

$\mathbb{Z}_2$ -作用をもった弱複素多様体の K 理論的性質数について

津田 塾 大

吉 田 朋 好

§ 0. 序

tom Dieck は [10] において、同変コホモロジー環 H_G^* (G はコンパクトリー群) を定義し、 K_G -理論と同様の局所化定理を得た。この報告では、 $G = \mathbb{Z}_2$ の場合に限って、tom Dieck の結果を用いて、Involution をもった弱複素多様体の性質を調べる。最初に、我々は環準同型写像 $\alpha: H_{\mathbb{Z}_2}^* \longrightarrow \text{Inv. Lim. } K(\mathbb{Z}_2)^{\wedge} [[t_1, \dots, t_s]]$ 及びその局所化 $\alpha_L: H_{\mathbb{Z}_2}^* \longrightarrow \text{Inv. Lim. } Q_2 [[t_1, \dots, t_s]]$ を構成する。 $\mathcal{O}_+^U(\mathbb{Z}_2)$ を Involution をもった弱複素多様体のホルディズム環 ([6]) とするとき、 α, α_L の計算により、次の命題を得た。これは § 6 で証明が与えられる。

命題 (0.1) $[M, T] \in \mathcal{O}_+^U(\mathbb{Z}_2)$ とする。 M における、 T の固定点集合の連結成分 F の normal バンドル $\mathcal{N}_F$ は、自然に複素バンドルの構造をもつが、ここで次の二つを仮定

1.)

する。i) 各連結成分 F に対し, $\mathcal{Z}_F$ は trivial ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}_F$ は F による定数 n に等しい。このとき

$$\sum_F [F] \in 2^n \mathcal{O}_+^V$$

であり, $\exists [N], [L] \in \mathcal{O}_+^V$ で次が成り立つ

$$[M, T] = [CP(1), T]^n [N] + [Z_2, \sigma] [L] \quad \text{in } \mathcal{O}_+^V(Z_2)$$

ここに $[CP(1), T]$ は $[z_1, z_2] \mapsto [z_1, -z_2]$ の $\mathbb{Z}_2$ -作用をもつ $CP(1)$ の class, $[Z_2, \sigma]$ は $1 \mapsto -1$ による $\mathbb{Z}_2$ -作用をもつ $\mathbb{Z}_2$ の class をあらわす。

命題 (0.2) $[M, T] \in \mathcal{O}_+^V(Z_2)$ とする。 M の複素多様体のとき、次の式が成り立つ。

$$\sum_i (-1)^i H^{0,i}(-1) = \sum_F \frac{1}{2^{|Z_F|}} \left\langle \text{ch} \sum_k b_k(\overline{\mathcal{Z}}_F) \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{Td}(F), [F] \right\rangle$$

ここに $H^{0,i}$ は $(0,i)$ 型調和型式によって張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 (自然に $R(\mathbb{Z}_2)$ の class を定める), $H^{0,i}(-1)$ は (-1) によるトレースの値を表わす。 b_k は双対 k -理論的特性類, $|Z_F| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}_F$, $\overline{\mathcal{Z}}_F$ は $\mathcal{Z}_F$ の共役バンドルを表わす。

命題 (0.3) $n \in \geq 4$ の偶数とする。 $CP(2)$ の中の代数曲線 $2.)$

線 $\{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{CP}(2) : z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0\}$ に、 $[z_1, z_2, z_3]$
 $\mapsto [z_1, z_2, -z_3]$ によって $\mathbb{Z}_2$ -作用を入れたものを S_n で表
 わし。これの定める $\mathcal{G}_*^U(\mathbb{Z}_2)$ の元を $[S_n, \tau]$ であらわす。
 このとき、

$$[S_n, \tau] = \frac{n}{2} [\mathbb{CP}(1), \tau] - \frac{n(n-2)}{4} [z_2, \sigma]_{\text{in } \mathcal{G}_*^U(\mathbb{Z}_2)} [\mathbb{CP}(1)]$$

