

commutation theorem をめぐるいくつかの話題

山形大 理 富山 淳

§1. まえがき. N_1, N_2 をヒルベルト空間 H_1, H_2 上の von Neumann 環とし, そのテンソル積を $N_1 \otimes N_2$ とかくことにする. この時一般に commutation theorem と言われている次の関係

$$(N_1 \otimes N_2)' = N_1' \bar{\otimes} N_2'$$

が成立する. この結果は富田-竹崎理論の帰結として富田によって初めて一般的に証明されて以来種々な単純化又は一般化が試みられている. ここで述べようとするべくと異つた slice map によるこの定理の解釈をとりあげる. この形により定理は各種のテンソル積における固有な問題を統一的に含むことになる. この講演はすなわち中で2つの場合をとりあげて考えてみることにする.

§2. von Neumann 環の commutation theorem の変形

M_1, M_2 を von Neumann 環, N_1, N_2 をその von Neumann 部分環とする。このとき $N_1 \otimes N_2$ は $M_1 \otimes M_2$ の部分環と見做される。今 φ を M_1 上の σ -weakly 連続な汎関数としたとき $M_1 \otimes M_2$ より M_2 への右 slice map R_φ を

$$R_\varphi(a \otimes b) = \langle a, \varphi \rangle b$$

で定義する。 R_φ は σ -位相で連続な線形写像である。([8], [9] 等) 同様に M_2 上の σ -weakly continuous な汎関数 ψ に対しては左 slice map

$$L_\psi : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_1 \quad L_\psi(a \otimes b) = \langle b, \psi \rangle a$$

が定義出来る。これらの写像は次の性質をもっている

$$(1) \quad R_\varphi((1 \otimes a) x (1 \otimes b)) = a R_\varphi(x) b \quad a, b \in M_2$$

$$L_\psi((c \otimes 1) x (d \otimes 1)) = c L_\psi(x) d \quad c, d \in M_1$$

$$(2) \quad \langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

$$x \in M_1 \otimes M_2.$$

(3) $\{R_\varphi \mid \varphi \in M_{1*}\}, \{L_\psi \mid \psi \in M_{2*}\}$ は共に $M_1 \otimes M_2$ 上で total である。即ち

$$R_\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in M_{1*} \quad \text{ならば} \quad x = 0.$$

M_1, M_2 が空間 H_1, H_2 に作用しているとし、夫々の上の有界線型作用素をつくる von Neumann 環を $B(H_1), B(H_2)$ とし

$B(H_1) \otimes B(H_2)$ と見做ると、 $\varphi \in M_{1*}$ の $B(H_1)$ 上への σ -weakly 連続な汎関数としての拡大を $\hat{\varphi}$ とすれば、slice map $R_{\hat{\varphi}}$ の

$M_1 \otimes M_2$ への制限は R_φ にほかならない。

$$\mathcal{K}(M_1, N_2) = \{x \in M_1 \otimes M_2 \mid R_\varphi(x) \in N_2, L_\psi(x) \in N_1, \\ \varphi \in M_{1*}, \psi \in M_{2*}\}$$

と置く。次の結果は commutation theorem のオーソ変形である。([8], [6])

定理 2.1 (W^* -slice map の定理)

$$\mathcal{K}(N_1, N_2) = N_1 \otimes N_2.$$

この結果は $M_1 = B(H_1)$, $M_2 = B(H_2)$ の時は slice map の前述の性質からわかるように

$$\mathcal{K}(N_1, N_2) = (N_1' \otimes N_2')'$$

とすることが、実は commutation theorem と同値な命題になっている。テンソル積の問題は上の定理の形になることが多い。

さて $M_1 \otimes M_2$ の σ -位相で連続な汎関数の全体, predual はよく知られているように M_1, M_2 の predual M_{1*}, M_{2*} の汎関数のノルムでつなぐテンソル積 $M_{1*} \otimes M_{2*}$ と一致する。 $M_{1*} \otimes M_{2*}$ を代数的なテンソル積の部分とする。 $(N_1 \otimes N_2)_*$ の元はノルムを保存して $(M_1 \otimes M_2)_*$ の元にまで拡大出来るわけであるが代数的なテンソル積に限ると、上の結果から次のことが成立する。

