

温度勾配のある細管内の圧力波の伝播

阪大院 基礎工 杉 本 信 正 (Nobumasa SUGIMOTO)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

管の中の気体を伝播する圧力波は、粘性や熱伝導性による拡散効果により減衰する。しかし壁面に適当な温度勾配があれば、背後に流れる熱流から圧力波はエネルギーをもらい、逆に不安定化することが知られている。⁽¹⁾ この熱音響現象による気体の不安定化が発生する臨界条件の導出や、その後に現れる非線形性が本質的な自励振動を記述するために、筆者はここ数年にわたって境界層理論を構築してきた。⁽²⁻⁵⁾

タコニス振動やソンドハウス管のように比較的管径が大きい場合には、境界層理論は有効であるが、熱音響式熱機関で用いられるような極めて細い管の場合には適用できない。そこで、本研究では管径と拡散層の厚さについては制限を設けず、しかし伝播方向の代表長さは管径に比べて十分長いと仮定する細管の中の圧力波の伝播を議論する。管径が小さくなるにつれ、流れの慣性による非線形は無視出来るので、ここではまず線形理論を展開する。

本講究録の内容は、日本流体力学会年会 2009 での同じ題目での発表の拡張要旨集⁽⁶⁾の内容に、一部加筆したものであることをお断りしておく。

2. 線形化された基礎方程式と波動方程式

図 1 に示すような平行な二つの平板間に挟まれた理想気体中の圧力波の 2 次元伝播を考える。伝播方向に x 軸をとり、それに垂直方向に y 軸をとる。座標の原点を平板間の中点にとり、平板間距離を $2H$ とする。平板は十分大きな熱容量を有し、壁面温度は x 軸方向に変化しているものとする。

静止平衡状態では、気体の圧力は至る所で等しく、その値を p_0 とする。また気体の温度は平板の局所温度 $T_e(x)$ に等しく、密度 $\rho_e(x)$ は $1/T_e$ に比例する。せん断粘性率 μ 、熱伝導率 k の温度依存性は簡単のため無視する。伝播方向の代表長さを L とし、 H/L は十分小さいと見なす細管近似を行うが、平板間隔と粘性拡散距離 $\sqrt{\nu_e/\omega}$ との大小関係については制約を設けない。ここで、 $\nu_e(x)$ とは動粘性率 μ/ρ_e であり、 ω は変動の代表角周波数である。また熱拡散距離 $\sqrt{\nu_e/\text{Pr}\omega}$ も考える必要があるが、プラントル数 Pr が大体 1 程度であるので、両者は同程度である。

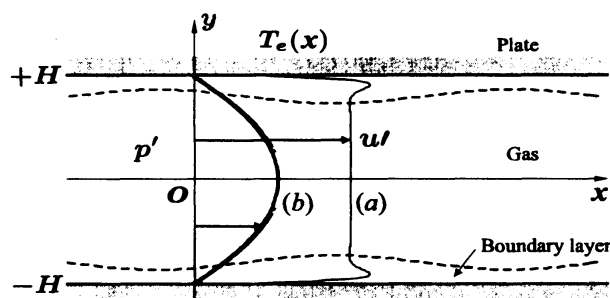


図 1: 平行平板間の圧力波の伝播 (図中の (a), (b) は拡散層が薄い (境界層) の場合と厚い場合の軸方向速度分布を示す)。

連続の式、ナビエ・ストークス方程式およびエネルギー式を線形化し、 $H/L \ll 1$ を用いると順次以下のように近似できる：

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u') + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_e v') = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{\partial p'}{\partial t} + k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}. \quad (2.4)$$

ここで、 ρ' , p' , T' はそれぞれ、密度、圧力、温度の攪乱を表し、 u' , v' は速度の x 方向成分、 y 方向成分を表す。 c_p は定圧比熱である。理想気体を仮定しているので、圧力、密度、温度の攪乱の間には $p'/p_0 = \rho'/\rho_e + T'/T_e$ の関係が成り立つ。これに対し、平板上でそれぞれ、

$$u' = v' = T' = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm H \quad (2.5)$$

を境界条件として課す。

式(2.3)より、圧力は断面にわたって一様であることが分かる。そこで全ての量を $p'(x, t)$ によって表すことを考える。時間に関するフーリエ変換を用いると式(2.1), (2.2), (2.4)の解は容易に求まり、境界条件を課すと p' を支配する次の方程式が導かれる：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{H} \mathcal{M} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \mathcal{M}_P \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) \\ & - \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \left[\frac{1}{1 - \text{Pr}} \mathcal{M} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1 - \text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_P \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $a_e(x)$ は断熱音速 $\sqrt{\gamma p_0/\rho_e}$ （ただし γ は比熱比）を表す。また、 $\mathcal{M}_P(\phi)$ は以下に定義される、関数 $\phi(x, t)$ の汎関数であり、 $\mathcal{M}$ は $\text{Pr} = 1$ とおいた場合を表す：

$$\mathcal{M}_P[\phi(x, t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{G[\nu_e(t - \tau)/\text{Pr}H^2]}{\sqrt{t - \tau}} \phi(x, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

