

Majorization と doubly stochastic map について

大阪府立桃谷高等学校 奥井栄三郎

II. 実ベクトル $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対し submajorization $a \gg b$ とは $\sum_{i=1}^k a_i^* \geq \sum_{i=1}^k b_i^*$, $1 \leq k \leq n$, によって定められる。但し, a_i^* , b_i^* は a_i , b_i をそれぞれ大きいものから順次並べ変えたものとする。又, majorization $a > b$ とは, $a \gg b$ かつ $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ となることである。

[1] において, これらの概念はエルミット行列 A , B にまで拡張され, 次のように定義されている。即ち submajorization $A \gg B$ とは, $\sigma(A) \gg \sigma(B)$ であり, majorization $A > B$ とは $\sigma(A) > \sigma(B)$ ということである。但し, $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ はそれぞれ A , B の spectrum とする。

そこでこれらのことを更に Hilbert space 上の operator にまで拡張できないか, ということを考える。まず行列環 M_n の自然な拡張として, finite factor M 上を考える。 M 上のエルミット元全体を M^h で表わし, τ を M 上の trace とする。

このとき Murray and von Neumann [9] は $A \in M^h$ に対し 2 次のような関数を定義し、 N_0, t の固有値と呼んでいる。

$$e_A(t) = \inf \{ r; \tau(E(r)) \geq t \}, \quad t \in [0, 1].$$

但し、 $A = \int r dE(r)$ とする。

これは $[0, 1]$ 上の単調増加、左連続関数で、丁度ベクトルの場合の並べ替えに相等している。更に $\tau(A) = \int_0^1 e_A(t) dt$ ということも知られている。

ところで、[5] において Chong は、probability space (X, μ) 上の measurable function f に対し、 $d_f(s) = \mu\{x; f(x) > s\}$, $f^*(t) = \inf\{s; d_f(s) \leq t\}$ for $t \in [0, 1]$ とし、 (X, μ) 上の measurable functions f, g に対し、submajorization $f \gg g$ 及び majorization $f > g$ を次のように与えている。

$f \gg g$ であるとは $\int_0^s f^*(t) dt \geq \int_0^s g^*(t) dt$ for every s ,

$f > g$ であるとは $f \gg g$ かつ $\int_0^1 f^*(t) dt = \int_0^1 g^*(t) dt$ 。

そこでこれを使って M^h の元 A, B へ submajorization $A \gg B$ 及び majorization $A > B$ を次のように定義する。

定義 1. $A, B \in M^h$ に対し

$A \gg B$ であるとは $e_A(t) \gg e_B(t)$.

$A > B$ であるとは $e_A(t) > e_B(t)$ とする。

おまけにわかることであるが $A \gg B$ であることは $\int_s^1 e_A(t) dt \geq \int_s^1 e_B(t) dt$, $s \in [0, 1]$, とは同値であり、又、 $A > B$ であることは

(2)

と $A \gg B$ かつ $\tau(A) = \tau(B)$ であることは同値である。

このとき [1] における行列の場合に示されているのと同様の
の次の結果を得る [7]。

定理 1. 以下は同値

- (1) $A \gg B$
- (2) $\tau((A-r)^+) \geq \tau((B-r)^+)$ for all $r \in \mathbb{R}$
- (3) $\tau(f(A)) \geq \tau(f(B))$ for any increasing convex function f on $[a, b]$, 但し $[a, b] \supset \sigma(A), \sigma(B)$, $f(\frac{1}{2}(A+B)) \leq \frac{1}{2}(f(A)+f(B))$.

定理 2. 以下は同値

- (1) $A \succ B$
- (2) $\tau(A) = \tau(B)$ かつ $\tau((A-r)^+) \geq \tau((B-r)^+)$ for all $r \in \mathbb{R}$
- (3) $\tau(|A-r|) \geq \tau(|B-r|)$ for all $r \in \mathbb{R}$
- (4) $\tau(f(A)) \geq \tau(f(B))$ for any convex function f on $[a, b]$.

更に $A \succ B$ の特徴づけとして 2 次も得られる。但し $\|A\|_1 = \tau(|A|)$,

$U(A) = \{U^*AU; U \text{ は } M \text{ の unitary}\}$, $\text{co } U(A)$ は $U(A)$ の convex hull.

定理 3. 以下は同値

- (1) $A \succ B$
- (2) B は $\|\cdot\|_1$ -closure of $\text{co } U(A)$ に属する。
- (3) $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\|B - \sum c_i A c_i^*\|_1 < \varepsilon$ かつ $\sum c_i^* c_i = \sum c_i c_i^* = 1$
となる $\{c_i\}$ が存在する。

定理 3 の証明について, (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) は簡単な計算によっ

(3)

て得られる。(1) $\Rightarrow$ (2) について証明の概略をのべる。その準備として、まず doubly stochastic matrix についてであるが、 $n \times n$ 行列 $D = (x_{ij})$ が doubly stochastic matrix であるとは、

$$x_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{なるもののことである。}$$

ベクトルが $a > b$ なる関係にあるとき doubly stochastic matrix D が存在して $b = Da$ となることは知られている。更に、doubly stochastic matrix について次の事も知られている。

Birkhoff の定理 ([8])