定理 2.2 $R > 1$ を固定する。この時任意の汎関数

$$\omega \in M_{1*} \otimes M_{2*} \text{ は } M_{1*} \otimes M_{2*} \text{ 内への拡大 } \hat{\omega}, \|\hat{\omega}\| \leq R \|\omega\|$$

をもちふ。

証明は定理 2.1 から $M_{1*} \ominus N_2^0 + N_1^0 \ominus M_{2*}$ が $M_{1*} \otimes M_{2*}$ での $N_1 \bar{\otimes} N_2$ の polar $(N_1 \bar{\otimes} N_2)^0$ の中で 1 ル 4 dense なることがきえるから、はじめに ω の 1 ル 4 を保存した拡大 $\tilde{\omega}$ と $M_{1*} \otimes M_{2*}$ への任意の拡大 $\tilde{\omega}'$ をとり $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' \in (N_1 \bar{\otimes} N_2)^0$ の形を上のことと調整すればよい。

上の結果は又 commutation theorem のオニの変形で、この定理から commutation theorem を与えるべくすることも出来る。すなわちには決り $\tilde{\varphi}, \hat{\varphi} \in \varphi \in N_{1*}$ の M_1 への拡大, $\tilde{\varphi}, \hat{\varphi} \in \varphi \in N_{2*}$ の M_2 への拡大とすると、 $x \in \mathcal{K}(N_1, N_2)$ について

$$\begin{aligned} \langle x, \hat{\varphi} \otimes \hat{\varphi} \rangle &= \langle R_{\hat{\varphi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle R_{\hat{\varphi}}(x), \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle L_{\tilde{\varphi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle L_{\tilde{\varphi}}(x), \tilde{\varphi} \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

即ち、 $\varphi \otimes \varphi$ は $\mathcal{K}(N_1, N_2)$ 上では product functional としての拡大は一意である。よって又 $M_{1*} \otimes M_{2*}$ の元の形としての拡大も一意になる。従って任意の $\omega \in N_{1*} \ominus N_{2*}$ について ω の拡大 $\hat{\omega} | \mathcal{K}(N_1, N_2)$ ($\hat{\omega} \in M_{1*} \otimes M_{2*}$) は一意である。これから今上の $\hat{\omega}$ を $\|\hat{\omega}\| \leq h \|\omega\|$ ととりうとすると、 $\mathcal{K}(N_1, N_2)$ の元は

$$\begin{aligned} \omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \varphi_i \in N_{1*} \ominus N_{2*} &\longrightarrow \hat{\omega} = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes \tau_j \in M_{1*} \otimes M_{2*} \\ \longrightarrow \langle x, \hat{\omega} \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle x, \sigma_j \otimes \tau_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, \hat{\varphi}_i \otimes \hat{\varphi}_i \rangle \end{aligned}$$

によつて $N_{1*} \otimes N_{2*}$ 上の有界線型汎関数を定義する。よつて

$N_1 \otimes N_2$ の元 y が あつて

$$\langle x, \hat{\omega} \rangle = \langle y, \omega \rangle \quad \forall \omega \in N_{1*} \otimes N_{2*}$$

これから $x = y \in N_1 \otimes N_2$ で定理 2.1 が 得られる。

定理 2.2 は Wassermann [16] による。上のようぢなは特別な
 とき、例えば $N_1, N_2 \subseteq M_1, M_2$ が normal な $\text{I} \oplus \text{I}$ の射
 影写像があるとき $k=1$ としてとることが出来るが一般
 には無理である。