ただし、 $G(t)$ は

$$G(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left(-\frac{n^2}{t} \right) \quad (2.8)$$

である。初期条件を課す場合には、積分の下限は $t = 0$ とする。

3. 緩和関数の振る舞い

式 (2.7) の時間に関する積分は拡散効果による履歴を表す. 関数 $G(t)/\sqrt{\pi t}$ は, 積分値が過去の ϕ の値にどれだけ依存するかの大きさを表す緩和関数である. その挙動について調べため, 次の無限級数に対する公式を用いる:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n-1})^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k' K(k), \quad (3.1)$$

ここで, $z = \exp(-1/t)$, $\log(1/z) = \pi K(k')/K(k)$ であり, k および k' は完全楕円関数 $K(k)$ の母数と補母数 $k'^2 = 1 - k^2$ である. この公式を用いると, G は

$$G(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{2n}{t}\right) \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(2n-1)}{t}\right] \right\}^2 \quad (3.2)$$

と表現できる. もし $t \ll 1$ では, G は

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} G(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{1}{t}\right) + \cdots \right] \quad (3.3)$$

と近似できる一方, $t \gg 1$ では式 (3.1) の最後の関係式より

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} G(t) \approx 2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} t\right) \quad (3.4)$$

と近似できる.

式 (2.7) には t にかわって $\nu_e t/H^2$ が入っている. この無次元量の逆数は, レオロジーで用いられるデボラ (Deborah) 数 D_e である:⁽⁷⁾

$$D_e \equiv \frac{H^2}{\nu_e t}. \quad (3.5)$$

この量は, 考えている時間 t に対する緩和時間 H^2/ν_e の比を表す. 関数 $G(t)$ の $t(> 0)$ に関するグラフを図 2 に点線で示す. G は t が大きくなると指数関数的に急速に小さくなる. 比較のために式 (3.3), (3.4) で表される漸近形を示す. これから, G は, t が小さい場合は式 (3.3)

で, 大きい場合は式 (3.4) で十分精度よく近似でき, 両者の移り変わりは $t \approx 0.2$ の回りの極めて狭い領域で起きることが分かる. したがって G は, 実質的に式 (3.3) または (3.4) のどちらかで表してよい.

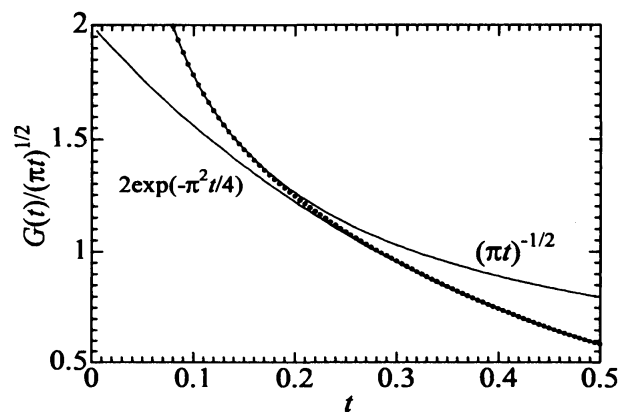


図 2: 緩和関数のグラフ

4. 波動方程式の近似

緩和関数に関するこの驚くべき結果より, t が小さい間 ($D_e > 0.2$) では, $G(\nu_e t/H^2) \approx 1/\sqrt{\pi t}$ とおくと, 波動方程式 (2.6) は次の方程式で近似されることが分かる:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{H} \left[C \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + \frac{(C + C_T) dT_e}{T_e dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (4.1)$$

ここで, 定数 C, C_T はそれぞれ以下のように与えられ,

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \quad \text{および} \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}} + \text{Pr}}, \quad (4.2)$$

$-1/2$ 階の微分は次のように定義される:

$$\frac{\partial^{-\frac{1}{2}} \phi}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\phi(x, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (4.3)$$

この方程式の H を円管の水力半径 $R/2$ で置き換えると, 既に示した境界層近似を用いて導出した方程式に等しい.⁽²⁻⁴⁾ しかし, 注目すべきことは, この方程式は, 時間が初期値からあまり経っていない場合にはいつでも成り立つことである. また, 境界層近似では緩和関数は常に $1/\sqrt{\pi t}$ であるのに対し, 厳密には $D_e \approx 0.2$ 程度で急速にゼロになることから, 境界層近似の成り立つ範囲が明らかになったことである. 境界層近似をその時間を超えて用いる場合には, $1/\sqrt{\pi t}$ の緩和関数を適当な時間で打ち切ることが考えられる.