となる。

§1. 準備

V_0, V_1 を各々、trivial, non-trivial 1-dim. $\mathbb{Z}_2$ -複素
 ベクトル空間とする。 $k = (k_0, k_1)$ を負でない整数の組とし

$V(k) = V_0^{k_0} \otimes V_1^{k_1}$ とおく。 $V(k)^*$ を $V(k)$ のコンパクト
 化。 $MU_n(\mathbb{Z}_2)$ を $\mathbb{Z}_2$ -同変な Thom スペクトラムとする。 $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}_2}^+$
 を次のように定義する。

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}_2}^{2n} = \text{Dir} \lim_k [V(k)^*, MU_{n+k_0+k_1}(\mathbb{Z}_2)]_{\mathbb{Z}_2}^0$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}_2}^{2n+1} = \text{Dir} \lim_k [V(k)^* \wedge S^1, MU_{n+k_0+k_1+1}(\mathbb{Z}_2)]_{\mathbb{Z}_2}^0$$

ここに、 $[\ , \]_{\mathbb{Z}_2}^0$ は $\mathbb{Z}_2$ -同変ホモトピー-類、 S^1 は $\mathbb{Z}_2$ -trivial
 作用をもった 1-次元 sphere とする。 Equivariant なうめこ
 み定理を用いて、Pontryagin-Thom construction により
 、環準同型 $\varepsilon: \mathcal{G}_*^U(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{Z}_2}^+$ を得る。 ε は単射である。

$\xi \in U_{Z_2}^2$ をバンドル $V_1 \rightarrow B^+$ の $\mathbb{Z}_2$ -同変な 1-dim. Conner-Floyd 類とすれば、 $U_{Z_2}^+$ は、 $i(U_+^V(Z_2))$ の上に ξ によって生成され、 $U_{Z_2}^{\text{odd}} = 0$ である。次に環準同型 $\alpha: U_{Z_2}^+ \rightarrow U^+(BZ_2)$ が次のように構成される。

$$[V(k)^*, MU_{n+k_0+k_1}(Z_2)]_{Z_2}^0 \xrightarrow{\wedge_{Z_2} EZ_2^+}$$

$$[V(k)^* \wedge_{Z_2} EZ_2^+, MU_{n+k_0+k_1}(Z_2) \wedge_{Z_2} EZ_2^+]^0 \xrightarrow{\gamma_+}$$

$$[V(k)^* \wedge_{Z_2} EZ_2^+, MU_{n+k_0+k_1}]^0 \rightarrow U^{2(n+k_0+k_1)}(V(k)^* \wedge_{Z_2} EZ_2) \\ \cong U^{2n}(BZ_2)$$

ここに $\gamma: MU(Z_2) \wedge_{Z_2} EZ_2^+ \rightarrow MU_+$ は、 $U(n)$ -バンドル $EU_+(Z_2) \times_{Z_2} EZ_2 \rightarrow BU_+(Z_2) \times_{Z_2} EZ_2$ の classifying map により Thom Space に誘導される写像をあらわす。

$\{a_i\}$ を Atiyah の意味での K -理論 特性類とする。

$K(BU) = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$. 写像 $\chi: U^+(BZ_2) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}[a_1, \dots], K^*(BZ_2))$ が次のように構成される。
 $x \in U^k(BZ_2)$ とし、 $f: S^{2n-k} BZ_2 \rightarrow MU_n$ によってあらわされるものとする。 $\chi(x)$ を次のように定義する

$$\mathbb{Z}[a_1, \dots] = K(BU) \rightarrow K(BU(n)) \rightarrow K(MU_n)$$

$$\xrightarrow{f_*} K(S^{2n-k} BZ_2) \subseteq K^k(BZ_2)$$

$K(BU)$ の coalgebra 構造により、 $\text{Hom}(\mathbb{Z}[a_1, \dots], K^*(BZ_2))$ は環をなし、 χ は環準同型となる。さらに

