

$B^2\mathcal{O}$ と境界値問題

東大数理 山根 英司 (Hideshi Yamane)

ある種のセミ双曲型境界値問題が一意可解であり, さらにその解の特異スペクトルが, 境界値の特異スペクトルのみに応じて評価されることを, 金子が示した. ここでは, この結果を $\mathcal{U}_2$ -超局所化する. 境界値の取り扱いには (F-) マイルド性のアイデアを用いるので, 先に正則パラメータについて準備する.

§1 $B^2\mathcal{O}$ (正則パラメータ付 $\mathcal{U}_2$ -超函数の層)

$\mathbb{C}_z^{n_0+n_1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}_t^{n_2}$ 上で考える. $z = (z', \tilde{z})$ と書く.

この上に層 $\mathcal{C}\mathcal{O} = \mathcal{C}_t\mathcal{O}_z$ がある. 部分多様体 Λ^* を,
 $\Lambda^* = \mathbb{C}_{z'}^{n_0} \times \mathbb{R}_{\tilde{z}}^{n_1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}_t^{n_2}$ で定めるとき, ($\S 2$ 以降 $n_0 = 1$ とする)

定義 $B^2\mathcal{O}_{\Lambda^*} = \mathcal{R}\Gamma_{\Lambda^*}(\mathcal{C}\mathcal{O})[n_1]$

命題 $B^2\mathcal{O}_{\Lambda^*}$ は層である. 正則パラメータ付 $\mathcal{U}_2$ -超函数

の層と呼ぶことにする。 $n_0=0, n_1=0, n_2=0$ のとき, それぞれ $B^2, C\otimes, B\otimes$ に他ならない。

(証明)

1次以下のコホモロジーの消滅は既に柏原-Laurent で示されている。1次以上については, 野呂による $C\otimes$ 版定理 B を用いて, Čech コホモロジーの計算で示される $\square$

命題 $\Lambda^* = \mathbb{R}^{2n_0+n_1} \times \prod S^* \mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}^{n_0} \times \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}^{n_0} \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}^{n_1} \times \prod S^* \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}^{n_2}$ とみなすと, $B_{\Lambda^*}^2$ が定義される。このとき, 部分コーシー・リーマン系 $\mathfrak{u}_{\mathbb{Z}}, u=0$ の $B_{\Lambda^*}^2$ 解層は, $B^2 \otimes_{\Lambda^*}$ に一致する。特に高次解層は消滅する。

(証明)

$C\otimes$ に関して正則ド・ラム理論が成立するので SKK と同様にできる $\square$

諸性質

コーシーの積分定理・積分公式, オミクロ解析性伝播 (特に一意接続性) が成立する。また Dolbeault 分解ができるので, Malgrange 型消滅定理も成り立つ。これらが $C\otimes$ に関する結果を含むことに注意しよう。

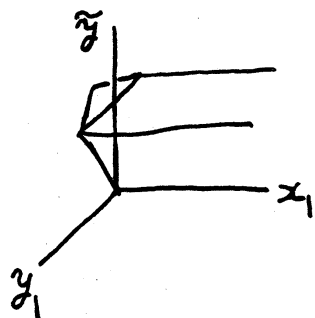
正則パラメータに関する境界値

$B^2 \ominus$ の切断が (z' 空間の無限小楔) $\times (\mathbb{R}^{n_1} \times \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合) の上で与えられたとき, $\text{Im } z' \rightarrow 0$ の境界値をとることができる。これは $\mathbb{C}$ -linear である。

§2 (F-)マイルド性と解の境界値

$n_0=1$ とする。 $z = (z_1, \tilde{z}) = (x_1 + \sqrt{-1} y_1, \tilde{x} + \sqrt{-1} \tilde{y})$ と書く。
 $\Lambda^* \supset \Lambda := \{y_1=0, \tilde{y}=0\} \supset \Delta := \{z_1=0, \tilde{z}=0\}$ とする。前項の境界値は B^2_Λ に値をとる。また, $\Delta = \mathbb{R}^{n_1} \times \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^{n_2}$ なので, B^2_Δ が定義される。 $\Delta (\subset \Lambda)$ を境界面とする境界値問題を考える。

z -空間で図のような開集合 U を考える。



$F(z, t) \in C_t \ominus_z$ が,

$U \times (\sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合) で定義されてい

て, ここで $PF=0$ をみたすとする。

ただし, P は $\text{Im } z=0$ の近傍で定義され

たマイクロ微分作用素で次の形とする:

$$(*) \quad P(z, t, D_z, D_t) = D_{z_1}^m + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} A_\alpha D_{z_1}^{m-|\alpha|} D_{\tilde{z}}^\alpha + (\text{低階})$$

$$[A_\alpha, z_1] = 0, \quad \text{and } A_\alpha \leq 0$$

さて野呂の意味での F の境界値 $u = b(F) \in B^2_\Lambda$ は, もちろん

ん $P(x, t, D_x, D_t) u = 0$ をみたす. また $Y(x_1) F(x_1, \tilde{z}, t) \in B^2 \mathcal{O}$ が定義されて, $\text{Im } \tilde{z} \rightarrow 0$ の境界値 $[u]$ が定まる. これを u の canonical extension と呼ぶ.

$P[u] = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u)(\tilde{x}, t) \delta^{(m-1-j)}(x_1)$, $b_j^+(u) \in B_\Delta^2$ と書ける. $b_j^+(u)$ を u の境界値という.

一方, $(D_{z_1}^j F)(0, \tilde{z}, t) \in C_t \mathcal{O}_{\tilde{z}}$ が定義されて, これらが B_Δ^2 の切断を定める. これは, (境界系の取り方を除いて) $b_j^+(u)$ に一致する.

また, B_Δ^2 と B_0^2 に関する割算定理にもとづいて, 小松・河合 - Schapira の理論の B^2 版ができる. これで定義した canonical extension や境界値はもちろん上記のものと一致する.

§3 コーシー・コワレフスキー

この § では他と少し違った記号を使う. $\mathbb{C}_{\tilde{z}}^{n+1} = \mathbb{C}_{z_0} \times \mathbb{C}_{\tilde{z}}^n$ とし, $k, L > 0$ とする.

$$U_{k,L} = \{(z_0, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^{1+n} ; k|z_0| + |\tilde{z}| < L\}$$

$$V_L = \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n ; |\tilde{z}| < L\}$$

とおく. ただし $|\tilde{z}| = |z_1| + \dots + |z_n|$

$P(z, D_z)$ が $\overline{U_{1,L}}$ の近傍で定義された m 階の微分作用素で, $Y = \{(z_0, \tilde{z}); z_0 = 0\}$ が非特性とする. このとき $\exists k_0 \geq 1, \forall k \geq k_0$ に対し, 次は位相をこめて同型:

$$\mathcal{O}(U_{K,L}) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{K,L}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}(V_L)$$

$$u \longmapsto (Pu; u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0})$$

さて、ここで、 $\mathbb{C}_w^p$ の任意の開集合 Ω をとり、上の同型に完全関手 $\hat{\otimes} \mathcal{O}(\Omega)$ を施すと

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{z,w}(U_{K,L} \times \Omega) &\simeq \mathcal{O}_{z,w}(U_{K,L} \times \Omega) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_{\tilde{z},w}(V_L \times \Omega) \\ u(z,w) &\longmapsto (Pu; u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0}) \end{aligned}$$

を得る。これを使うと、 $C\mathcal{O}$ に関するコーシー・ゴワレフスキーの precise form が導かれる。

定理 W を $\sqrt{t} S^* R_t^p$ の任意の開集合とすると、次の同型が成立する：

$$\begin{aligned} C_t \mathcal{O}_{\tilde{z}}(U_{K,L} \times W) &\simeq C_t \mathcal{O}_{\tilde{z}}(U_{K,L} \times W) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} C_t \mathcal{O}_{\tilde{z}}(V_L \times W) \\ u(z,t) &\longmapsto (P(z, D_z) u(z,t); u|_{z_0=0}, \dots, D_{z_0}^{m-1} u|_{z_0=0}) \end{aligned}$$

注 (z, t) 変数のマイクロ微分作用素について precise form が定式化・証明できればいいが、オー・オー flat の話が出てくるので難しい。(t が 1 変数のときは Schapira) それに、仮にできたとしても、出てくる集合の形は難しくなり、直積状で話をまとめるのは無理だろう。

上の定理を使って掃き出しを行ないたい。P が (z, t) 変数のマイクロ微分作用素のときは、柏原-Schapira による、 $\Sigma^{\mathbb{R}}$

加群の SS の評価を利用すればよいが、少し結果が弱くなる。

§4 セミ双曲型境界値問題

定義 A (金子)

$P(z, D_z)$ を微分作用素, I を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1}_{(\tilde{x}; \sqrt{-1}\tilde{\xi}d\tilde{x})}$ の開集合とする. P が $\{x = (x_1, \tilde{x}) ; x_1 = 0\}$ の正側に I -セミ双曲型とは,
 $\forall L \subset\subset I, \exists \varepsilon_L > 0$ s.t.

