度から 40 度付近の摂動が多くのエネルギーを平均流から受け取っており, これは図 4.2 での結果と総合的で

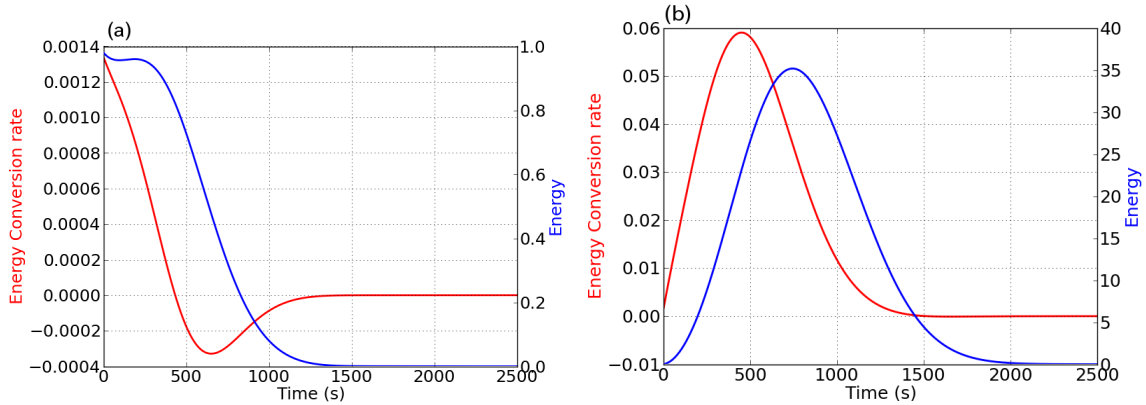


図 4.4: 図 4.3 で示された最適摂動の運動エネルギーと平均流から運動エネルギー変換量の時間変化. (a) は摂動の OT 成分, (b) は摂動の DS 成分. 赤線が平均流から最適摂動への運動エネルギーの変換量, 青線が運動エネルギーの量を示している. $t=0$ でのエネルギーが 1 となるように規格化してある.

ある. LES で再現された流れ場の中には様々な擾乱が存在しているが, この角度を持った摂動が最適摂動として強い発達を起こすために図 2.16 で示されるような結果が得られるのだと考えられる.

一方, 最適摂動のエネルギー増幅率と LES での平均流からのエネルギー変換量ではそれぞれ最大値を示す時の地衡風とのなす角が前者は約 30 度で後者が 15 度と異なっている. この違いの原因は現時点では分からないが, 最適摂動が初期値問題の解として得られるところに原因がある可能性が考えられる. 乱流中に存在するストリーク構造の元となる擾乱の中で, 15 度程度を向いた擾乱の方が 30 度程度の擾乱よりも生成されやすい, あるいは振幅が大きくなる, といった別のメカニズムが存在していれば, 15 度程度を向いたストリーク構造が平均流からエネルギーを最も多くもらうという結果になりうると考えられる.

次に, 摂動の時間発展に関してであるが, 2 章のミニマル領域 LES で得られたストリーク構造と本章で得られた最適摂動の間には以下の類似点が指摘できる.

1. 初期に平均風のシアに大して逆向きに傾いていた運動の OT 成分のパターンが時間とともにシアと同方向に倒れていく.
2. 運動の OT 成分のパターンが平均流のシアに対して逆方向 (同方向) に倒れている場合には, 平均流からのエネルギー変換が正 (負) である. この性質はオーアメカニズムによって説明できる.
3. 運動の DS 成分はロールメカニズムによって発達するため鉛直流がある限り平均流からのエネルギー変換が正であり, OT 成分が減衰し始めた後も発達することが可能である.

すなわち、摂動の空間パターンの時間変化と平均流とのエネルギーに関する相互作用に関して、ストリーク構造と最適摂動は同一の性質を示している。なお、?ではLESの結果からストリーク構造を抽出して、ストリーク構造のOT成分がシアーによって倒れていく様子を示しているが、最適摂動によって予想される、平均流からOT成分へのエネルギーの変換が負になる時間帯(OT成分のパターンが平均風のシアーと同方向に倒れている時)は再現できていなかった。本研究ではこのエネルギー変換が負になる現象も明確にとらえられている(図2.20)。これはミニマル領域LESとフィルタリングを併用することで様々な水平波数や地衡風とのなす角を持つ擾乱からストリーク構造を正確に分離できたことによると考えられる。

また、ミニマル領域LESにおけるストリーク構造の発達は数百sから1000s程度である。本章ではエディ・ターンオーバータイムを見積もることで最適化時間を決定したが、最大で750sという値は若干小さいもののオーダーの見積りとしては妥当であったと考えられる。

このように2章のLESで得られたストリーク構造と本章の最適摂動はパラメータ依存性、空間パターンの時間変化、エネルギー論といった観点で見たときに同一の性質を持っており、最適摂動によってストリーク構造の性質が説明できるとする、本研究の主張が裏付けられた。

第5章 最適摂動の非線形時間発展におけるストリーク構造の発達・崩壊

5.1 ストリーク構造の非線形時間発展に関する先行研究

これまでの章では主に大気エクマン層のストリーク構造の生成・発達期における特性を解析して、その物理的メカニズムは最適摂動、すなわち線形理論で大部分が予測できる事を明らかにした。しかし、ストリーク構造が発達したのち、どのように維持され、そして消滅していくのかの研究はほとんど行われていない。これは擾乱が発達すると時間発展を支配する方程式が非線形になり、線形理論と比較して格段に扱いが難しくなるためと考えられる。

大気のような高レイノルズ数でのストリーク構造の非線形領域での研究は少ないのだが、低レイノルズ数では様々な研究がなされており、木田 (2004) ではシアール乱流における不安定周期解の一つのフェイズとしてストリーク構造を位置づけその発生から消滅までの様子が述べられている。しかし、大気におけるストリーク構造が低レイノルズ数のストリーク構造と同じ挙動を示すかどうかの保証はない。

ストリーク構造の崩壊過程では乱流との相互作用やストリーク構造同士の衝突などによってストリーク構造とは異なる別の秩序構造が発生する可能性がある。シアール流中でよく知られた秩序構造としては馬蹄形渦やヘアピン渦と呼ばれる横渦がある (図 5.1)。ここで横渦とは流れの主流方向に直交する渦のことを指し、この呼び方を使えばストリーク構造は縦渦である。大気エクマン層での馬蹄形渦を扱っている先行研究は少ないが、?では LES のスナップショットから馬蹄形渦を抽出している (図 5.2)。図 5.2 の A,B,C で示された領域は低圧渦を表しており、図 5.2(a) の $x-y$ 断面での分布を見ると縦渦である B,C に横渦である馬蹄形渦 A が橋を架けるような形状をしている。

最適摂動はストリーク構造の初期の時間変化を予測するが、それは線形理論が成り立つ擾乱の振幅が小さいという仮定が成り立つ範囲においてであり、非線形の効果が重要となる時間フェイズに関しては、別の手法でその時間発展を解析する必要がある。この章では有限振幅のストリーク構造から始まる非線形時間発展の初期の挙動の一例を示す。

5.2 数値実験の設定

本章の数値実験で用いる方程式系は2章で用いたナビエ・ストークス方程式、連続の式、温位の保存の式に渦粘性近似を用いた式である。

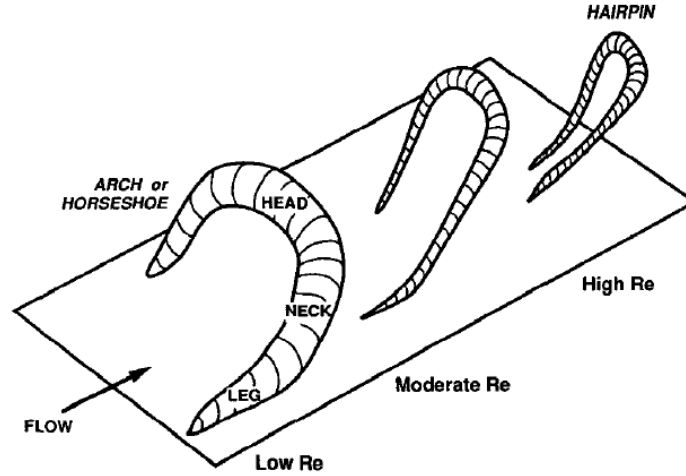


図 5.1: シアー流中に出現する馬蹄形渦やヘアピン渦の概念図．境界近くに縦渦があり，それより上方に横渦が存在している．この渦がつながっている場合に馬蹄やヘアピンのような渦構造となる．？より．

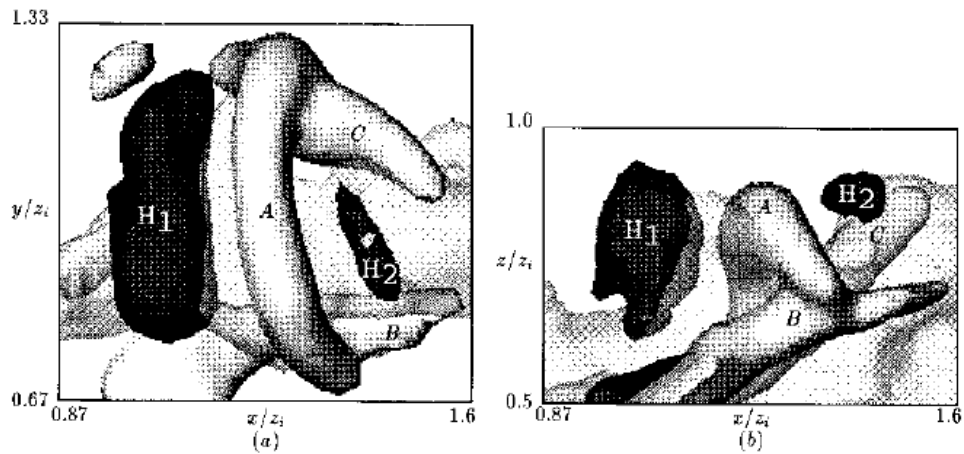


図 5.2: エクマン層の LES で得られた低圧渦と高圧渦の 3 次元構造のスナップショット．(a) は $x-y$ 断面から，(b) は $x-z$ 断面から見た図となっている．A,B,C は低圧域，H1,H2 は高圧域を示している．？より．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + f v \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v - f u \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - \frac{g_0}{\theta_0} \theta \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta \quad (5.5)$$

3章ではこの式を線形化した，本章ではこの式をそのまま時間積分する．空間方向の離散化や時間積分などの手法，境界条件は2章のLESの設定と同様である．初期条件としては，(2章で行ったLESの平均流)+(4章で得られたLESの平均流を基本場としたときの最適摂動)を用いる．渦粘性係数 K は4章で得られた最適摂動を用いるために $1.0(\text{m}^2/\text{s})$ に設定した．

2章で行ったLESではストリーク構造以外にも様々な水平スケールや向きをもった擾乱が混在していた．この数値実験ではひとまずそれら他の渦との相互作用は無視して，ストリーク構造が持つ自身の非線形性によって時間発展にどのような影響を与えるのか解析する．