命題 (1,1) (~~Dieck~~ tom Dieck) α, χ は単射である。

§ 2. 重の定義

$K(Z_2)$ を Z_2 の表現環、 $\varepsilon: K(Z_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ を augmentation とする、 $I(Z_2) = \ker \varepsilon$ とおく。 $\text{Inv. Lim.}_s K(Z_2)/I(Z_2)^n$ を $K(Z_2)^\wedge$ により表わせば、Atiyah [3] により、 $K^0(BZ_2) \cong K(Z_2)^\wedge$ 。

$t_1, t_2, \dots$ を不定元の無限列とし、 $A_s = \prod_{i=1}^s (1 + a_i t_i + a_i^2 t_i^2 + \dots) \in K(BU)[[t_1, \dots, t_s]]$ とおく。 $t_s = 0$ とするこ
とにより、 $f_s: K(BU)[[t_1, \dots, t_s]] \rightarrow K(BU)[[t_1, \dots, t_{s-1}]]$
を得るが、 $f_s(A_s) = A_{s-1}$ であるから、 $\{A_s\}$ は Inv. Lim_s
 $K(BU)[[t_1, \dots, t_s]]$ の元 A を定める。 $\omega(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_s)$ を
 $t_1^{\bar{i}_1} \cdots t_s^{\bar{i}_s}$ を含む最小の対称式の inverse limit とすると
き、 $A = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_s} \omega(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_s)$ となる。

$x \in U_{Z_2}^*$ とするとき、 $(\chi \alpha(x))(a_{i_1} \cdots a_{i_s}) \in K^+(BZ_2)$
であるが、 $U_{Z_2}^{\text{odd}} = 0$ と Bott の周期性定理により、
 $\chi \alpha(x)(a_{i_1} \cdots a_{i_s})$ は $K^0(BZ_2) \cong K(Z_2)^\wedge$ の元と考えら
れる。さて、環準同型 $\Phi: U_{Z_2}^* \rightarrow \text{Inv. Lim}_s K(Z_2)^\wedge[[t_1, \dots, t_s]]$
を次の式で定義する。

$$\Phi(x) = \sum (\chi \alpha(x))(a_{i_1} \cdots a_{i_s}) \omega(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_s)$$

Φ が環準同型であることは $K(BV)$ の co-algebra 構造による。

命題 (2.1) 各整数 n に対し $\Phi^n: U_{Z_2}^n \longrightarrow \text{Inv Lim. } K(Z_2)^\wedge [[t_1, \dots, t_s]]$ は injective である。

証明. $\{a_i, \dots, a_{i_s}\}$ は $K(BV)$ の module base であるから、 X, α の injectivity により明らかである。

§3. Φ の $\mathcal{U}_+^V(Z_2)$ への制限.

X をコンパクト Z_2 -空間 とするとき $K_{Z_2}(X)$ に、non-equivariant な場合と同様に exterior power operation λ^i が定義される。 t を不定元とし、 $\lambda_t = \sum_{i=0}^\infty \lambda^i t^i$ とおく。 $\varepsilon_0: K_{Z_2}(X) \longrightarrow K(Z_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ とし、 $a_i^{Z_2}: K_{Z_2}(X) \longrightarrow K_{Z_2}(X)$ を $\sum_{i=0}^\infty a_i^{Z_2}(X) t^i = \lambda_{t/(1-t)}(X - \varepsilon_0(X))$ で定義する。

さらに、 $\{a_i^{Z_2}\}$ の双対作用素 $\{b_i^{Z_2}\}$ を

$$(1 + a_1^{Z_2}t + a_2^{Z_2}t^2 + \dots)^{-1} = 1 + b_1^{Z_2}t + b_2^{Z_2}t^2 + \dots$$

により定義する。

さて、 $[M, T] \in \mathcal{U}_+^V(Z_2)$ とし、 $p_! : K_{Z_2}(M) \longrightarrow K(Z_2)$ を K 理論 Gysin 準同型とす。ここに $p: M \longrightarrow pt$ は collapsing map

補題 (3.1)

$$\Phi([M, T]) = \sum p_i((b_{i_1}^{z_2} \cdots b_{i_s}^{z_2})(\tau_M)) \omega(i_1, \dots, i_s)$$