以下に commutation theorem をもう少し一般的に考へよう
 とする。これは定理 2.1 の形である。

§3. von Neumann 環の C^* -テンソル積の場合。前節と
 同じ設定で (spacial な) C^* -テンソル積 $B(H_1) \otimes B(H_2)$ を考
 へる。 $M_1 \otimes M_2$ は $B(H_1) \otimes B(H_2)$ の C^* -部分環である。
 この時 $B(H_1)$ 及び $B(H_2)$ 上の有界線型汎関数 φ, ψ に対して
 それぞれ $\text{I} \oplus \text{I}$ 連続な右, 左の slice map R_φ, L_ψ が定義
 出来る。そして R_φ, L_ψ を $M_1 \otimes M_2$ に制限したものは又 M_1 ,
 M_2 上の汎関数 $\varphi|_{M_1}, \psi|_{M_2}$ による slice map とも考へよう。

定理 2.1 と連関してこの時自然に考へようすることは次の問
 題である。即ち

$$F(M_1, M_2) = \{x \in B(H_1) \otimes B(H_2) \mid R_\varphi(x) \in M_2, L_\psi(x) \in M_1\}$$

$$\{\varphi \in B(H_1)^*, \quad \psi \in B(H_2)^*\}$$

とあるとき $F(M_1, M_2)$ は $M_1 \otimes M_2$ と一致するであろうか?

これについては先ず $F(M_1, M_2)$ が C^* -環であること(実際 commutation theorem から)

$$F(M_1, M_2) = M_1 \bar{\otimes} M_2 \cap B(H_1) \bar{\otimes} B(H_2)$$

とある) や M_1, M_2 が injective な von Neumann 環の時には一致することがわかってゐるが ([9]), 一般にどうなるかわからないうち。しかし次のことが成立つ。

定理 3.1 $F(M_1, M_2)$ は M_1, M_2 の表現空間 H_1, H_2 に依存しない。

証明は富山 [11] にゆずる。

上の問題は結局 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ と $M_1 \otimes M_2$ との違いが一般には両方が一致しないという事以外に現在何もわかっていないことに起因している。 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ のどうえが $M_1 \otimes M_2$ に入っているかもしろい判定条件がみつかわば興味のあることと思われるが以下にその一つの candidate をのべてみる。 M_1 上の通常の有界線型関数 φ をとり、 $x \in M_1 \bar{\otimes} M_2$ を固定すると

$$\langle \varphi, f_{\varphi, x} \rangle = \langle L_{\varphi}(x), \varphi \rangle$$

に φ は M_{2*} 上の有界線型関数 $f_{\varphi, x}$ を定義する。従つて M_2 の元 $R_{\varphi}(x)$ が存在して、任意の $\psi \in M_{2*}$ について

$$\langle L_{\psi}(x), \varphi \rangle = \langle \psi, f_{\varphi, x} \rangle = \langle R_{\varphi}(x), \psi \rangle$$

となる。つくり方から $R_\varphi: x \rightarrow R_\varphi(x)$ は $M_1 \otimes M_2$ 上のノルム連続な slice map の $M_1 \otimes M_2$ への拡大である。この R_φ を一般化した slice map と呼ぶことにする。ここで L^* -汎関数積 $M_1 \otimes M_2$ の元 x に対しては

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

が任意の $\varphi \in M_1^*$, $\psi \in M_2^*$ について成り立つが一般の $M_1 \otimes M_2$ の元に対しては上のつくり方から $\{\varphi \in M_1^*, \psi \in M_{2*}\}$ 又は $\{\varphi \in M_{1*}, \psi \in M_2^*\}$ と二組の組合せの時に成立つことがわかる。もし固定した $\varphi \in M_1^*$ について上のことが任意の $\psi \in M_2^*$ 及び $x \in M_1 \otimes M_2$ について成立つならば φ は一般には σ -weakly continuous になるとしてしる ([9; 定理 5.1])。従って上の等式 (Fubini principle と呼ぶ) は我々の問題に関係が深いと推察されるが上の式を M_1 がたとえ可換の時でも x が $M_1 \otimes M_2$ の元であるとは保証出来ない。従って次の candidate として以下の条件を考へる。

(*) $\varphi \in M_1^* \rightarrow R_\varphi(x) \in M_2$ は、 M_1^* の単位球上で M_1^* に汎弱位相, M_2 にノルム位相を考へたとき連続である。

これは又 x について写像 $\psi \in M_2^* \rightarrow L_\psi(x) \in M_1$ が上のような形で連続である、という事と同値になっている。