ただし、初期場に存在する擾乱を最適摂動のみにすると本来他の擾乱が担っていた運動量の乱流輸送がなくなってしまうので，平均流が維持できなくなってしまう．そこで平均流の時間変化は小さいことを利用して式(5.1)–(5.5)を次の式に変形した．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{dU}{dz} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + f v \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{dV}{dz} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v - f u \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - \frac{g_0}{\theta_0} \theta \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで3章と同様に小文字は擾乱成分を表しており，大文字で記される平均流の時間変化をゼロと仮定している．注目すべき点は非線形項が残っており擾乱が有限振幅になっても適用可能な点である．

計算領域は図 2.18(a) のように座標 30° を回転させることで最適摂動の軸が x 軸の方を向くようにして計算を行った．領域の大きさは $L_x = 4\lambda = 1336\text{m}$, $L_y = \lambda = 334\text{m}$, $L_z = 1200\text{m}$ として y 軸方向には最適摂動 1 波長分の領域とした．ミニマル領域 LES の時と同様に，ストリーク構造が自身の軸方向に長く伸びた構造であるため x 軸方向には領域を広く取ってある．グリッドの数は $N_x = 32$, $N_y = 128$, $N_z = 120$ である．

用いる最適摂動は 4 章で最適化時間を 500s, 渦粘性係数 K を $1(\text{m}^2/\text{s})$ に設定して求めた最適摂動のうち，発達率の大きかった $\epsilon = 30^\circ$, $\lambda = 334\text{m}$ の最適摂動である．ストリーク構造の不安定性を調べるために平均流と最適摂動以外にランダムなノイズを与えた実験も行う．擾乱の非線形の効果に注目するため，初期に与える最適摂動の振幅も重要なパラメータとなる．最適摂動の関数を適当に定数倍をすることで鉛直速度の空間最大値を A とするようにして，これを平均流に加えて初期の流れ場を構成した．したがって，この A の値が最適摂動の振幅の尺度となる．

5.3 結果

5.3.1 2次元計算におけるストリーク構造の時間発展に対する非線形効果

最初に，ストリーク構造の非線形時間発達の結果，ケルビン-ヘルムホルツ (K-H) 不安定で見られるような渦の巻き上がりがエクマン層内で起こることを示す．K-H 不安定のようなシアーによる不安定では擾乱の振幅が大きくなり有限振幅とみなせるようになると渦の巻き上がりが生じる (?)．ストリーク構造の発達にとって重要な役割を果たすオーア・メカニズムはシアー不安定に対応するメカニズムであり，有限振幅のストリーク構造では K-H 不安定の同様の渦の巻き上がりが見られる可能性がある．

渦の巻き上がりの現象は擾乱自身の非線形効果のみによって引き起こされるため，他の擾乱の存在は必要ない．よって初期場の擾乱としてはランダムノイズは与えず最適摂動のみを与えて，その振幅を変化させることで非線形効果を解析した．

図 5.3 は振幅が $A=0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ の場合の擾乱の運動エネルギーの時間変化を示している．この運動エネルギーは全空間を積分したものを領域の体積で割って求めた平均運動エネルギーである． $t=0$ での全エネルギーを 1 として規格化を行っているため，線形論が完全に成り立つのであれば最適摂動の時間発展はすべて同じになるはずである．

図 5.3 を見ると $A=0.01, 0.05, 0.1$ ではエネルギーの時間変化は，ほぼ同一でありこの程度の振幅であれば線形論が近似的に成り立つことが分かる．一方，振幅が大きくなるにつれて規格化されたエネルギーの増大率は小さくなっており，非線形効果によって最適摂動の成長が阻害されているのが示された．

規格化した図では非線形効果が分かりにくいので，図 5.4 に規格化をしていないエネルギーの時間変化を示す．図 5.4(a) は OT 成分 (v, w) の運動エネルギー，図 5.4(b) は DS 成分 (u) の運動エネルギーである．擾乱の運動エネルギーの OT 成分は初期に与えた振幅に応じた運動エネルギーを持っており，それが時間とともに減少していきただけなので，初

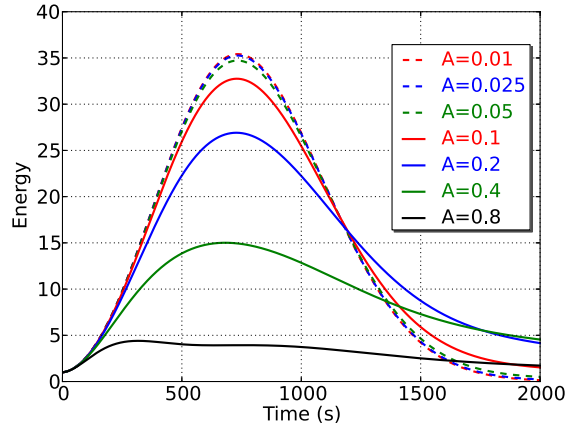


図 5.3: 様々な振幅での非線形時間発展をした時の最適摂動のエネルギーの時間変化. $t=0$ での全エネルギーを 1 として規格化してある.

期振幅 A に違いによる質的な違いは見られない. しかし, エネルギーの DS 成分の時間変化を見ると, 初期にストリーク構造の発達にともなって急激に大きくなっていった後に約 $2.5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ を上限としてそれ以上は増大できなくなっている様子が見て取れる.

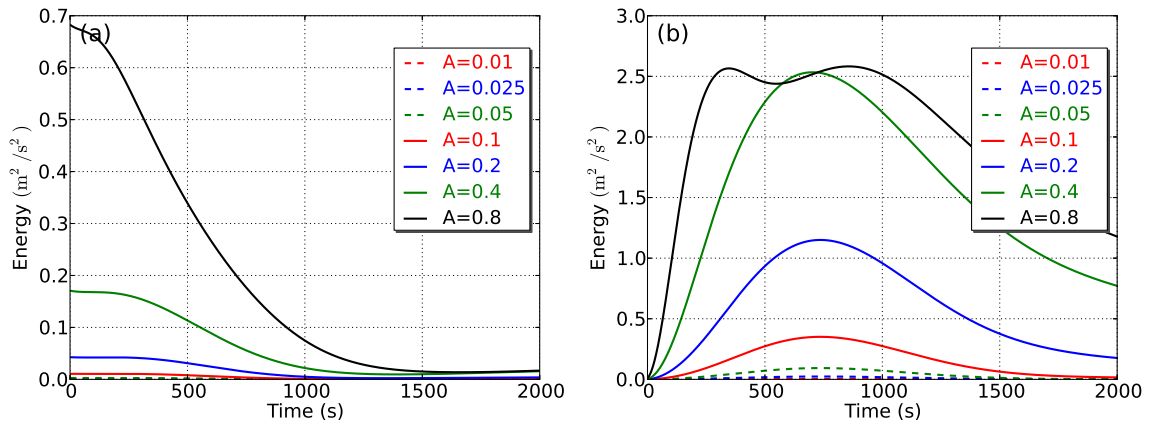


図 5.4: 様々な振幅での非線形時間発展をした時の最適摂動のエネルギーの時間変化. (a) は OT 成分, (b) は DS 成分.

この非線形効果による擾乱の発達の抑制メカニズムを調べるために, 擾乱の空間パターンを調べる. 図 5.5 - 5.7 に擾乱の速度の y - z 断面分布を示す. この数値実験では擾乱は x 軸方向には変化せずに 2 次元擾乱を維持している. 左から主流方向速度 u , スパン方向速度 v , 鉛直速度 w である. 擾乱の振幅が小さいとき ($A = 0.01$) は線形理論で予測されたように擾乱のパターンが平均流のシアによって y 軸の負の向き (左) に倒れていく様子が見て取れる. 一方, 振幅が大きいとき ($A = 0.8$) には, 線形理論の時とは異なった挙動を示している. 例えば, 主流方向速度 u のパターンが歪められて高速流域が低速流域の下

に巻き込まれるような挙動を示している。これは擾乱の OT 成分による移流で自身の空間パターンを変化させているのだと解釈される。線形論では擾乱の振幅が平均流に対して小さいため、擾乱による移流は小さいとして無視されていたが、非線形時間発展ではこのような挙動が生じる。また、図 5.7 には平均場も加えた流れの全量の時間変化を示している。シア一流中に見られる流れの巻上がりの様子が明瞭に見られる。

本来、最適摂動は主流方向速度 u と鉛直速度 w のパターンが逆位相となっており、これがロールメカニズムにおいて必要な負の速度相関 uw を作り出している。しかし、摂動自身が持つ移流効果によって主流方向成分のパターンが変形され、相関が失われることでロールメカニズムが働かなくなっている。実際に、図 5.6(l) では鉛直速度 w は水平方向に位相が変化する空間パターンを維持しているのに対して、主流方向速度 u (図 5.6(d)) は位相が鉛直方向に変化しており、初期に持っていた逆位相の関係が失われていることが分かる。これが図 5.4 で見られる運動エネルギーの DS 成分の増加の抑制につながっていると考えられる。

5.3.2 非線形効果によるストリーク構造の 3 次元的不安定性

次にストリーク構造の 3 次元不安定性の解析を行う。 $A = 0.4$ のケースにおいて初期の温位場に最大値が 0.025(K) の正規乱数で決まるランダムな擾乱を与えた。ランダムな擾乱がない場合は前節のように 2 次元的な摂動が維持されるが、擾乱がある場合にはストリーク構造の崩壊過程が見られると期待される。

まず最初にランダムな擾乱によってエネルギーの発展にどの程度影響がでるかを計算する。図 5.8 はランダムな擾乱を与えたケース (赤線) と運動エネルギーを与えなかったケース (青線) の運動エネルギーの時間変化を示している。図 5.8(a) は OT 成分の運動エネルギー、図 5.8(b) は DS 成分の運動エネルギーである。図 5.8(a) を見ると、 $t \sim 700\text{s}$ 以降に急激なエネルギーの増加が見られ、最適摂動のみの場合は減衰をするのとは対照的な結果を示している。一方の DS 成分では $t \sim 700\text{s}$ 以降では最適摂動のみの場合よりもエネルギーが少なくなっている。これは次に示すようにストリーク構造を表す最適摂動が崩壊することで、ロールメカニズムによって平均流からエネルギーを受け取る働きが小さくなったためと考えられる。

最適摂動以外の擾乱の時間発展を詳細に見るために、ランダムな擾乱を与えたケースと与えなかったケースの運動エネルギーの差を計算して、その時間変化を図 5.9 に示した。OT 成分の運動エネルギーの差の図 (a) は片対数グラフで描いた。

OT 成分の運動エネルギーの差 (図 5.9(a)) を見ると、最初に与えられた温位場のランダムな擾乱によって速度場の運動エネルギーの最適摂動からの差が増大していくが、 $t=200\text{s}$ 程度で一度は飽和状態に達している。しかし、 $t=600\text{s}$ 程度から再び急激な発達が見られており、最終的には $t=2000\text{s}$ 程度で再び飽和状態に達している。DS 成分の運動エネルギーの差の図 5.9(b) では前述した最適摂動の崩壊に伴うエネルギーの減少により、 $t=1700\text{s}$ 程度までは負の値を示す。このように初期にランダムな擾乱を加えた場合には、擾乱が最適摂動のみの場合とは異なる時間発展の様子を示しており、異なる性質を持つ擾乱が発達していると考えられる。