ここに、 τ_M は M の stable tangent バンドル。

$$(b_{i_1}^{z_2} \cdots b_{i_s}^{z_2})(\tau_M) = b_{i_1}^{z_2}(\tau_M) \cdots b_{i_s}^{z_2}(\tau_M)$$

証明 略

命題 (3.2) $[M, T] \in \mathcal{U}_+^0(\mathbb{Z}_2)$ 、 M を複素多様体とするとき、 $\Phi([M, T])$ の第 i 項 $= \sum (-1)^i H^{0,i}$ 。

証明 $\Phi([M, T])$ の第 i 項は $p_i(1)$ に等しい (上の補題)。因式

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}_2}(M) & \xrightarrow{p_i} & R(\mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \varphi_M & & \parallel \\ K_{\mathbb{Z}_2}(\tau_M) & \xrightarrow{\tilde{p}_i} & R(\mathbb{Z}_2) \end{array}$$

(φ_M は K -理論 Thom 同型) により、 ~~$\#(1) \neq \#(1)$~~

$p_i(1) = \tilde{p}_i(1, \tau_M)$ ($1, \tau_M$ は τ_M の K 理論 Thom 類)

Equivariant な Atiyah-Singer 指数定理 により、[4])

これは、 $\sum (-1)^i H^{0,i}$ に等しい。

Q.E.D.

§4. Φ の計算.

補題 (3.1) を用いて 次の三つの場合について Φ を計算する。i) $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}_2}^2$, ii) trivial $\mathbb{Z}_2$ -多様体 iii) free-

7.)

$\mathbb{Z}_2$ -多様体.

命題 (4.1) i) $\xi \in U_2^2$ に対し $\Phi(\xi) = (1-\eta)W$

ここに $\eta = [\eta_1] \in K(\mathbb{Z}_2)$ (生成元) $W = \sum_i (-2) \omega(\underbrace{1, \dots, 1}_i)$

ii) $[M, T] \in \mathcal{G}_+^U(\mathbb{Z}_2)$, T : trivial に対し

$$\Phi([M, T]) = \sum \langle \text{ch } b_i, b_i(\tau_M) \text{ Td}(M), [M] \rangle \omega(\bar{i}_1, \bar{i}_2)$$

ここに $\{b_i\}$ は通常の K-理論 双対特性類, $\text{Td}(M)$ は M の Todd class をあらわす。

iii) $[M, T] \in \mathcal{G}_+^U(\mathbb{Z}_2)$ T : free action に対し

$$\Phi([M, T]) =$$

$$(1+\eta) \sum \langle \text{ch } b_i, b_i(\tau_{M/T}) \text{ Td}(M/T), [M/T] \rangle \omega(\bar{i}_1, \bar{i}_2)$$

ここに M/T は M の軌道空間 $[M/T]$ はその基本ホモロジー類をあらわす。

証明

i) ξ は バンドル $V_1 \rightarrow pt$ の $\mathbb{Z}_2$ -equivariant ^{1dim.} Connex-Floyd 類であるから $\alpha(\xi)$ は バンドル $\bar{\gamma}: V_1 \times_{\mathbb{Z}_2} B\mathbb{Z}_2 \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ の 1dim. Connex-Floyd 類となる。図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{K}(V_1 \wedge_{\mathbb{Z}_2} E\mathbb{Z}_2^+) & \xleftarrow{\tilde{f}'} & \tilde{K}(MU(1)) \\ & \swarrow s' & & & \\ K(B\mathbb{Z}_2) & & & & \\ & \searrow \times(1-\eta) & \downarrow \parallel 2 & & \downarrow \parallel 2 \\ & & K(B\mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{f'} & K(BU(1)) \end{array}$$

f はバンドル $\bar{\eta}$ の classifying map, s はセロ、クロスセクション。 $\bar{\eta}$ は line バンドル だから $a_1(\bar{\eta}) = \bar{\eta} - 1, a_i(\bar{\eta}) = 0 \quad i > 1$. $s^*(\bar{\eta}) = \eta, \eta^2 = 1$ 従って $(1-\eta)^2 = 2(1-\eta)$.
 故に $\Phi(s) = (1-\eta) \sum a_{i_1} \cdots a_{i_s}(\eta) \omega(\underbrace{1, \dots, 1}_i)$

