

非整数階微分による表面波の記述

— 主として深水重力波について

筑波大・構造成 松内 一雄 (Kazuo Matsuuchi)

1. はじめに

無限に深い水面を伝搬する有限振幅の重力波の研究は、Stokes による定常波列⁽¹⁾を始めとして、四つの波の共鳴相互作用⁽²⁾・⁽³⁾、また、この相互作用の特別な場合としての定常波列の不安定⁽⁴⁾等、があり数多くの興味ある結果が得られている。しかし、いずれの場合にも、時間的に波形の変化しない波、数個の単色波、単色波に近い波、等限られた条件下の波についての解析である。浅水重力波の場合には K-dV 方程式と呼ばれている単一の方程式で記述できる。このため解析は容易で、興味ある多くの結果が得られている。もし、深水を伝搬する波についてもこのような単一の方程式を求めることができれば、容易に興味ある多くの結果が得られるはずである。この論文では、弱い非線形の仮定のもとで一般的な波形を持つ波の変形を記述する単一の方程式の導出を試みる。

任意の波形の時間発展を正しく知るには、波と波との相互

作用のメカニズムを理解する必要がある。これまで、風波の問題を始めとして、多くの波と波の干渉の問題は四つの波の共鳴相互作用が本質的であると考えられ、この相互作用をもとに議論されてきた⁽⁵⁾・⁽⁶⁾。この非線形効果は分散関係式を満たす四つの波による三次の非線形による相互作用である。

しかし、非線形効果はまず最低次の非線形である二次の非線形によるものより始まると考えられる。この二次の非線形相互作用のみを考慮し自由表面を支配する方程式を導いた。この方程式は最も簡単な解として Stokes による定常波列を含む。この方程式は単一の方程式ではあるが非整数階の微分を含む方程式となり解析的に一般解を求めるのは困難であるが、深さ方向の変化は自由表面の変化に取り込んでいるため、数値的に解を求めるのは容易である。

ここでは、計算例として、最も簡単な2成分打ち切り近似による結果を示す。

2. 方程式の導出

非圧縮非粘性渦無し流れを仮定する。速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ はラプラスの式で記述される。自由表面 $z = \zeta(x, t)$ における境界条件は、通常の運動学的な条件と圧力一定の二つの関係で与えられているとする。また、無限に深い場合を

考え、 $z \rightarrow -\infty$ で速度が発散しないとする。代表長さを L 、代表速度を $\sqrt{gL}$ とする無次元化を行なう。波の振幅は小さいが有限と考える。この非線形を目安を与える微小パラメータを ε として、従属変数 $\phi(x, z, t)$ 、 $\zeta(x, t)$ を次のように ε -展開する。

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x, z, t), \quad \zeta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \zeta_n(x, t). \quad (1)$$

上式を運動方程式と境界条件に代入して ε のべきで整理する。

まず、 ε^1 のオーダーの問題を考える。波数 k 振動数 ω の単色波、すなわち、

$$\zeta_1(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)} \quad (2)$$

を与える解は

$$\phi_1(x, z, t) = -ia\omega/k \cdot e^{kz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

と書ける。ただし、波数と振動数の間には

$$\omega = |k|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} k \quad (4)$$

の関係がある。ここで、 x 軸の正方向へ伝わる波だけを考えている。また、波数 k は負の値まで拡張している。任意の波形の波は(2)式を波数 k について全波数にわたって積分することによって得られる。すなわち、

$$\zeta_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (5)$$

速度ポテンシャルに対しては(5)式と同様に(3)式を積分することによって求めることができる。(5)式を時間で微分し、(4)の関係を使うと

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} i|k|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} k a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = 0, \quad (6)$$

が得られる。この式をより一般的な形に変形するために、次の Fourier 変換の関係を利用する。すなわち、 $f(x)$ の Fourier 変換を

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (7)$$

で定義すると、畳込みの定理を用いて容易に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) |k|^{-\beta-1} e^{ikx} dk = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2}(\beta+1)} (I^{\beta+1} + K^{\beta+1}) f(x), \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) |k|^{-\beta-1} \operatorname{sgn} k e^{ikx} dk = \frac{-1}{2i \sin \frac{\pi}{2}(\beta+1)} (I^{\beta+1} - K^{\beta+1}) f(x), \quad (9)$$

を得ることができる。ただし、ここでの Fourier 変換は超関数にまで拡張された意味で用いている⁽⁷⁾。上式のオペレータ

I, K は

$$I^{\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^x f(x') (x-x')^{\lambda-1} dx', \quad (10)$$

$$K^{\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^{\infty} f(x') (x'-x)^{\lambda-1} dx', \quad (11)$$