一方, 十分時間が経過した後では, これは H が極めて小さいとする場合に相当するが, フーリエ変換形での解の形から以下の漸近方程式が導出できる:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

ここで, α は以下に定義される拡散率である.

$$\alpha = \frac{a_e^2 H^2}{3\gamma \nu_e}. \quad (4.5)$$

十分時間が経過した後では, 方程式 (2.6) の積分で与えられる履歴効果は消え失せることが分かる. もし温度勾配がなければ, 波は第2項により拡散するだけである. なお, 拡散係数 $a_e^2 H^2 / 3\gamma \nu_e$ は温度によらず一定であり, $a_e / \sqrt{\gamma}$ は等温音速に相当する. 温度勾配は, 新たに第3項を通して波の伝播を発生させることが明らかになった.

例えば, 大気圧下の空気において, 10 Hz の振動では粘性拡散層の代表厚さは大体 0.5 mm 程度である. 拡散層の厚さはこの値の5倍程度と見ておけば十分である. もし温度分布が指数関数的であるとして, $T_e^{-1} dT_e/dx$ を 10 m^{-1} とし, $2H = 0.1 \text{ mm}$ とすると, 第3項目の $\partial p' / \partial x$ の係数は速度を与え, その値は約 50 m/s になる.

方程式 (4.4) では、温度勾配は波の伝播を発生させるだけである。そこで、高次項を求めると以下のように修正される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ + \left[\frac{6}{5} \gamma - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\alpha}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{2}{5} (1 + \text{Pr}) \frac{\alpha H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

方程式 (4.4) は平板間隔が極端に狭い場合 (H の 2 次項まで) に相当すると見なせる一方、方程式 (4.6) は、間隔は狭いがその有限間隔の効果 (H の 4 次項まで) を考慮している。

また指数型温度分布を仮定し、 $\alpha T_e^{-1} dT_e/dx$ を V (定数) とおき、さらに温度勾配が大きき式 (4.4) で拡散項が十分小さいと見なせる、すなわち $\partial p'/\partial t + V \partial p'/\partial x \approx 0$ とすると、式 (4.6) は次のように近似できる：

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + V \frac{\partial p'}{\partial x} = D \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \quad (4.7)$$

ここで、 D は次式で与えられる：

$$D = \alpha \left\{ 1 - \left[\frac{6}{5} \gamma (2 + \text{Pr}) - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{V^2}{a_e^2} \right\}. \quad (4.8)$$

普通の空気では、比熱比およびプラントル数の値は、それぞれ 1.4, 0.7 程度であるから、 $V/a_e (< 1)$ の値が十分大きいと D の値が負になる領域が発生する。ここでは負の拡散が起きるが、攪乱は速度 V で伝播するため、対流型不安定を引き起こすことになる。このように温度勾配が不安定化を引き起こすことが示唆される。

5. おわりに

温度勾配のある平行平板の間の気体中を伝播する圧力波の挙動を、細管近似の下に一般的に支配する空間 1 次元方程式を導出した。円管においても係数は異なるが同じ形の方程式が得られる。境界層近似の下に導かれた方程式は、デボラ数が大体 0.2 より大きければいかなる状況でも成り立つことが明らかになった。一方、十分時間が経過した後では、履歴効果は消失し拡散効果として方程式に現れる。しかし温度勾配の効果は拡散だけでなく、正勾配の向きに波を伝播させる働きをすることが明らかになった。さらに温度勾配が大きければ、負の拡散が生じる領域が現れ、波は対流型不安定を受けることが予想される。

参考文献

- [1] 杉本信正, “熱音響現象—熱と音と流れの相互作用—,” 機械の研究 **60** (2008) pp.423-434.
- [2] 杉本信正, “境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析,” ながれ **24** (2005) pp.381-393.

- [3] Sugimoto, N. & Yoshida, M., “Marginal condition for the onset of thermoacoustic oscillations of a gas in a tube,” *Phys. Fluids* **19** (2007) 074101.
- [4] Sugimoto, N. & Shimizu, D., “Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube,” *Phys. Fluids* **20** (2008) 104102.
- [5] Shimizu, D. & Sugimoto, N., “Physical mechanisms of thermoacoustic Taconis oscillations,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **78** (2009) 094401.
- [6] 杉本信正, “温度勾配のある細管内の圧力波の伝播,” 日本流体力学会年会 2009 講演要旨集 p.181; 同拡張要旨集 CD #22023 (2009).
- [7] Reiner, M. “The Deborah number,” *Phys. Today* **17** (1964) 62.