$$= (1-\eta) \sum (a_1(\eta))^i \omega(\underbrace{1, \dots, 1}_i)$$

$$= (1-\eta) \sum (\eta-1)^i \omega(\underbrace{1, \dots, 1}_i)$$

$$= (1-\eta) W$$

ii). T が trivial な場合. $b_i^{Z_2}(\tau_M) = b_i(\tau_M)$ であり, $x \in K(M)$ に対し, $p_i(x) = \langle \text{Ch } x \text{ Td}(M), [M] \rangle$ であるから, 補題(3.1)より明らかである。

iii). T が free-action の場合, $[M, T] \in \mathcal{O}_+^V(\mathbb{Z}_2)$ は,

$[N \times \mathbb{Z}_2, \sigma]$ なる形の class に等しい。ここに σ は $\langle x, 1 \rangle$

$\in N \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \langle x, -1 \rangle \in N \times \mathbb{Z}_2$ なる $\mathbb{Z}_2$ -作用をあらわす。

$[M, T] = [N \times \mathbb{Z}_2, \sigma]$ だから $[M] = 2[N]$ in $\mathcal{O}_+^V$ であ

るか。 M の特性数は $[M/\tau]$ の特性数の2倍に等しく,

従って $[M] = 2[M/\tau]$ in $\mathcal{O}_+^V$ であり, $[N] = [M/\tau]$ in $\mathcal{O}_+^V$ となる。図式:

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}_2}(N \times \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{P_i} & K_{\mathbb{Z}_2}(\mu^*) \\ \uparrow \parallel & & \uparrow \times (1+\eta) \\ K(N) & \xrightarrow{P_i} & K(\mu^*) \end{array}$$

9)

$K_{Z_2}(N \times Z_2) \cong K(N)$ は自然な identification [2]。補題 (3, 1) より結果を得る。

§5. 重の局所化

$A(Z)$ を Z の 群多元環とする。 $A(Z)$ に $\deg(n) = 2n$ により grading を入れる。 $B\mathbb{U}$ は H -space であるから、 $\mathbb{U}_+(B\mathbb{U})$ は graded $\mathbb{U}_+$ -algebra と考えられる。 [10] に於て、 tom Dieck は 環準同型 $\varphi: \mathbb{U}_{Z_2}^+ \rightarrow \mathbb{U}_+(B\mathbb{U}) \otimes A(Z)$ $= L_{Z_2}^+$ を定義した。 φ は次のように定められる。

$$\varphi(s) = 1 \otimes (1) \quad (s \in \mathbb{U}_{Z_2}^+)$$

$$[M, T] \in \mathcal{U}_+^V(Z_2) \text{ に対し}$$

$$\varphi([M, T]) = \sum_F [\nu_F^{-1} \rightarrow F] \otimes (\dim_c \nu_F)$$

ここに F は、 固定点集合の連結成分 ν_F^{-1} は normal バンドル ν_F (M における) の stable inverse バンドルの決める $\mathbb{U}_+(B\mathbb{U})$ の元をあらわす。

φ と α の関係について次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_{Z_2}^+ & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{U}_+(BZ_2) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \\ L_{Z_2}^+ & \xrightarrow{A} & \mathbb{U}_+(BZ_2) [cf_1(\pi)^{-1}] \end{array}$$

A は環準同型で次の式により定義される。

$$A([F \rightarrow M] \otimes (k)) = (cf(\bar{\eta})^{-k + \dim P}) (cf_{\dim P} (P \otimes \bar{\eta}) / Z_M)$$

cf_* は Lomax-Floyd 類, $\bar{\eta}: V, x_{Z_2} \in Z_2 \longrightarrow BZ_2$

$Z_M \in U_*(M)$ は M の基本類 ($M \xrightarrow{Id} M$ で定められるもの)