で定義され、それぞれ、Riemann-Liouville の λ 階積分、Weyl の λ 階積分と呼ばれているものである^{(8), (9)}。(9)式を用いると(6)式は容易に

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{2}} (I^{-\frac{1}{2}} - K^{-\frac{1}{2}}) \zeta_1 = 0, \quad (12)$$

と書くことができる。

つぎに、 $O(\varepsilon^2)$ の問題に移る。同様な手続きにより、 ζ_2 に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + I^{-1/2} K^{-1/2} \zeta_2 = & -\frac{1}{2} I^{-1/2} K^{-1/2} \{ (I^{-1/2} \zeta_1)^2 + (K^{-1/2} \zeta_1)^2 - 2 I^{-1/2} K^{-1/2} \zeta_1 \cdot \zeta_1 \} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta_1^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ (I^{-1/2} \zeta_1)^2 - (K^{-1/2} \zeta_1)^2 \}, \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。左辺のオペレータ $\partial^2 / \partial t^2 + I^{-1/2} K^{-1/2}$ は波が x 軸の両方向に伝搬するとした場合のオペレータに対応している。すなわち、 x の正方向に伝搬する波を記述する (12) の方程式は波が両方向に伝搬するとなると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{E}_+ \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{E}_- \right) \zeta_1 = 0, \quad (14)$$

と拡張される。ただし、

$$\mathcal{E}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (I^{-1/2} - K^{-1/2}). \quad (15)$$

この式はまた、

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + I^{-1/2} K^{-1/2} \zeta_1 = 0, \quad (16)$$

とも書ける。(13)、(16) 式より、 $\zeta(x, t) = \varepsilon \zeta_1(x, t) +$

$\varepsilon^2 \xi_2(x, t) + O(\varepsilon^3)$ を満足する方程式は、

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_+\right) \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_-\right) \xi = N \xi + O(\varepsilon^3) \quad (17)$$

と書くことができる。ただし、 N は (13) 式の右辺にかかる非線形のオペレータである。

3. 級数展開による解法

特殊な例を除いて、複雑な (20) 式の解を解析的に求めることは不可能である。そこで、周期が 2π となる周期境界条件のもとで数値的に解を求めることを考える。これは、無次元化に用いた代表長さ L を $\lambda_{\max}/2\pi$ ととることに対応する。ただし、 $\lambda_{\max}$ は最大波長である。この周期境界条件をみたす解を

$$\zeta(x, t) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(t) e^{in\lambda} \quad (X_{-n} = X_n^*), \quad (18)$$

と級数に展開すると、 $X_n(t)$ に対する方程式は任意の正の n に対して

$$\frac{d^2 X_n}{dt^2} + \eta X_n = \epsilon B_n, \quad (19)$$

と書ける。ただし、

$$B_n = -\eta \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (\sqrt{|\ell|/|n-\ell|} - 1) X_\ell X_{n-\ell} - \frac{\eta^2}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_\ell X_{n-\ell}. \quad (20)$$

ここで、非線形項を

$$N\zeta(x,t) = -I^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \{ (I^{-\frac{1}{2}} + K^{-\frac{1}{2}}) \zeta \}^2 - I^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \zeta \cdot \zeta \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial x^2}, \quad (21)$$

としても同じ(20)式になることに注意する。式(20)の形から分かるように、非線形相互作用は低波数から高波数までおよんでいる。

3-1 2成分打ち切り近似

(19)式は任意の波形の時間発展を記述するが、この論文では相互作用を2成分に限り議論する。(19)式より、 X_1 、 X_2 に対して、

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} + X_i = -2(\sqrt{2} - 1) \epsilon X_2 X_i^*, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 X_2}{dt^2} + 2 X_2 = -2 \epsilon X_1^2, \quad (23)$$

を得る。

まず、この方程式の示す最も簡単な解である振幅の変化しない解である定常波解を求める。このような波を、 A_1 、 A_2 を複素定数とし、

$$X_1 = A_1 e^{-i\omega t}, \quad X_2 = A_2 e^{-2i\omega t}, \quad (24)$$

と置いて求めると、自由表面を表わす $\zeta(x, t)$ は

$$\zeta(x, t) = \epsilon A_1 e^{i(x-t)} + \epsilon^2 A_1^2 e^{2i(x-t)} + \text{C.C.}, \quad (25)$$