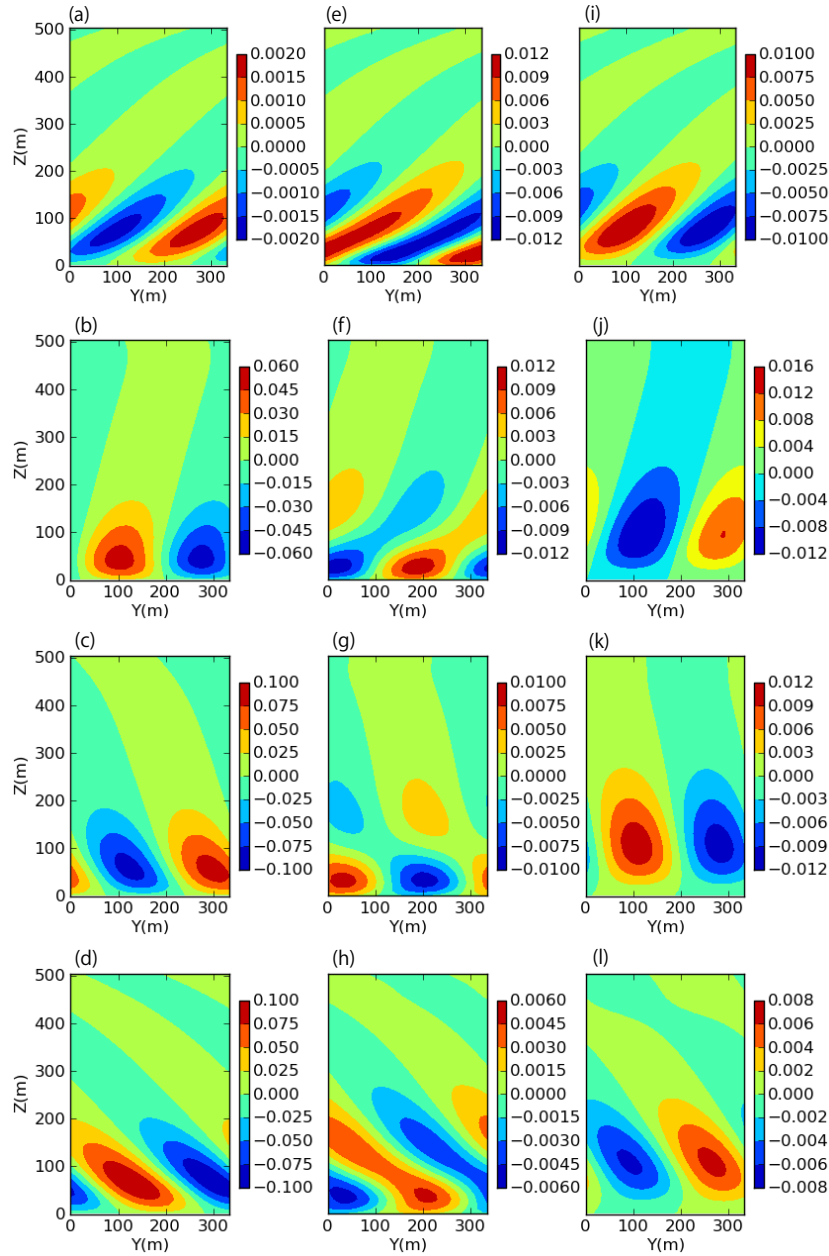


図 5.5: 振幅 $A = 0.01$ の最適摂動 (最適化時間 500s) の摂動成分の時間変化. (a) から (d) が u , (e) から (h) が v , (i) から (l) が w の分布を表している. 上から (a),(e),(i) が $t=0s$, (b),(f),(j) が $t=250s$, (c),(g),(k) が $t=500s$, (d),(h),(l) が $t=750s$ である.

この最適摂動とは異なる擾乱の性質を調べるために流れの圧力場を調べることにする. 流れが循環している領域では他の場所と比べて低圧になるため, 低圧領域の構造を調べることで渦の構造が調べられる. 図 5.10 は最適摂動の振幅 $A=0.4$ で温位場に擾乱が与えられた実験での $p=-0.03\text{Pa}$ の等値面を示している. (a) から (c) 図はそれぞれ $t=300s$, $750s$, $850s$ での図である. 等値面での色はその場所での鉛直流速を示しており, また図の外の

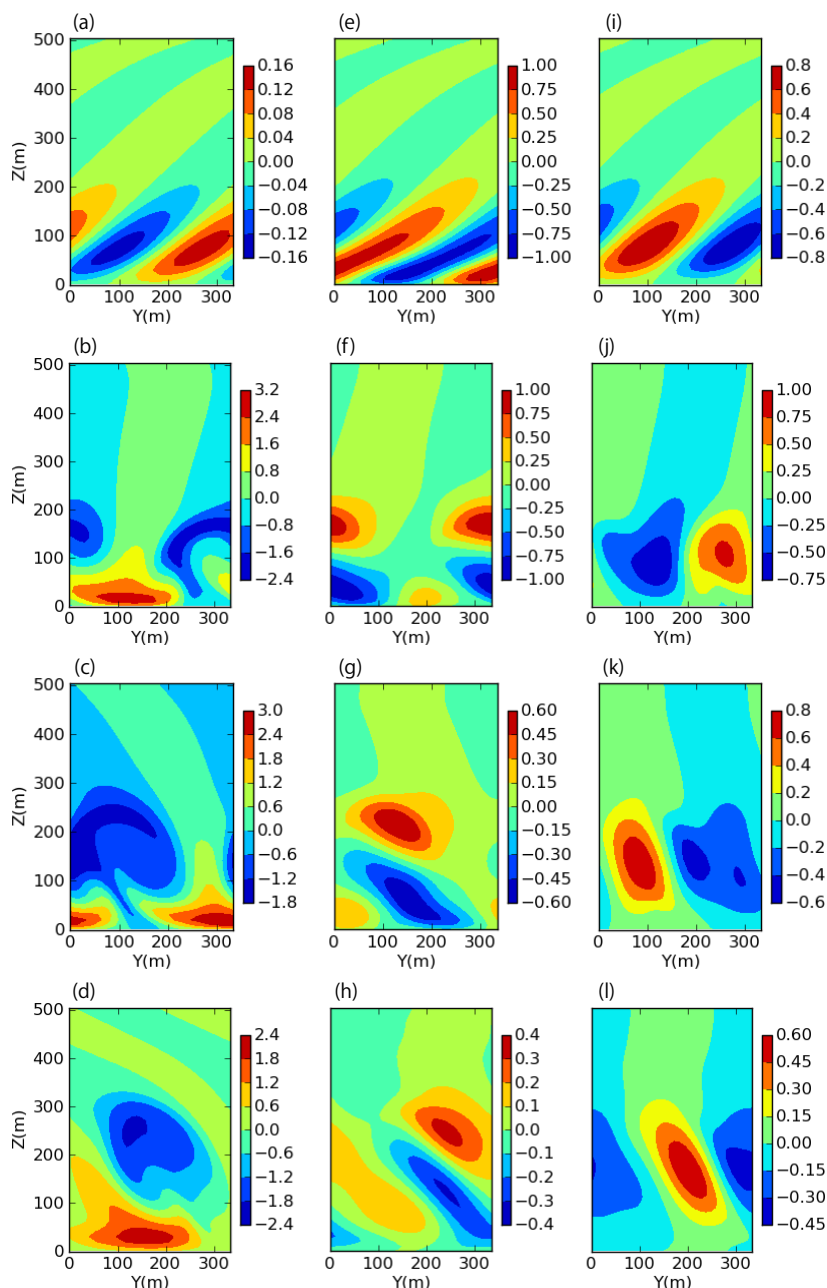


図 5.6: 振幅 $A = 0.8$ の最適摂動 (最適化時間 500s) の摂動成分の時間変化. 各図の設定は図 5.5 と同じである.

枠線は計算領域を示し、座標系は左下の矢印の示すとおりである. この等値面で囲まれた領域は低圧渦となっており、この周りでは旋回流が存在している.

図 5.10(a) の $t=300\text{s}$ においては、まだストリーク構造に伴う低圧渦は 2 次元的な摂動として維持されているが、図 5.10(b) の $t=750\text{s}$ においては 3 次元的な構造が発達してきている. 縦渦であるストリーク構造から上方に渦が引き伸ばされて、横渦が形成されている

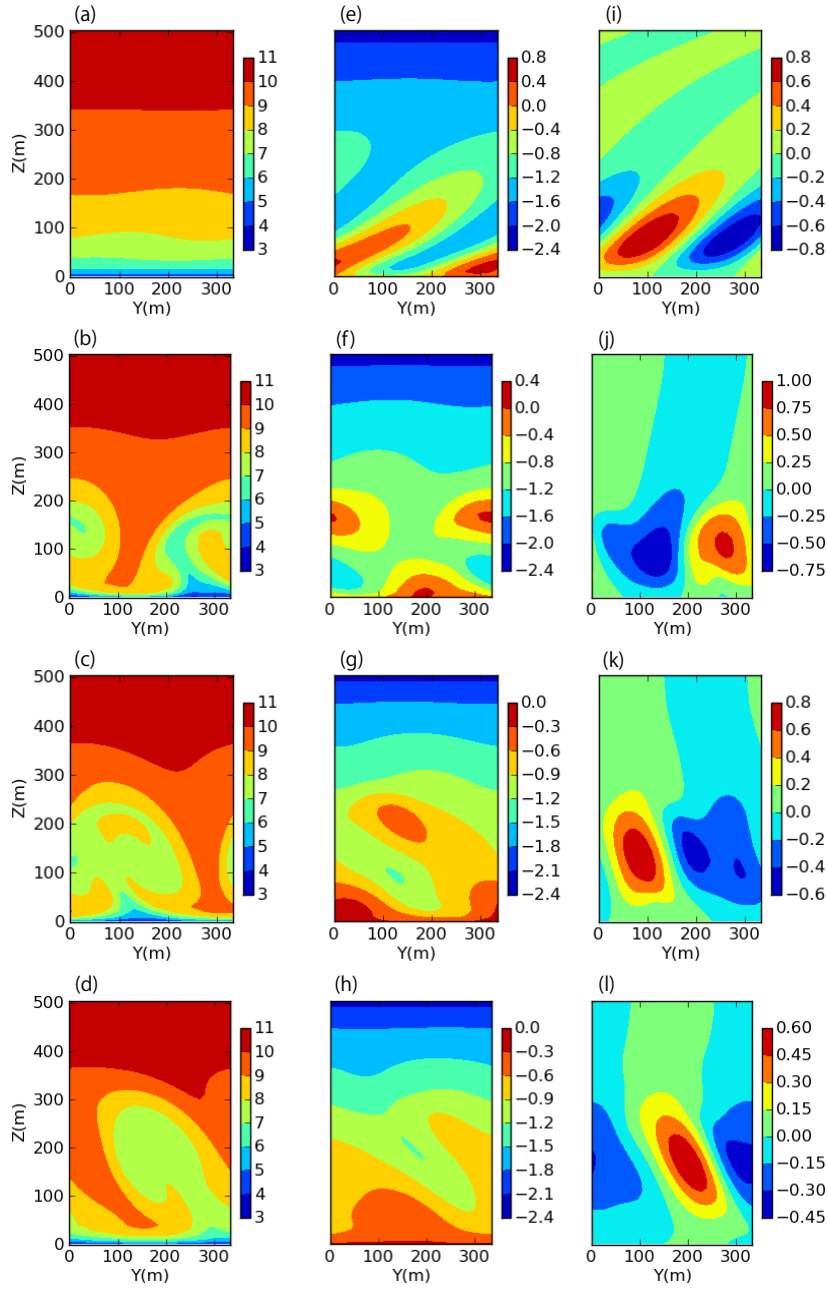


図 5.7: 振幅 $A = 0.8$ の最適摂動 (最適化時間 500s) とエクマン層の平均流とを合わせた流れ場の時間変化. 各図の設定は図 5.5 と同じである.