$\dots / Z_M$ は cap 積をあらわす。

さて, $Q_2 = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] + \text{Lim } \mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z}$ とする. $\xi \in U_{Z_2}^2$ に対し, $\Phi(\xi) = (1-\eta)W$, W : invertible であるから, $\text{Inv. Lim. } K(Z_2)^\wedge [[t_1, \dots, t_s]] [\Phi(\xi)^{-1}] = \text{Inv. Lim. } Q_2 [[t_1, \dots, t_s]]$ であり, この同一視は, $\eta = -1$ により与えられる. そこで $\Phi_L': L_{Z_2}^+ \longrightarrow \text{Inv. Lim. } Q_2 [[t_1, \dots, t_s]]$ が次の図式により定義される

$$\begin{array}{ccc} U_{Z_2}^+ & \xrightarrow{\Phi} & \text{Inv. Lim. } K(Z_2)^\wedge [[t_1, \dots, t_s]] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta = -1 \\ L_{Z_2}^+ & \xrightarrow{\Phi_L'} & \text{Inv. Lim. } Q_2 [[t_1, \dots, t_s]] \end{array}$$

$\Phi_L' \circ \varphi$ を Φ_L と記す。

命題 (5.1) $\xi \in U_{Z_2}^2$ に対し, $\Phi_L(\xi) = 2W$. $[M, T] \in \mathcal{G}_+^V(Z_2)$ に対し,

$$\Phi_L([M, T]) = \sum_F \frac{1}{2^{1/2}|W|^{1/2}} \left\langle \mathcal{U} \prod_i \sum_j b_i(\tau_F) t_j \sum_k b_k(\tau_F) \left(\frac{-t_j}{1-2t_j} \right)^{t_j} \sum_l b_l(\tau_F) \left(\frac{1}{2} \right)^k \text{Td}(F, [F]) \right\rangle$$

ここに, $|Z_F| = \dim_{\mathbb{C}} Z_F$, τ_F は F の stable tangent bundle

証明略

Cohomological には, 命題 (5.1) は次のようになる
 命題 (5.1') $c(Z_F)$, $c(T_F)$ を Z_F , T_F の total Chern
 class とし, $c(Z_F) = \prod_j (1 + \gamma_j)$, $c(T_F) = \prod_i (1 + x_i)$ とする.

$$\overline{\Phi}_L([M, T]) = \sum_F \left\langle \prod_j \prod_i \frac{1}{1+t_j(e^{x_i}-1)} \frac{1}{1-e^{-x_i}} \prod_j \frac{1}{1-t_j(e^{\gamma_j}+1)} \frac{1}{1+e^{-\gamma_j}}, [F] \right\rangle$$

§6. Φ , Φ_L の応用.

この節では, Φ , Φ_L の計算により, §D に与えた, 命題 (0.1)
 $\sim$ (0.3) の証明をする。

命題 (0.1) の証明.

仮定と, 命題 (5.1) より,

$$\Phi_L([M, T]) = \frac{1}{2^n W^n} \sum \langle \cup b_{i_1} \cdots b_{i_s}(T_F) Td(F), [F] \rangle w(i_1, \dots, i_s).$$

補題 (3.1) と §5 の議論 から, $\Phi_L([M, T]) \in \text{Inv. Lim } \mathbb{Z}[\langle t_1, \dots, t_s \rangle]$. 従って, すべての $(i_1, \dots, i_s)$ に対し

$$\sum_F \langle \cup b_{i_1} \cdots b_{i_s}(T_F) Td(F), [F] \rangle \in 2^n \mathbb{Z}$$

よって, すべての双対 k -理論 特性数 が 2^n の倍数で
 あり, 故に $\Sigma_F [F] \in 2^n \mathbb{Z}_+^n$ (Hattori-Stong の定理)
 。 $\Sigma_F [F] = 2^n [N]$ とする。

$$\Phi_L([CP(1), T]^n [N]) = \Phi_L([M, T])$$

が簡単な計算によって得られ,

12)

$\Phi_L([M, T] - [CP(1), \tau]^n [N]) = 0$ であるから, $\Phi([M, T] - [CP(1), \tau]^n [N]) = (1+\eta)(\dots)$ となり, $[M] - [CP(1)]^n \times [N]$ の k -理論特性数は, すべて 2 の倍数となる。再び Hattori-Stong の定理を用いることにより, $[M] - [CP(1)]^n \times [N] = 2[L]$ 。命題 (4.1) (iii) から

$$\Phi([M, T] - [CP(1), \tau]^n [N]) = \Phi([Z_2, \sigma][L])$$

を得る。 Φ の injectivity から命題が導かれる。 Q. E. D.