と書くことができる。ここで、C.C.は前者の複素数に対する共役複素数を意味する。この式は Stokes が求めた定常波解に一致し、谷がなだらかく、峰が急峻になる重力波特有の形を示している。

次に、高調波を伴わない単色波の時間発展を考える。初期波形が $\cos x$ で表わされる最も単純な波形から出発する波の変形の計算である。Stokes が求めた定常波列は長波長攪乱により不安定を引き起こし、振幅変調を起こすことが知られてい

る。これは四波の共鳴相互作用によるもので、次のオーダーの非線形（3次）により引き起こされる不安定である。したがって、この種の不安定は現在の近似の枠外にある。最低次の非線形のもとで一つの Fourier 成分がどのような変化を受けるかを知るとは、非線形の基本的な役割を知る上で重要である。また、上で述べた Stokes 波との関連のもとで興味がある。

まず、(22)、(24)を Runge-Kutta 法により数値的に解いた結果を示す。初期条件として

$$X_1(0) = (.5, 0), X_2(0) = (0, 0)$$

と選んだ。また、 $\dot{X}_1(0)$ 、 $\dot{X}_2(0)$ は x 軸の正方向に伝搬するとした線形の関係 (12) 式より求めた。

3 - 2 計算結果

まず、図 1 に $t=0$ における初期波形と、 $t_1=5.15$ 、 $t_2=10.81$ の二つの時刻における波形を示す。初期波形 $\cos x$ は非線形効果により高調波を生成しつつたちを起こしながら次第に変形するがこの高周波成分の増大が止まったところでほぼ対称の波形になる（時刻 $t=t_1$ ）。この波形は、Stokes が示した波 ((25) 式参照) と同様谷が広く山が急峻となる重力波特有の波形であるが、その変形の度合は (25) 式で示されるよりも大きい。さらに時間が経過すると ($t=t_2$)、一見したところでは初期

波形に近くなる。これ以降の時間発展は、上で述べたことの繰り返しである。

図 2 に高調波 $X_2 (= a_2 + i b_2)$ の時間変化を示す。時刻 t_1 でこの高調波のエネルギーはほぼ最大になり、時刻 t_2 で高調波は消える。初期波形に戻る t_2 以外では a_2 と b_2 の位相関係は Stokes 波の位相関係に等しい。 t_2 ではこの関係が崩れていることが分かる。さらにこの関係を詳しくみるために、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、二倍の高調波の山（実線）と谷（破線）の時間変化を図 3 に示す。このグラフから次のことが分かる。

1. 初期波形に戻る時刻で、逆走波が生じている。
2. 逆走波が生じていないところではほぼ一定の速度で伝搬している。この速度は Stokes 波の速度 ($=1$) よりも遅く、高調波の線形位相速度 ($=1/\sqrt{2}$) よりも速い。

逆走波の存在については、高調波の振幅がある一定値よりも小的时候、その可能性が示せる。高調波の波の速度は基本波が変形しないとすれば、容易に (22)、(23) から

$$(3 + \sqrt{3}) / 6$$

と導くことができる。図 3 にはこの速度も描いてある。

参考文献

- (1) G.G.Stokes: "On the theory of oscillatory waves",

Trans. Camb. Phil. Soc. 8(1847) 441.

(2) D.J. Benney: "Non-linear Gravity Wave Interactions",
J. Fluid Mech. 14(1962) 577.

(3) O.M. Phillips: Nonlinear Waves, ed. S. Leibovich &
A.R. Seebass (Cornell Univ. Press, Ithaca) 1974, p.186.

(4) T.B. Benjamin and J.E. Feir: "The disintegration of
wave trains on deep water", J. Fluid Mech., 27(1967), 417.

(5) O.M. Phillips: The Dynamics of the Upper Ocean,
2nd ed., Chap. 4 (Cambridge Univ., Cambridge) 1977.

(6) O.M. Phillips: "Spectral and statistical properties
of the equilibrium range in wind-generated gravity
waves", J. Fluid Mech. 156(1985) 505.

(7) M.J. Lighthill: An Introduction to Fourier Analysis
and Generalized Functions, (Cambridge Univ. Press,
1964), p. 43.

(8) W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi: Tables
of Integral Transforms, Vol. 2, ed. A. Erdelyi (McGraw-
Hill, 1954).

(9) 杉本信正: 非整数階微分・積分とその応用、ながれ 4(19
85) 110.