様子が見て取れる. また図 5.10(c) の $t=850s$ においては横渦が伸びて, ストリーク構造であった縦渦どうしをつなぐような馬蹄形渦が出現しているのが分かる. 図 5.9 を見ると, $t=750s$ は OT 成分の運動エネルギーが急増して擾乱の性質が最適摂動とは異なっていく時間に相当しており, 図 5.10 で示されたストリーク構造から馬蹄形渦が出現する現象が対応していると考えられる.

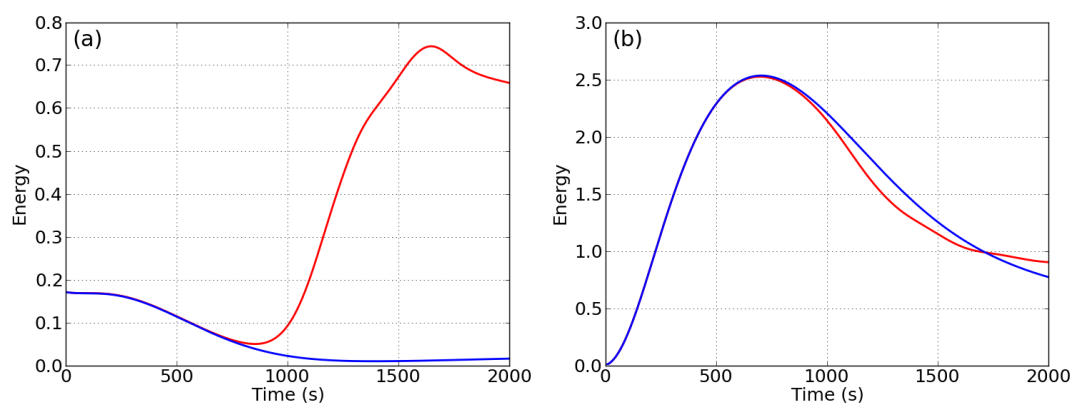


図 5.8: ランダムな擾乱を与えて行った数値実験の運動エネルギー (赤線) と擾乱を与えないで行った実験の運動エネルギー (青線) の時間変化. 共に最適摂動の振幅は $A = 0.4$ で与えている. (a) が OT 成分の運動エネルギーの差を (b) が DS 成分の運動エネルギーの差をそれぞれ表している.

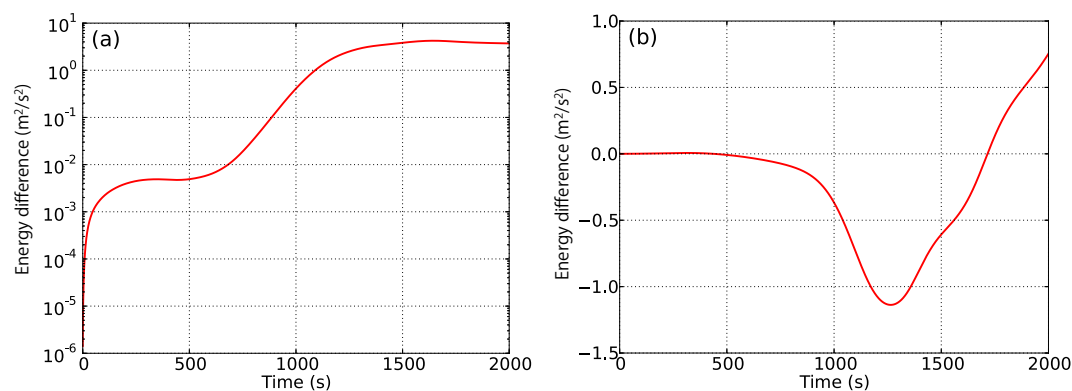


図 5.9: ランダムな擾乱を与えて行った数値実験の運動エネルギーと擾乱を与えないで行った実験の運動エネルギーの差の時間変化. 共に最適摂動の振幅は $A = 0.4$ で与えている. (a) が OT 成分の運動エネルギーを (b) が DS 成分の運動エネルギーをそれぞれ表している.

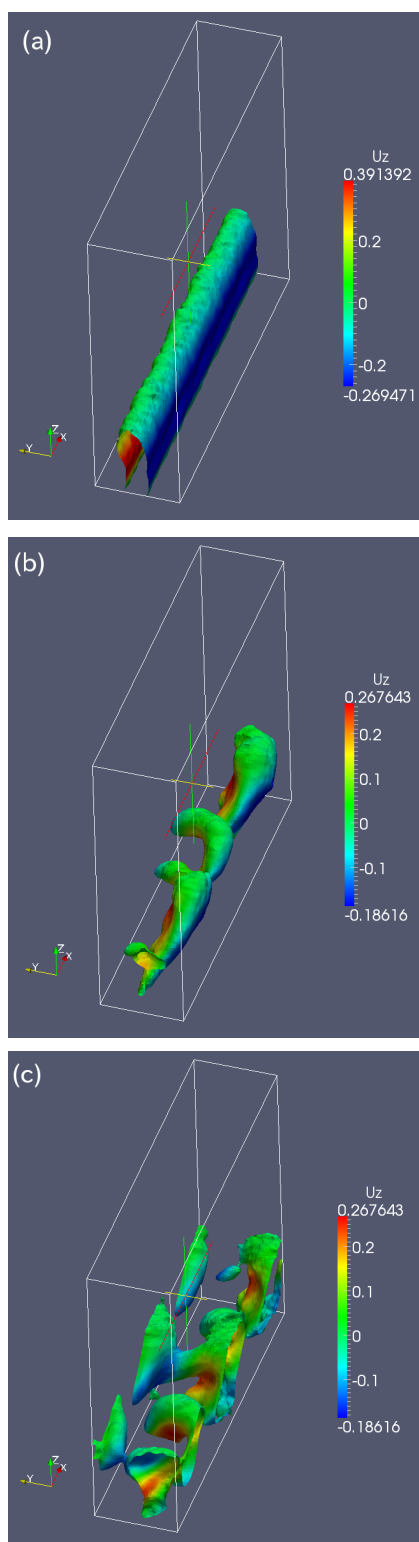


図 5.10: 上から時刻 $t=300$ (s), 750 (s), 850 (s) における圧力 -0.03 (Pa) の等値面. 管の内部は低圧渦になっている. 面についている色は鉛直流速を表す.

5.4 議論とまとめ

この章では最適摂動から始まるストリーク構造の非線形時間発展の数値実験を行った。ストリーク構造の初期の時間発展は4章までの解析によりエクマン層の最適摂動によって計算できることが分かっているため、初期場にエクマン層の平均場と最適摂動のみを与えて、非線形時間発展計算を行った。その結果、最適摂動の振幅が大きい場合には、擾乱の非線形性によりストリーク構造の発達が抑制されることや、微小擾乱が急激に発達してストリーク構造が崩壊していくことなどが示された。

最初に最適摂動以外に全く擾乱を与えないで数値実験を行い、ストリーク構造の持つ非線形性を解析した。この場合には3次元的な擾乱は発達せずに摂動の発達を2次元的であった。この数値実験では最適摂動の初期の振幅を大きくするとケルビン-ヘルムホルツ不安定の数値実験で見られるような渦の巻き上がりが起こることが示された。これは流れのOT成分で表されるストリーク構造の循環が主流方向速度の低速流体を上方へ、高速流体を下方に移流することで引き起こされている。この渦の巻き上がりによって鉛直流 w と主流方向速度 u の相関が失われるため、初期の振幅によらずストリーク構造の発達は有限の所で打ち止めとなり、それ以上は発達できないことが示された。

次にランダムな擾乱を与えることで、流れの3次元的な構造に着目した数値実験を行った。単一のケースでの結果であるが、ストリーク構造から始まる時間発展の崩壊過程で馬蹄形渦が出現する現象が見られた。馬蹄形渦は2つのストリーク構造の間に橋を架けるようにして出現しており、?でLESで得られた馬蹄形渦(図5.2)と類似している。図5.2の馬蹄形渦は十分に発達したエクマン境界層内のスナップショットから得られており、普遍的にエクマン層内に存在していると期待される。ストリーク構造から馬蹄形渦が出現する本研究で得られた現象は、エクマン層内で馬蹄形渦が形成される過程の1つであると考えられる。

この章での解析では単一のストリーク構造の時間発展のみを扱い、複数の最適摂動が同時に発達してきた場合に摂動同士がどのように相互作用するのかは解析できていない。4章でエディ・ターンオーバータイムによって最適化時間の上限は見積もることができたが、それより短い最適化時間を持つ最適摂動はランダムな擾乱からでも常に発達してくると思われる。複数の秩序構造の相互作用を研究している先行研究としては大気のロール構造と乱流の非線形相互作用を扱っている?などがある。また、低レイノルズ数の系ではあるが、2つのストリーク構造が衝突した時に起こる興味深い挙動などが?で示されている。非線形の効果が卓越する時間フェイズでのストリーク構造の特性の理解のためにはまだまだ多くの研究が必要であるが、本章の計算結果が今後の研究に役立つ可能性があると考えられる。

第6章 まとめ

本論文では大気エクマン層内のストリーク構造の時間発展に着目して、初期の時間発展とその後の発達・崩壊過程を数値解析を用いて研究した結果を述べている。

2章ではLESによって大気エクマン層を再現し、その中で出現するストリーク構造の時間発展の様子を考察した。LESによって再現されたエクマン層の風速プロファイルや乱流の統計的特性、流れ場から抽出されたストリーク構造の空間構造などは観測結果や先行研究での数値実験の結果と同様の性質を示し、本研究のLESによって再現されたストリーク構造の性質の妥当性が確認できた。