$\sigma(P)(x; \xi_1, \sqrt{-1}\tilde{\xi}) = 0$ が $(\tilde{x}; \sqrt{-1}\tilde{\xi}) \in L, 0 < x_1 \leq \varepsilon_L$ のときに $\operatorname{Re} \xi_1 > 0$ なる根 ξ_1 を一つも持たないことをいう.

例 $I = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1}$ で $P = D_1^2 - (D_2^2 + \dots + D_d^2)$, $d \leq n_1 + 1$

$$P = D_1^2 - x_1 D_2^2 \quad (\text{トリコミ})$$

$$I = \{\xi_2 < 0\} \text{ で } P = D_1 + \sqrt{-1}x_1 D_2 \quad (\text{Jewy-溝 如})$$

ここで少し幾何学的な注意をする. $\Lambda = \mathbb{R}^{n_1+1}_x \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ の部分複素化を $\tilde{\Lambda}$ とするとき, Λ の特異特異スペクトルやマイクロ特性多様体は $\sqrt{-1}S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ 上に住んでいる. ところが, $\sqrt{-1}S^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \simeq \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_1+1} \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ とみなせるので, 以下断わりなくこの同一視を行なう. (Λ の代わりに Δ でも同様.)
 $P = P(z, D_z)$ については, $\operatorname{Ch}^2_\Lambda(P) = \operatorname{Ch}(P) \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n_2}$ となる. $\sigma_\Lambda \sigma(P) = \sigma(P)$ に注意しよう. 上の定義のような P は “2-セミ双曲型” ともいえる.

定理 A 上の定義のような I, P を考える. Ω_2 を $F S^* \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合, $v_j \in B_\Delta^2(\pi(I) \times \Omega_2)$ ($0 \leq j \leq m-1$) とし, $SS_\Delta^2(v_j) \subset I \times \Omega_2$ とする, このとき $\cup SS_\Delta^2(v_j)$ だけで決まる $\mathbb{R}^{n_1+1}$ における $\pi(I)$ の正側半近傍 $\tilde{\Sigma}$ と $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = 0$ なる $C(\varepsilon) > 0$ が存在し, 片側境界値問題

$$\begin{cases} Pu = 0, & u \in B_\Delta^2(\tilde{\Sigma} \times \Omega_2) \\ b_j^+(u) = v_j & (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

が一意的可解, また $SS_\Delta^2(u) \cap \{x_1 = \varepsilon\}$ の $\sim$ 成分は $\cup SS_\Delta^2(v_j)$ の $\sim$ 成分の $C(\varepsilon)$ 近傍に入る.

(証明)

定義関数 $\in C^\infty$ に戻り, π 正則コーシー問題を解く. その解が求める境界値を与えることは (F-)マイルドの話より出る. 解を掃き出し法 (双曲型不等式による) と C^∞ の local Bochner で伸ばす. SS_Δ^2 の評価はつくり方からわかる. 局所一意性は 2-マイクロ西瓜割り定理と掃き出しによる $\square$

例 $(D_1^2 - x_1 D_2^2)u = 0$ locally on $x_1 > 0$, $u \in B_{\mathbb{R}^n}$ とすると $\{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$ に沿う u の $\neq 2$ 特異スペクトルは,

$SS_{\{\xi_2=0\}}^2(u|_{x_1 \downarrow 0}) \cup SS_{\{\xi_2=0\}}^2(D_1 u|_{x_1 \downarrow 0})$ だけによる上からの評価をもつ, (境界値自体にはよらない)

マイクロ微分作用素の場合を考えよう.