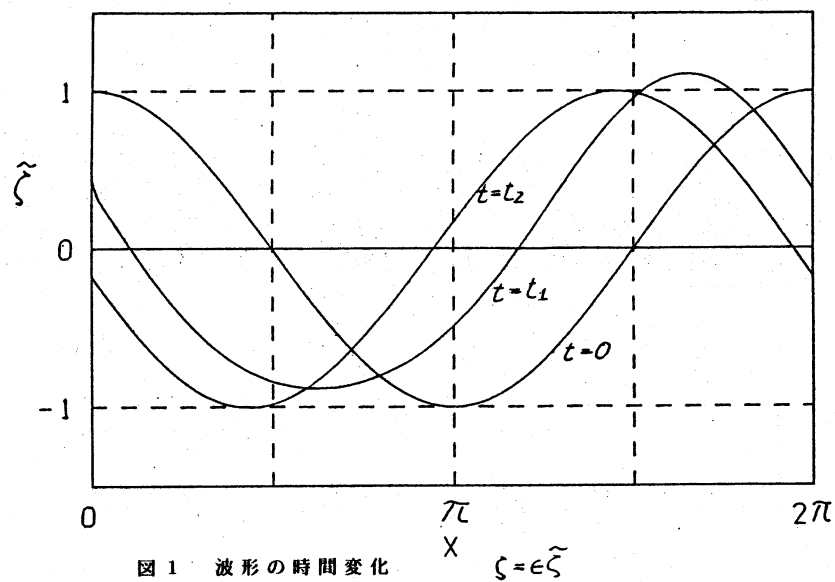


図1 波形の時間変化

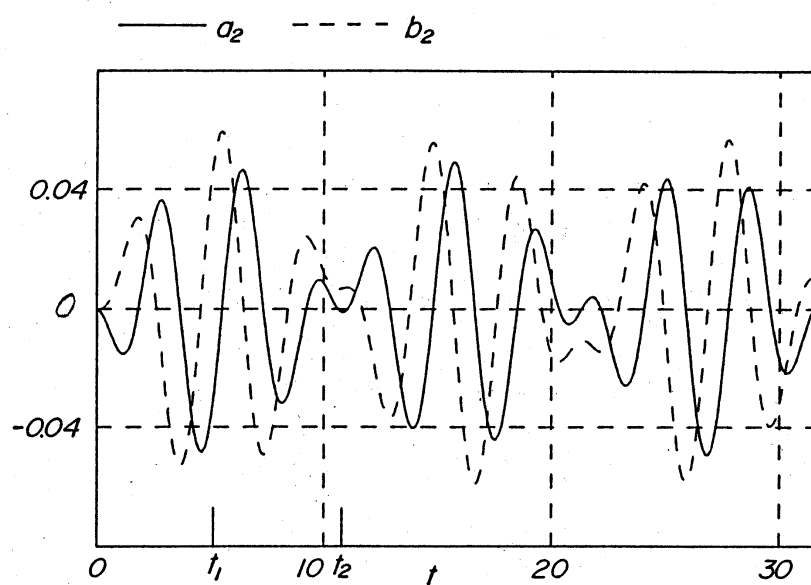
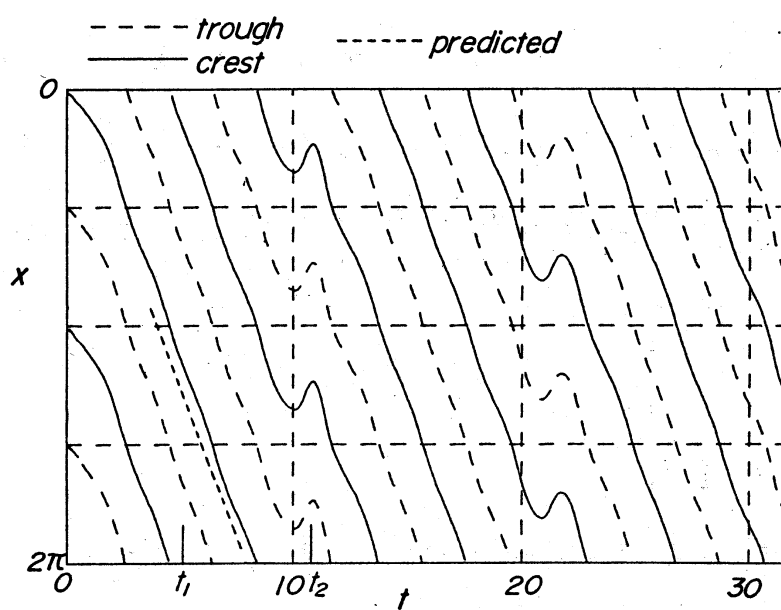


図2 高調波の時間変化

図3 x - t 平面に於ける高調波の山と谷