次に、再現されたストリーク構造のエネルギー論を考察した。LESの結果得られたエクマン層の擾乱場を、ストリーク構造の特性を決定する2つの重要なパラメータである水平波数と地衡風方向とのなす角の違いによって分解して、各パラメータでの擾乱のエネルギー特性の違いを解析した。その結果、ストリーク構造を構成する空間スケールが数百 m 程度、地衡風とのなす角が15度程度の摂動が平均流と強く相互作用をして多くの運動エネルギーを平均流から得ているという結果が得られた。また、地衡風とのなす角が15度から大きく離れた摂動には、平均流からのエネルギーの変換が非常に小さいことも示された。すなわち、平均流から擾乱へのエネルギー変換に際して、非等方的なエネルギーカスケードが起こっていることが示されたのである。ストリーク構造の空間パターンが非等方的であることはこれまでの先行研究によって示されていたが、平均流からのエネルギー供給そのものが非等方的であり、それがストリーク構造の非等方性を生み出していることが本研究で初めて明らかにされた。

次に、ストリーク構造の時間発展の様子を詳細に調べるためにミニマル領域LESによる実験を行った。これは計算領域を意図的に小さくすることで解析を行いやすくする手法をLESに応用した実験である。この実験によって計算領域が大きかった実験では得られなかったストリーク構造の時間発展の様子が解析できるようになった。その結果、ストリーク構造が空間パターンを変化させながら急激に発達していく様子が得られた。また、このストリーク構造の生成にはオーアメカニズムとロールメカニズムという2つのメカニズムが働いていることが示された。ミニマル領域実験によってエクマン層のストリーク構造の時間発展を解析した研究はこれまでに無く、2つのメカニズムが相乗作用をしてストリーク構造が発達する過程を乱流中から明確に抽出できたことは本研究で得られた新たな結果である。また、この結果を3・4章での理論解析の結果と比較することで最適摂動との類似性を指摘することができた。

ストリーク構造が主に平均流との相互作用によって成長するという事実は、ストリーク構造の時間発展が線形論で説明できる可能性を示唆しており、3、4章での線形安定性

解析につながっている．最初に3章ではエクマン層の安定性解析で出てくるノンモーダル不安定や最適摂動の概念を理解するためにカノニカルエクマン層を基本場として解析を行った．ノンモーダル不安定は従来のノーマルモード不安定とは異なり，摂動が形状を変化させながら有限時間の間だけ発達していく不安定であり，最適摂動はその有限時間の間に最もエネルギーが増幅する摂動を指している．本研究では?でなされた，ストリーク構造の初期の時間発展の様子が最適摂動で表現されるという主張を確認するための解析を行った．

その過程でキャッピング逆転層という，エクマン層の安定性問題に対する影響をほとんど考慮されてこなかった要素が，エクマン層の安定性に大きな影響を与えていることが本研究において新たに明らかになった．キャッピング逆転層は変曲点不安定ノーマルモードのような鉛直方向へのスケールの大きな摂動に対して発達を抑制する効果を示し，実際に逆転層の影響が十分に大きい場合にはすべてのノーマルモード不安定が消滅してしまい，線形安定性理論としては安定な系になることが示された．これは?で理由が分からないままであった，変曲点不安定ノーマルモードが数値実験等で出現してこない原因について逆転層が大きな役割を果たしていることを示している．一方，最適摂動の発達に対してはキャッピング逆転層の影響は小さく，この事実も数値実験で現れるストリーク構造が最適摂動で表現できるという主張を裏付けるものである．

4章では2章のLESを用いた数値実験で得られた現実的なエクマン層プロファイルを基本場として，不安定ノーマルモードと最適摂動の計算を行った．このエクマン層には不安定ノーマルモードは存在しないが，最適摂動は3章のカノニカルエクマン層を基本場とした場合と同様のメカニズムにより急激な発達を示すことが分かった．エネルギー解析と摂動の空間パターンの時間変化を調べることで，この最適摂動はオーアメカニズムとロールメカニズムの相乗作用を利用して発達することが示された．この結果は2章のミニマル領域LESで得られたストリーク構造の初期の時間発達と整合的であった．したがって，2-4章の結果よりストリーク構造の初期の時間発展はエクマン層の変曲点不安定ノーマルモードではなく最適摂動によって表されるという主張が裏付けられたと考える．また，この章ではエディ・ターンオーバータイムという概念を利用して，最適摂動の最適化時間の上限値を見積もった．この見積りはミニマル領域LESで見られたストリーク構造の成長の時間スケールと近い値であった．エクマン層でのストリーク構造の成長時間スケールをエディ・ターンオーバータイムで見積もるという研究は本研究が初めてであり，今後のストリーク構造の研究にも応用できると期待される．

最後に5章で初期擾乱として最適摂動を与えることでストリーク構造の非線形時間発展を解析した．ストリーク構造の振幅が十分に大きくなってくると，3，4章で述べられた線形時間発展とは異なる挙動を示す．この章での非線形時間発展計算によって，渦の巻き上がりによってストリーク構造の発達が抑制されること，および馬蹄形渦のような複雑な秩序構造がストリーク構造の時間発展から自発的に発達して，それに伴いストリーク構造が崩壊していくことが示された．これらの結果は今後の大気の秩序構造の非線形時間発展の研究にとって意義ある知見になると期待される．

本研究はストリーク構造の物理的な理解を目的としてきたが，ここで得られた様々な知見はストリーク構造を含む秩序構造のモデリングに際しても重要な意味を持つと考えら

れる。?の研究で述べられているように、メソ擾乱と大気の等方乱流のスケールの間には LES でも RANS でも扱うことにできなグリッドスケール (terra incognita - 未知の大地と呼ばれる) が存在しており、このスケールでの乱流モデリングの構築は気象学の重要な課題となっている。ストリーク構造を含む流れの秩序構造の空間スケールはメソ擾乱よりはずっと小さいが 2 章で示されたような非等方性を示すスケールであり、terra incognita に含まれると考えられる。よって、ストリーク構造の時間発展の特性と背後にある物理的メカニズムを明らかにした本研究の結果は新たな乱流モデリングの構築のような応用的なテーマに対しても重要な意義を持っており、今後の研究に役立つと考えられる。

基礎となった論文

本博士論文の基礎となった論文は以下のとおりである

- Kenshi HIBINO, Hirohiko ISHIKAWA, and Keiichi ISHIOKA, 2012: Effect of a Capping Inversion on the Stability of an Ekman Boundary Layer, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **90(2)**, 311-319.
- Kenshi HIBINO and Keiichi ISHIOKA: Time Evolution of the Streaks in the Neutrally Stratified Ekman Boundary Layer (投稿準備中).

謝辞

本研究の遂行に当たっては指導教官である石岡圭一先生に大変お世話になりました。たまに弱音を吐きたがる私を叱咤して博士論文を書き上げることができました。本当にありがとうございました。また、修士課程の学生の時に指導をして頂いた石川裕彦先生、学部時代に指導していただいた里村雄彦先生にもお世話になりました。当時の研究が本研究の元になりました。この場を借りてお礼を述べたいと思います。

また、気象学研究室の余田成男先生と内藤陽子先生に研究室のゼミなどで多くの貴重な意見やアドバイスをいただき、ありがとうございました。余田先生が私の研究テーマに強く関心を持っていたのが、自分の研究遂行の強い支えとなりました。大塚成徳さんには本当にいろいろなことで相談に乗っていただきありがとうございました。

気象学研究室に在籍して多くの先輩や後輩と一緒に研究を進めてきました。研究の議論を夜遅くまで付き合っていたいただいたりしたことは、良い思い出です。研究以外にもいろいろな面で刺激を受けることがありました。ありがとうございました。また、暴風雨・気象環境分野の学生さん、学部の時の物理気候の学生さんにもお礼を申し上げます。

博士課程の3年目には京都大学グローバル COE プログラム「極端気象と適応社会の生存科学」の特別枠で学術振興会の研究員として採用して頂きました。様々な研究のサポートに感謝しています。

付 録 A

A.1 LES での下端境界条件の設定

2章で行ったラージ・エディ・シミュレーションの下端境界条件は?と同様の手法で決定した．まず鉛直流に関しては，速度が定義されているのが $z = 0\text{m}$ であるため $w = 0$ とディリクレ条件を課することができる．水平流を決定する時には最下層のグリッドにおいて地面からの水平運動量フラックス $(\tau_{xz})_0, (\tau_{yz})_0$ (それぞれ u と v のフラックスを表す) を決定する必要がある．この具体的な手順は以下の通りである．

- (1) 最下層のグリッドに働く地面からの応力の平均値を計算する．

最下層のグリッドは接地層に入っていると仮定すると水平風速は対数プロファイルに従う．すなわち，

$$\langle \bar{q} \rangle_1 = \frac{u_*}{\kappa} \log(z/z_0) \quad (\text{A.1})$$

ここで $q = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$ ， u_* は摩擦速度， z_0 は粗度， κ はカルマン定数であり 0.4 を用いる．ブラケットは水平の空間平均を表すとする．摩擦速度は

$$u_* = \sqrt{(\langle \tau_{xz} \rangle_1)^2 + (\langle \tau_{yz} \rangle_1)^2} = \sqrt{(\langle \tau_{xz} \rangle_0)^2 + (\langle \tau_{yz} \rangle_0)^2} \quad (\text{A.2})$$

で定義されている．ここで添字の 1 は最下層のグリッドでの値であることを，添字の 0 は地面での値であることを明示している．2 つ目の等式が成り立つのは接地層内では運動量フラックスは鉛直方向には変化しないことを利用しているからである．また，接地層内では水平風速の向きは鉛直方向にほぼ一定である点を考慮すれば最下層グリッドに地面から与えられる運動量フラックスと最下層グリッドの水平風速の向きとの間には以下の関係式が成り立つと仮定される．

$$\frac{\langle \tau_{yz} \rangle_0}{\langle \tau_{xz} \rangle_0} = \frac{\langle v_1 \rangle}{\langle u_1 \rangle} \quad (\text{A.3})$$

最下層グリッドでの水平風速が与えられ場合に，式 (A.1)，(A.2)，(A.3) を用いると地面から最下層グリッドへの平均運動量フラックス $\langle \tau_{xz} \rangle_0, \langle \tau_{yz} \rangle_0$ が求まる．

- (2) 各グリッドでの応力を計算する．

手順 1 で求めた運動量フラックスは水平平均した値であり，各グリッドポイントでの値ではない．各グリッドポイントで局所的に対数プロファイルが成り立っていると仮

定して計算している先行研究 (?) も存在しているが、本研究では?と同様に平均水平風速のみが対数プロファイルを示すと仮定し、各地点での値はバルク法を用いて補正するという手法をとる。具体的には

$$(\tau_{xz})_0 = \langle \tau_{xz} \rangle_0 \frac{S_1 \langle \bar{u}_1 \rangle + \langle S_1 \rangle (\bar{u}_1 - \langle \bar{u}_1 \rangle)}{\langle S_1 \rangle \langle \bar{u}_1 \rangle} \quad (\text{A.4})$$

$$(\tau_{yz})_0 = \langle \tau_{yz} \rangle_0 \frac{S_1 \langle \bar{v}_1 \rangle + \langle S_1 \rangle (\bar{v}_1 - \langle \bar{v}_1 \rangle)}{\langle S_1 \rangle \langle \bar{v}_1 \rangle} \quad (\text{A.5})$$

$$(\text{A.6})$$

を用いて平均運動量フラックスから各グリッドでの値を求める。ここで、 $S_1 = (\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2)^{1/2}$ である。