命題 3.2. M_1 が type I_n 型の有限和の時 (M_2 は任意である)。(*) の条件は $M_1 \otimes M_2$ の元が $M_1 \otimes M_2$ に入るための判

定条件を与えてゐる。

証明. 先ず M_1 が可換な時は (*) は x が M_1 の character の空間上の M_2 -valued な連続関数をひき起すことを示してゐるから, $M_1 \otimes M_2$ の連続関数環としての characterization から結論が得られる。

次に $M_1 = A \otimes M_n = A \otimes M_n$ (A は可換な von Neumann 環, M_n は $n \times n$ の行列環) の時は, $\{e_{ij}\}$ を M_n の matrix units $\{\varphi_{ij}\}$ とその dual な汎関数の系とする. $t \in A$ の character とすると $R_t(x) \in M_n \otimes M_2$ は M_2 上の matrix $(R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)))$ となる. A_* の単位球は A^* の単位球内で汎弱稠密になつてゐるから ([6; 定理 1]) $\{\varphi_\alpha\} \subset A_*$ を t に弱収束するものにとると, 任意の $\psi \in M_{2*}$ に対して, (*) を使へば

$$\langle R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)), \psi \rangle = \langle R_t(x), \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle = \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x), t \rangle$$

$$= \lim_{\alpha} \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x), \varphi_\alpha \rangle = \lim_{\alpha} \langle x, \varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle$$

$$= \lim_{\alpha} \langle R_{\varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij}}(x), \psi \rangle = \langle R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x), \psi \rangle$$

よつて $t \rightarrow R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x) = R_{\varphi_{ij}}(R_t(x))$ は t についてノルム連続な関数であり, 従つて matrix 関数 $t \rightarrow R_t(x)$ も $M_n \otimes M_2$ -valued なノルム連続関数になる. よつて x は

$M_1 \otimes M_2 = A \otimes (M_n \otimes M_2)$ の元である. M_1 が上の形の環の有限和の時にはこれをすみ重ねればよい. 証明了.

(*) に對しては前に述べた $M_1 \otimes M_2$ から $F(M_1, M_2)$ (以下

M_1, M_2 の $B(H_1) \otimes B(H_2)$ に属する Fubini 積と呼ぶことにする)
 への product functional $\varphi \otimes \psi$ の拡大 $\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi}$ から $F(M_1, M_2)$
 の元について $\varphi \in M_1^* \rightarrow R_\varphi(x)$ (値は φ の拡大 $\hat{\varphi}$ に依
 存しない) が (*) を満たすことがわかってゐる。従つて (*) の
 条件は前の $F(M_1, M_2) = M_1 \otimes M_2$? の問題と密接に關係して
 いるわけである。 $F(M_1, M_2)$ は又次のようを受けとり方も出来
 る。 $M_1 \otimes M_2$ は $M_1 \odot M_2$ の $B(H_1 \otimes H_2)$ での locally convex 位
 相による閉包であつた。この形でラニソル積の他の例は
 multiplier でも考へよう。即ち A, B を一般に単位元をもた
 ない C^* -環としたとき $A \otimes B$ の multiplier $M(A \otimes B)$ はほとん
 どの場合 $M(A) \otimes M(B)$ と一致しないことが知られてゐる ([C])
 がこの状況は $M(A \otimes B)$ が $M(A) \odot M(B)$ の $A \otimes B$ による strict
 Topology による閉包として定義された別種のラニソル積と考
 へれば、同じ閉包である $M(A) \otimes M(B)$ と一致しないのは、
 $M_1 \otimes M_2$ と $M_1 \otimes M_2$ の時と同じく、むしろ当然であると思つて
 可。 $F(M_1, M_2)$ が $M_1 \otimes M_2$ と一般に一致しないのであれば、
 これも又 M_1 と M_2 のラニソル積として考へるべきであることが
 わか。 $M_1 \odot M_2$ の何らかの閉包と考へよう。何かどう分つた
 は何もわかってはいない。

文献は共通文献の項に記載