定義 B $w \in \mathbb{C}^{n_2}$ を $t \in \mathbb{R}^{n_2}$ の複素化とする. $P(z, w, D_z, D_w)$ を $\{2\}$ の形の作用素, $\Lambda^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_z^{1+n_1} \times \dot{T}^* \mathbb{C}_{(w;\theta)}^{n_2}$ とし, $\sigma_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \sigma(P)(z, w; \theta; \tilde{z})$ をマイクロ・シンボルとする. ただし $\tilde{z}$ は $T_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(\dot{T}^* \mathbb{C}^{1+n_1+n_2}) \simeq \dot{T}^* \mathbb{C}^{1+n_1} \times \dot{T}^* \mathbb{C}^{n_2}$ のファイバーの座標. このとき P が Ω_2 上 $\{x = (x_1, \tilde{x}); x_1 = 0\}$ の正側に $2 - \mathbb{L}$ -セミ双曲型とは P が次の条件を満たすことをいう.

$\forall L \ll 1, \forall K \ll \Omega_2, \exists \varepsilon_{K,L} > 0$
 s.t. $\sigma_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \sigma(P)(x; t; \sqrt{1-\varepsilon} t; \tilde{z}_1; \sqrt{1-\varepsilon} \tilde{z}) = 0$ が, $(\tilde{x}; \sqrt{1-\varepsilon} \tilde{z}) \in L$, $(t; \sqrt{1-\varepsilon} t) \in K$, $0 < x_1 \leq \varepsilon_{K,L}$ のときに $\operatorname{Re} \tilde{z} > 0$ なる根 $\tilde{z}$ を 1 つも持たない.

定理 B Ω_2 を相対コンパクトな任意の開部分集合に取りかえると前定理と同様の結果が成立する.

(証明)

素朴な掃き出し法の代わりに, 公式 $SS(\mathcal{R}H_{\text{con}}(\mathcal{E}/\mathcal{E}P, \mathcal{C}\mathcal{O})) \subset Ch_{\Lambda^{\mathbb{C}}}^2(P)$ と柏原の non-characteristic deformation lemma を使う. $Ch_{\Lambda^{\mathbb{C}}}^2(P)$ を評価するためには, マイクロ・シンボルに双曲型不等式を当てはめる. $\square$

例 $P = D_n(D_1^2 - x_1 D_2^2) + \sum_{i+j=3} a_{ij}(x) D_1^i D_2^j + (\text{低階項}) \in \Sigma_{\mathbb{R}^n}$

$\Lambda = \{ (x; \sqrt{\eta} \xi dx) ; \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_n \neq 0 \} \subset \sqrt{\eta} S^* \mathbb{R}^n$ とする.
 $Pu=0$ の解 $u \in C(\mathbb{R}^n)|_{\Lambda} \subset B^2_{\Lambda}$ につき, $SS^2_{\Lambda}(u) \cap \{x_1 > 0\}$ は
 $u|_{x_1=0}$, $D_1 u|_{x_1=0}$ (B^2 の意味の制限) の才の特異スペクトル
 だけによる上への評価を持つ.

注 内田は定義 B に似たクラスのマイクロ微分方程式系に関
 して, 境界 Λ への regularity の伝播定理を示した.

一方, 金子は自身の伝播定理と小松・河合・Schapira の標
 準的延長の理論を組み合わせ $(D_1 + \sqrt{\eta} x_1 D_2) u = \delta$ on $\mathbb{R}^2$
 の非可解性を示した.

これをヒントに, 内田の伝播定理と B^2 版 K-K-S 理論を
 用いて, $0 \in \mathbb{R}^n_x$ の近傍で次の方程式の非可解性を示すことが
 できる (B^2 解なし $\Rightarrow B$ 解なし)

$$\left[D_n (D_1 + \sqrt{\eta} x_1 D_2)^m + \sum_{i+j=m+1} a_{ij}(x) D_1^i D_2^j + (\text{低階}) \right] u = f$$

ただし f は 0 の近傍で与えられたある distribution で, 0
 の外で解析的.

文献

- [1] Kaneko, A., Estimation of singular spectrum of boundary
 values for some semihyperbolic operators, J. Fac. Sci. Univ

Tokyo Sec. IA 27 (1980)

- [2] Kaneko, A., Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 25 (1975)

(この訂正が [1] p. 454 にある)

- [3] 大島利雄, 確定特異点型の境界値問題と表現論, 上智大学講究録
- [4] 戸瀬信之, 修論 (数研講究録 573)
- [5] 内田素夫, 修論
- [6] 野呂正行, 修論 (数研講究録 573)
- [7] Douady, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Astérisque 16 (1974)