本来、接地層の対数プロファイルはアンサンブル平均した風速プロファイルで成り立つものであり、特定の時刻・地点で成り立つものではない。したがって、?のような局所的に対数プロファイルを仮定する境界条件よりも、本研究で用いる?の手法が妥当だと考えられる。

A.2 ミニマル領域 LES で見られたストリーク構造の発達

2章ではミニマル領域 LES の結果を述べたが、本文中ではケース 18 の結果のみを示した。本節では他のケースで見られたストリーク構造の時間発達のうち、オーアメカニズムとロールメカニズムが共に働き、擾乱の急激な発達が見られるものを示す。

図 A.1 は図 2.20 と同様にストリーク構造の運動エネルギーと平均流からのエネルギー変換量の時間変化を示している。また、ストリーク構造が急激に発達している期間における速度分布の y - z 断面を図 A.2 から図 A.5 に示す。

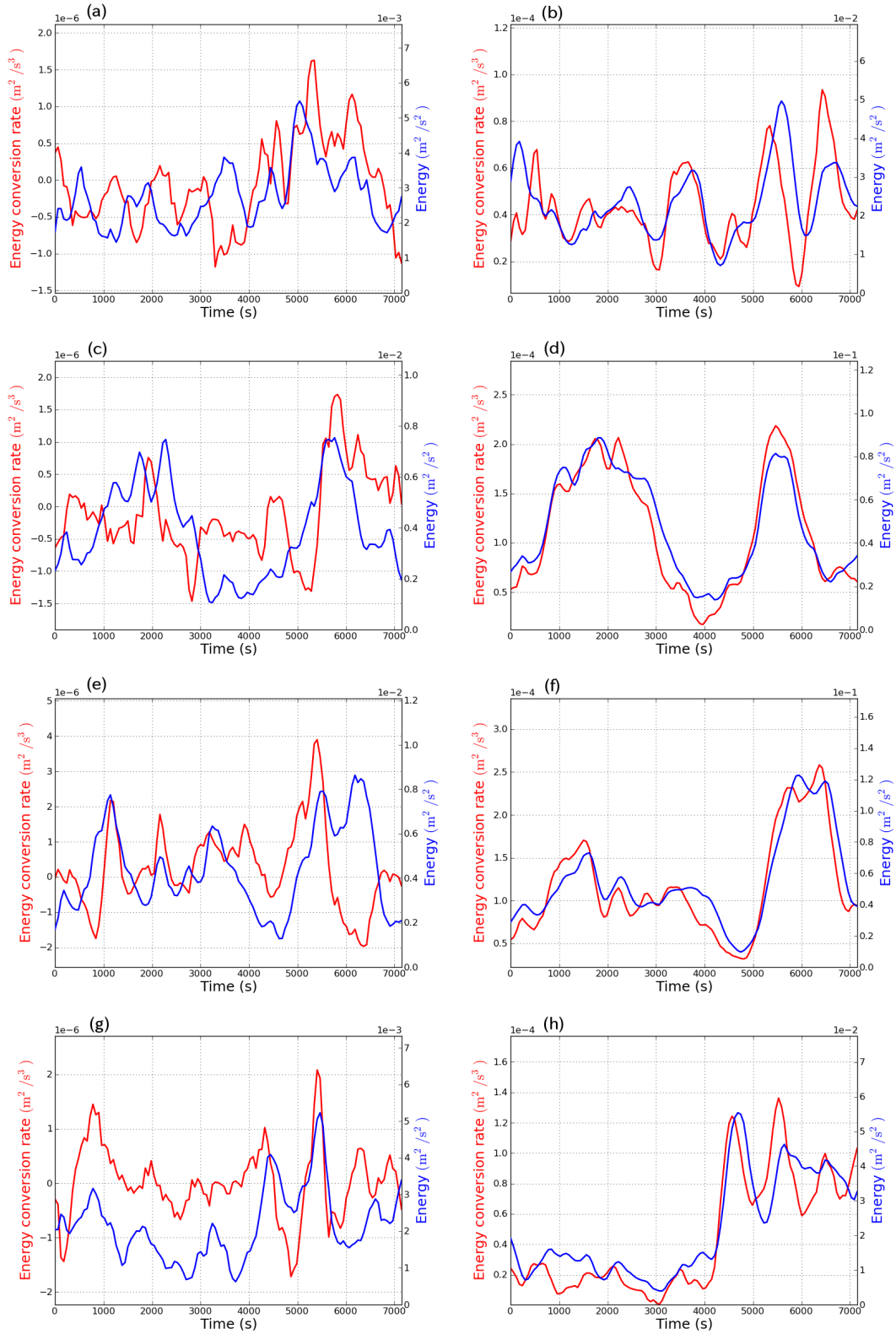


図 A.1: ケース 6, 9, 17, 21 でのストリーク構造の運動エネルギー (青線) と平均流からストリーク構造へのエネルギーの変換量 (赤線) の時間変化. (a),(b) がケース 6 の OT 成分と DS 成分で, 以下同様に (c),(d) がケース 9, (e),(f) がケース 17, (g),(h) がケース 21 の結果を示している.

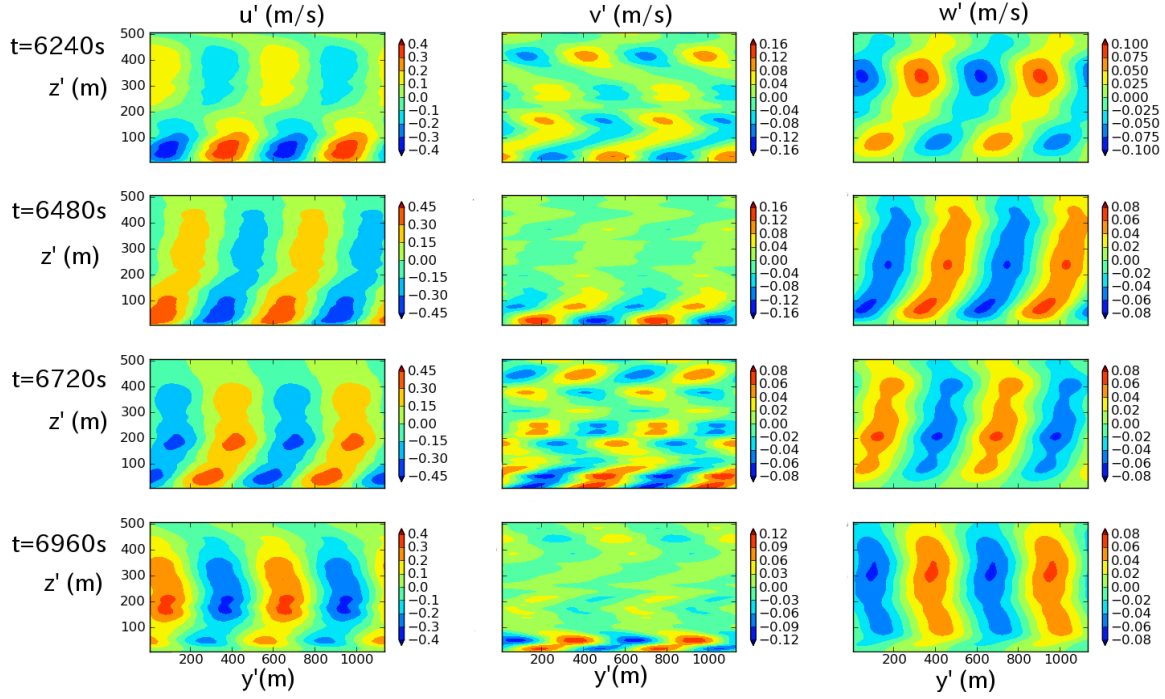


図 A.2: ケース 6: 時刻 $t=6240s$, $6480s$, $6720s$, $6960s$. 図の設定は図 2.21 と同じである.

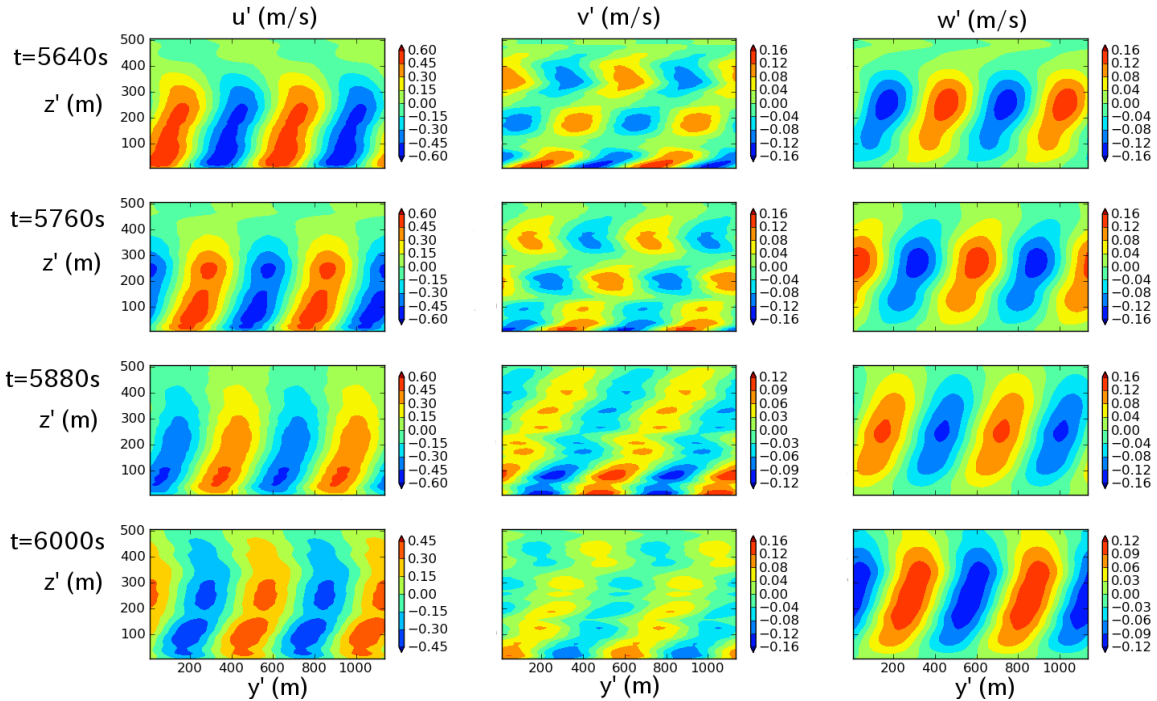


図 A.3: ケース 9: 時刻 $t=5640s$, $5760s$, $5880s$, $6000s$. 図の設定は図 2.21 と同じである.