命題 (0, 2) の証明.

の第 1 項

命題 (3, 2) により, $\Phi([M, T]) = \sum (-1)^i H^0, i \in K(Z_2)$.

命題 (5.1) により, $\Phi_L([M, T])$ の第 1 項 =

$$\sum_F \frac{1}{2^{1/2}} \left\langle \chi \sum_k b_k(\bar{x}_k) \left(\frac{1}{2}\right)^k Td(F), [F] \right\rangle$$

Q. E. D.

命題 (0, 3) の証明.

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_* \xrightarrow{x_{Z_2}} \mathcal{U}_*^V(Z_2) \rightarrow \mathcal{M}_+ \rightarrow \mathcal{U}_{*-1}(BZ_2) \rightarrow 0$$

を [6], p. 63 に与えられた exact sequence とする。

$\mathcal{U}_*^V$ は $[CP(1)]$, $\mathcal{M}_2$ は $[D^2 \rightarrow pt]$, $[CP(1)]$, $\mathcal{U}_1(BZ_2)$ は $[S^1, a]$ (1-次元 sphere with antipodal

involution) により生成されるから, $\mathcal{U}_*^V(Z_2)$ は $\mathbb{Z}$ 上

$[CP(1)]$, $[CP(1)][Z_2, \sigma]$ 及び $[CP(1), \tau]$ により生

成される。 $x \in \mathcal{U}_*^V(Z_2)$ とすれば $x = A[CP(1)] + B[CP(1), \tau]$

$+ C [CP(1)] [Z_2, \omega]$, A, B, C : 整数 とあらわされる
が、

$$\Phi([CP(1)]) = 1 - 2\omega(1)$$

$$\Phi([CP(1)] [Z_2, \omega]) = (1 + \eta)(1 - 2\omega(1))$$

$$\Phi([CP(1), \tau]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_s (1 - 2\eta t_s + \sum_{j=2}^{\infty} (1 - \eta)^j t_s^j)$$

となるので、 C は $\Phi(x)$ の 第1項により決定され、 A, C は $\Phi_L(x)$ を計算することにより知られる。

$$- \frac{1}{4} \Phi_L([S_n, T]) = \frac{n}{2} + \eta \omega(1) + \text{higher order terms}$$

$\Phi([S_n, T])$ の第1項

$$= H^{0,0} - H^{0,1} = \frac{4n - n^2}{4} + \frac{\eta(n-2)}{4} \eta \quad ([6])$$

これらにより、命題を得る。

Q.E.D.

Reference.

- [1] M.F. Atiyah : Immersions and embeddings of manifolds, *Topology* 1
- [2] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory (1965)
- [3] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory and completions. *J. Diff. Geometry*, 3. (1969)
- [4] M.F. Atiyah and I.M. Singer : The index of elliptic

operators I. Ann. of Math. 87.

[5] M.F. Atiyah and I. M. Singer : The index of elliptic operators III Ann. of Math. 87.

[6] P.E. Conner : Seminar on Periodic maps.
Lecture Notes in Math. 46. Springer

[7] P.E. Conner and E.E. Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Math. 28, Springer (1966)

[8] P.E. Conner and E.E. Floyd : Periodic maps which preserve a complex structure, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)

[9] P.E. Conner and E.E. Floyd : Differentiable Periodic maps. Springer (1964)

[10] T. tom Dieck : Bordism of G -manifolds and Integrality Theorems. (mimeographed)

[11] T. tom Dieck : Faserbündel mit Gruppenoperationen. Archiv der Math.

[12] A. Hattori : Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds, Topology 5 (1966)