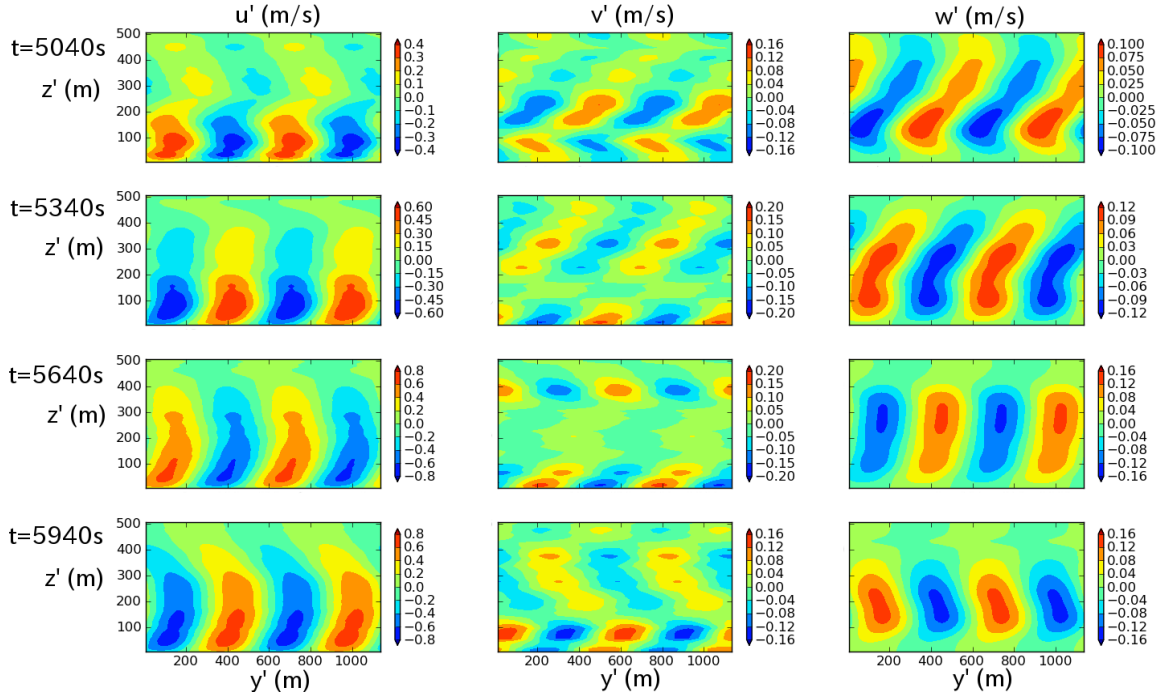


図 A.4: ケース 17: 時刻 $t=5040s$, $5340s$, $5640s$, $5940s$. 図の設定は図 2.21 と同じである.

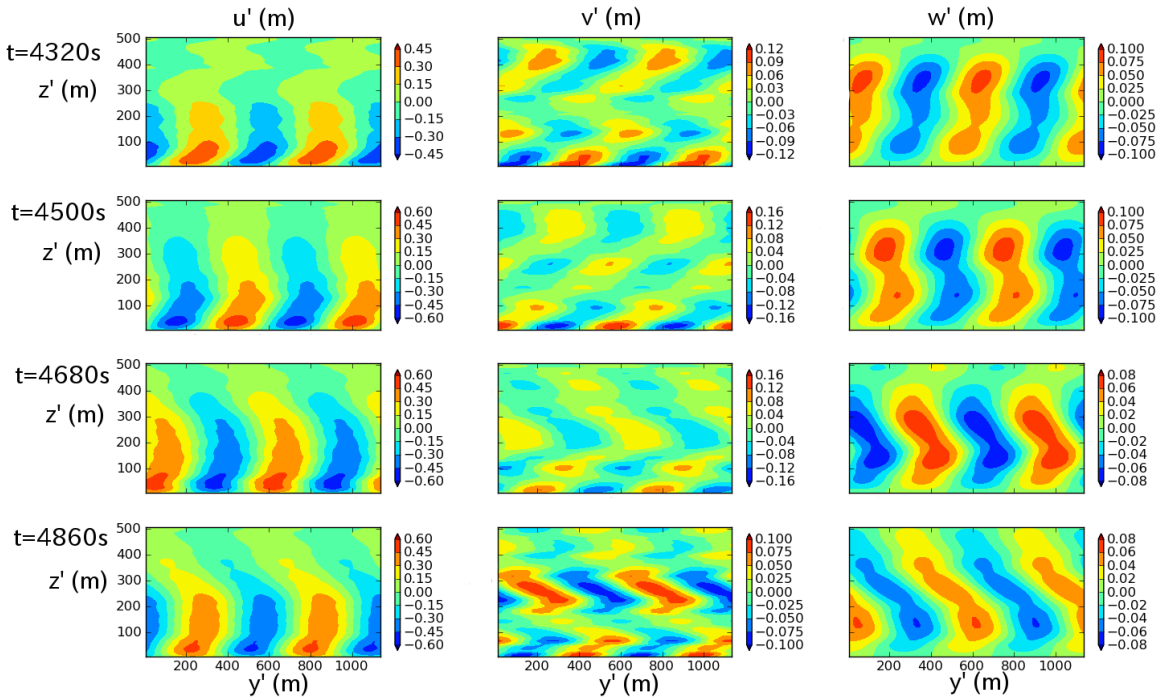


図 A.5: ケース 21: 時刻 $t=4320s$, $4500s$, $4680s$, $4860s$. 図の設定は図 2.21 と同じである.

A.3 ノーマルモードの非直交性とノンモーダル不安定

本論文で扱うノンモーダル不安定のメカニズムには線形安定性問題の演算子の非自己共役 (随伴) 性が重要な役割を果たしている。ここでそのメカニズムについて概説する。

演算子の自己共役性 次の関数固有値問題を考察する。

$$Lf(x) = \lambda f(x) \quad (\text{A.7})$$

ここで L は任意の演算子である。ここでは微分演算子のみを考える。またここで関数の内積を以下のように積分で定義する。

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\dagger} g dx \quad (\text{A.8})$$

ここで、演算子 L の共役演算子 L^* は次の関係式を満たす。

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle \quad (\text{A.9})$$

ここで次のことが成り立つ。

・演算子 L が自己共役、 $L^* = L$ ならば固有値問題 (A.7) の固有ベクトル (関数) は式 (A.8) の内積において直交する。

これは次のように示せる。異なる固有値 λ_1, λ_2 を選ぶと、

$$Lf_1(x) = \lambda_1 f_1(x), \quad Lf_2(x) = \lambda_2 f_2(x) \quad (\text{A.10})$$

この時、式 (A.9) の f, g に固有ベクトル、 f_1, f_2 を代入すると、

$$\langle Lf_1, f_2 \rangle - \langle f_1, L^*f_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\langle Lf_1, f_2 \rangle - \langle f_1, Lf_2 \rangle = 0$$

$$\langle \lambda_1 f_1, f_2 \rangle - \langle f_1, \lambda_2 f_2 \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle f_1, f_2 \rangle - \lambda_2 \langle f_1, f_2 \rangle = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle f_1, f_2 \rangle = 0$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0$$

したがって、

- 線形安定性問題の自己共役性
- 異なる固有値に属する固有関数が直交すること

は同値であることが分かる。

u_1, u_2 が異なる固有値の風速の固有関数 (ノーマルモード) とし、この2つが重ね合わさった風速プロファイルを持っているとき、運動エネルギーは次式で計算される。

$$E = \int_0^{\infty} |u_1 + u_2|^2 dz = \int_0^{\infty} |u_1|^2 dz + \int_0^{\infty} |u_2|^2 dz + \int_0^{\infty} u_1^{\dagger} u_2 dz + \int_0^{\infty} u_1 u_2^{\dagger} dz \quad (\text{A.12})$$

論文本編内でのエネルギーノルムの計算はこのように行われている．固有関数は複素関数であるので，積の片側で共役をとっている．ここで，固有関数同士が直交していれば，第3, 4項は消えて，エネルギーは各固有関数ごとに扱うことができる．対流に関するレイリーの問題や，回転クエット流の不安定問題などではこのノーマルモードの直交性のおかげで問題が簡単化されている．しかし，平行流に関するオーア・ゾンマーフェルト問題ではノーマルモードが非直交なので，式 (A.12) の第1, 2項と第3, 4項が打ち消しあうことが可能となる．例えば，初期に減衰モードの $|u_1|^2, |u_2|^2$ が大きくても，第3, 4項の働きで全運動エネルギー E は小さくなることが可能である．しかし，この2種のノーマルモードは異なる増幅率と位相速度を持っているため，例えば位相がずれることで第3, 4項が小さくなり， $|u_1|^2, |u_2|^2$ 自体はある程度減少していても，場の擾乱の運動エネルギーが一時的に増幅可能となる．これがノンモーダル不安定の数学的な説明である．

A.4 チェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式展開は周期境界条件を満たさない一般の境界条件 (粘着条件，スリップ条件など) の際にしばしば用いられる展開方法である．(石岡, 2004)．また，有理チェビシェフ多項式とはこのチェビシェフ多項式を半無限領域に使えるようにしたものである(?)．

チェビシェフ多項式の定義は以下で与えられる．

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \arccos(\cos(nx)) \quad (\text{A.13})$$

チェビシェフ多項式の積分には高速フーリエ変換が使用できる．本研究では高速フーリエ変換の実装としては FFTW を利用した¹．

チェビシェフ多項式の一部を表 A.2 に載せた．

表 A.1: チェビシェフ多項式の具体的表式

n	$TL_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$

¹<http://www.fftw.org/>

チェビシェフ多項式は $[-1, 1]$ 区間でしか定義されていないが,

$$y = \frac{L(1+x)}{1-x} \leftrightarrow x = \frac{y-L}{y+L} \quad (\text{A.14})$$

で変換することで $[0, \infty)$ 区間に適用できるようになる. これを有理チェビシェフ多項式と呼ぶ. L は任意のパラメータであるがこの値によって計算の精度が変わってくる. L によれば摂動が存在する領域の長さ程度に取るのが目安となる. 有理チェビシェフ多項式の一部を表 A.2 に載せた.

表 A.2: 有理チェビシェフ多項式の具体的表式

n	$TL_n(x)$
0	1
1	$(x-L)/(x+L)$
2	$(x^2-6xL+L^2)/(x+L)^2$
3	$(x-L)(x^2-14xL+L^2)/(x+L)^3$
4	$(x^4-28Lx^3+70L^2x^2-28L^3x+L^4)/(x+L)^4$

A.5 必要計算精度の低減

本論中の安定性方程式は 4 回微分係数を含み, チェビシェフ多項式を代入すると離散化の結果の行列の成分は $O(N^7)$ で増大するようになる (N はチェビシェフ多項式の最大次数). これでは N を大きくしたときに固有値計算の必要精度が大きくなる. 実際 N を 300 程度まで大きくすると倍精度では計算出来なくなる. 本研究では $N = 200$ であるが, すべての固有値, 固有ベクトルを精度よく求めるためには精度が足りなくなった. この問題を解決するため χ の手法を用いた. この方法は新たに関数 χ を次のようにして導入する.

$$\chi = \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad (\text{A.15})$$

この方程式もチェビシェフ多項式で展開することで, 元々の式と合わせて $4N$ 個の連立方程式が出来上がる. 実際は独立な方程式は $3N$ 個なので得られる固有値は $3N$ 個である. この処理により問題は 2 回微分の微分方程式になり, 行列の各成分の大きさのオーダーは $O(N^3)$ となり扱いやすくなった. この固有値問題を LAPACK に含まれる QZ アルゴリズムに基づくサブルーチンで解いた.

A.6 随伴方程式の導出

3.3 節の最適摂動の計算の際に随伴方程式の導出を行ったが、その導出方法を詳細に解説する。この導出手順は山根 (2002) と基本的には同一であるが、2 次元流体を念頭に速度 u, v の 2 変数の方程式を扱っている山根 (2002) と異なり本研究では速度 3 成分と密度の 4 つの変数の方程式を扱う。元の方程式 (3.12)-(3.16) から始めて随伴方程式を求める。以下、(3.12)-(3.16) を若干変形して再掲する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x} - U'w - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{Ro} v \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -U \frac{\partial v}{\partial x} - V'w + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{Ro} u \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -U \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - g\rho \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -U \frac{\partial \rho}{\partial x} - \bar{\rho}_z w + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad (\text{A.20})$$

内積の定義を式 (3.32) と同様に (運動エネルギー)+(位置エネルギー) の形で定義する。

$$\begin{aligned} & \langle (u, v, w, p, \rho), (u', v', w', p', \rho') \rangle \\ &= \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} (uu' + vv' + ww' + A\rho\rho') dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

ここで $A = -g/\bar{\rho}_z$ である。

随伴方程式に従う変数を $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\rho})$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} (u\hat{u} + v\hat{v} + w\hat{w} + A\rho\hat{\rho}) dx dy dz \\ &= \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \hat{u} + u \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \hat{v} + v \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \hat{w} + w \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{\rho} + A\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right) dx dy dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

が成り立つ。

ここで式 (A.16)-(A.20) を代入して部分積分をすると、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[\left(-U \frac{\partial u}{\partial x} - U' w - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{Ro} v \right) \hat{u} + u \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right. \\
& \quad + \left(-U \frac{\partial v}{\partial x} - V' w + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{Ro} u \right) \hat{v} + v \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \\
& \quad + \left(-U \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - g \rho \right) \hat{w} + w \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \\
& \quad \left. + A \left(-U \frac{\partial \rho}{\partial x} - \bar{\rho}_z w + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) \hat{\rho} + A \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right] dx dy dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[\left(U u \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - U' w \hat{u} + p \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{Re} u \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} u \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{Ro} v \hat{u} + u \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) \right. \\
& \quad + \left(U v \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - V' w \hat{v} + \frac{1}{Re} v \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} v \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} - \frac{1}{Ro} u \hat{v} + v \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right) \\
& \quad + \left(U w \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + p \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \frac{1}{Re} w \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} w \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} - g \hat{w} \rho + w \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \right) \\
& \quad \left. + \left(A U \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} - A \bar{\rho}_z w \hat{\rho} + A \frac{1}{Re} \rho \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \rho \frac{\partial^2 (A \hat{\rho})}{\partial z^2} + A \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right) \right] dx dy dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[u \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{1}{Ro} \hat{v} \right) \right. \\
& \quad + v \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + \frac{1}{Ro} \hat{u} \right) \\
& \quad + w \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} - U' \hat{u} - V' \hat{v} + U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} - A \bar{\rho}_z \hat{\rho} \right) \\
& \quad + \rho \left(A \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - g \hat{w} + A U \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + A \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 (A \hat{\rho})}{\partial z^2} \right) \\
& \quad \left. + p \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right) \right] dx dy dz = 0 \tag{A.23}
\end{aligned}$$

というように変形される。

ここで (A.19) を満たすという条件があるため未定乗数として $\hat{p}$ を用いると,

$$\frac{1}{2} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \hat{p} \times (\text{式 (A.19) の左辺}) dy dz + (\text{式 (A.23) の左辺}) = 0 \tag{A.24}$$

が恒等的に成り立つ．したがって随伴方程式は

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{Ro} \hat{v} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = -U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} - \frac{1}{Ro} \hat{u} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = U' \hat{u} + V' \hat{v} - U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + A \bar{\rho}_z \hat{\rho} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -U \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} - \frac{1}{Re} A^{-1} \frac{\partial^2 (A \hat{\rho})}{\partial z^2} + A^{-1} g \hat{w} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.29})$$

として得られる．この方程式に正弦波型解を代入すると，(3.50)-(3.54) が得られる．

参考文献

- P.G. Baines and H. Mitsudera. On the mechanism of shear flow instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 276:327–342, 1994.
- N.A. Bakas, P.J. Ioannou, and G.E. Kefaliakos. The emergence of coherent structures in stratified shear flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 58(18):2790–2806, 2001.
- J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover publications, 2001.
- L. Brandt and H.C. de Lange. Streak interactions and breakdown in boundary layer flows. *Physics of fluids*, 20:024107, 2008.
- R.A. Brown. On the inflection point instability of a stratified ekman boundary layer. *Journal of Atmospheric Sciences*, 29:850–859, 1972.
- K. Butler and B. Farrell. Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow. *Physics of Fluids A*, 5(3):774–777, 1993.
- W.O. Criminale and G.F. Spooner. Maintenance of oscillations in a turbulent ekman layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 21(4):407–421, 1981.
- J.J. Dongarra, B. Straughan, and D.W. Walker. Chebyshev tau-qz algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems. *Applied Numerical Mathematics*, 22(4):399–434, 1996.
- P. Drobinski and R.C. Foster. On the origin of near-surface streaks in the neutrally-stratified planetary boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 108(2):247–256, 2003.
- P. Drobinski, P. Carlotti, R.K. Newsom, R.M. Banta, R.C. Foster, and J.L. Redelsperger. The structure of the near-neutral atmospheric surface layer. *Journal of the atmospheric sciences*, 61(6):699–714, 2004.
- P. Drobinski, P. Carlotti, J.L. Redelsperger, V. Masson, R.M. Banta, and R.K. Newsom. Numerical and experimental investigation of the neutral atmospheric surface layer. *Journal of the atmospheric sciences*, 64(1):137–156, 2007.

- T. Dubos, P. Drobinski, and P. Carlotti. Turbulence anisotropy carried by streaks in the neutral atmospheric surface layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(8):2631–2645, 2008.
- D.R. Durran. *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*, volume 32. Springer Verlag, 1999.
- M.A. Estoque. Numerical modeling of the planetary boundary layer. In *Workshop on Micrometeorology*, pages 217–270. Amer. Meteor. Soc, 1973.
- D. Etling and RA Brown. Roll vortices in the planetary boundary layer: A review. *Boundary-Layer Meteorology*, 65(3):215–248, 1993.
- D. Etling and F. Wippermann. On the instability of a planetary boundary layer with Rossby-number similarity. *Boundary-Layer Meteorology*, 9(3):341–360, 1975.
- B. Farrell. Optimal excitation of baroclinic waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 46(9):1193–1206, 1989.
- B.F. Farrell and A.M. Moore. An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *J. Phys. Oceanogr*, 22(4):338–349, 1992.
- R.C. Foster. Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 333:97–123, 1997.
- R.C. Foster, F. Vianey, P. Drobinski, and P. Carlotti. Near-surface coherent structures and the vertical momentum flux in a large-eddy simulation of the neutrally-stratified boundary layer. *Boundary-layer meteorology*, 120(2):229–255, 2006.
- C.E. Grosch and H. Salwen. The continuous spectrum of the orr-sommerfeld equation. part 1. the spectrum and the eigenfunctions. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(01):33–54, 1978.
- H. Iwai, S. Ishii, N. Tsunematsu, K. Mizutani, Y. Murayama, T. Itabe, I. Yamada, N. Matayoshi, D. Matsushima, S. Weiming, et al. Dual-doppler lidar observation of horizontal convective rolls and near-surface streaks. *Geophysical Research Letters*, 35(14):L14808, 2008.
- J. Jimenez and P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 225(213-240), 1991.
- J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177(1):133–166, 1987.
- D.K. Lilly. On the instability of Ekman boundary flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 23(5):481–494, 1966.

- C.L. Lin, J.C. McWilliams, C.H. Moeng, and P.P. Sullivan. Coherent structures and dynamics in a neutrally stratified planetary boundary layer flow. *Physics of Fluids*, 8: 2626, 1996.
- C.L. Lin, C.H. Moeng, P.P. Sullivan, and J.C. McWilliams. The effect of surface roughness on flow structures in a neutrally stratified planetary boundary layer flow. *Physics of Fluids*, 9(11):3235–3249, 1997.
- N.L. Miles and J. Verlinde. Observations of transient linear organization and nonlinear scale interactions in lake-effect clouds. part ii: Nonlinear scale interactions. *Monthly weather review*, 133(3):692–706, 2005.
- C.H. Moeng. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41(13):2052–2062, 1984.
- C.H. Moeng and J.C. Wyngaard. Spectral analysis of large-eddy simulations of the convective boundary layer. *Journal of Atmospheric Sciences*, 45:3573–3587, 1988.
- R. Newsom, R. Calhoun, D. Ligon, and J. Allwine. Linearly organized turbulence structures observed over a suburban area by dual-doppler lidar. *Boundary-layer meteorology*, 127(1):111–130, 2008.
- W.M.F. Orr. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, volume 27, pages 9–68. JSTOR, 1907.
- S.A. Orszag. On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components. *Journal of Atmospheric Sciences*, 28:1074–1074, 1971.
- S.K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):601–639, 1991.
- P.J. Schmid and D.S. Henningson. Optimal energy density growth in hagen-poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 277:197–226, 1994.
- W.D. Smyth. Kelvin–helmholtz billow evolution from a localized source. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130(603):2753–2766, 2004.
- W.D. Smyth and W.R. Peltier. The transition between kelvin-helmholtz and holmboe instability: An investigation of the overreflection hypothesis. *Journal of Atmospheric Sciences*, 46:3698–3698, 1989.
- R.B. Stull. *An introduction to boundary layer meteorology*, volume 13. Springer, 1988.
- J.C. Wyngaard. Toward numerical modeling in the Terra Incognita. *Journal of the atmospheric sciences*, 61(14):1816–1826, 2004.

- 飯塚 悟・近藤 裕昭: LES の基礎, 気象研究ノート, 219:1–20, 2008.
- 石岡 圭一: 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, 2004.
- 木田 重雄・柳瀬 眞一郎: 「乱流力学」, 朝倉書店, 1999.
- 木田 重雄: 不安定周期運動による乱流解析, ながれ, 23:319–327, 2004.
- 新谷 賢司・河村 洋: DNS によるエクマン境界層における乱流構造の研究 (流体力学, 流体機械), 日本機械学会論文集, 69(687):2416–2423, 2003.
- 藤吉 康志・山下 和也・藤原 忠誠・中西 幹郎: 雲科学と LES ードップラーライダーを用いた大気の流れの観測ー, 気象研究ノート, 219:141–165, 2008.
- 山根省三: 摂動の線型発展の理論, 気象研究ノート, 201:21–71, 2002.