D を doubly stochastic matrix とする。このとき $D = \sum \lambda_i p_i$ となる。但し、 p_i は permutation matrix, $\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$ 。

以上の準備のもとに証明に入る。まず A, B に対し、それら関数 $e_A(t), e_B(t)$ を与える。次に区間 $[0, 1]$ を n 等分分割し、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$ とする。次に $a_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e_A(t) dt, b_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e_B(t) dt$ とすれば、 $a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1), b = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$ はベクトルとして $a > b$ となる。そこで、

$b = Da$ なる doubly stochastic matrix D が存在する。Birkhoff の定理により、permutation matrices p_j が存在し、 $b = \sum \lambda_j p_j a, \lambda_j \geq 0, \sum \lambda_j = 1$, となることがわかる。次に M 個の projections $\{P_i\}_{i=1}^n$ を $P_i \perp P_j, i \neq j, \sum P_i = 1, \tau(P_i) = \frac{1}{n}$ をとり、 $A_n = n \sum_{i=1}^n a_i P_i, B_n = n \sum_{i=1}^n b_i P_i$ とすると $P_i \sim P_j, i, j = 1, \dots, n$, であることは各 permutation matrix P に対し、 $V_{i,P}^* \cdot V_{j,P} = P_{ij}$ かつ $V_{i,P} \cdot V_{j,P}^* = P_{ji}$

for V_i , を満たす partial isometry $V_{i,p}$ が存在する。よって各 p に対し $U_p = \sum_i V_{i,p}$ とすると U_p は unitary となる。そこで、上の各 permutation p_j に対し unitary U_j を対応させることで、 $B_n = \sum_j \lambda_j U_j^* A U_j$ を得る。次に unitaries U, V をとり、 $A'_n = U A_n U^*$ $B'_n = V B_n V^*$ で $\|A - A'_n\|_1 < \varepsilon$, $\|B - B'_n\|_1 < \varepsilon$ とおけるようにでき、 $\|B - V(\sum_j \lambda_j U_j^* U^* A U U_j) V^*\|_1 < 2\varepsilon$ を得る。よって (1) $\Rightarrow$ (2) の証明が得られるのであるが、この U, V のとり方については更に微細な議論を要する。

更に $A, B \in M^h$ に対し、同値関係 $A \approx B$ を $A \succ B$ かつ $B \succ A$ によって定義すると、次の関係が得られる。

定理 4. 以下は同値

- (1) $A \approx B$
- (2) $e_A(t) = e_B(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$
- (3) $E(r) \sim F(r)$ for all $r \in \mathbb{R}$, 但し $A = \int r dE(r)$, $B = \int r dF(r)$.
- (4) $A \approx_a B$.

ここで approximate equivalent $A \approx_a B$ とは M の unitaries の列 $\{U_n\}$ が存在し、 $\|U_n A U_n^* - B\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ ということである。これは Voiculescu [10] が表現に対して与えた定義であるが Kadison [6] は operator についても定義を与えている。

2. 次に doubly stochastic map について考える。[1] において M_n 上の linear map Φ が doubly stochastic であると

は, *positive*, *unital*, かつ *trace-preserving* なもの. とし て 定義 され ている. ここ では M 上の *doubly stochastic map* を 次の よう に 定義 し て やる.

定義 2. M 上の *linear map* Φ で $\Phi(1) = 1$ なる もの が, *doubly stochastic* である とは, 任意 の $A \in M^n$ に対し, $A \succ \Phi(A)$ なる もの を 言う.

このとき 定理 3 を 用いる こと で, 次 を 得る.

定理 5.

M 上の *linear map* Φ が *doubly stochastic map* である こと と *trace preserving*, i.e. $\tau(\Phi(x)) = \tau(x)$ for $\forall x \in M$, である こと と は 同値 である.

更に, [1] と 同様 に 次 も 得る こと が できる.

定理 6.

$A, B \in M^n$ に対し, $A \succ B$ である こと と M 上の *completely positive* な *doubly stochastic map* が 存在 し て, $B = \Phi(A)$ なる こと と は 同値 である.

この 証明 について の 概略 について 説明 する. まず $CP(M, M)$ を M 上の *unital completely positive map* の 全体 と する. このとき Arveson [3] の 定義 し た *BW-topology* に関 し て $CP(M, M)$ は *compact* と なる. 次に $W^*(B)$ を B で 生成 され た *von Neumann 環* と し, Φ を M から $W^*(B)$ へ の *conditional expectation* と する.

更に $S = \text{co}\{U^* \cdot U : U \text{ unitaries in } M\}$ の BW-closure とすれば S は $CP(M, M)$ の compact subset となる。次に定理 3 より $\|B - \sum \lambda_i U_i^* A U_i\|_1 < \frac{1}{n}$ とできるように $\{U_i\}$ を選んで $\Phi_n(\cdot) = \sum \lambda_i \Phi(U_i^* \cdot U_i)$ とすれば, $\{\Phi_n\}$ は集積点 Φ_0 を持ち, $\Phi_0(A) = B$ を満たすことがわかる。

次に Alberti and Uhlmann は, C^* -algebra $\mathcal{O}$ の state space 上に次のような順序を導入している [2]。

$f, g \in S(\mathcal{O})$ に対し, g が more mixed than f であるとは, g が weak-closure $\text{co}\{u^* f u : u \text{ is unitary in } \mathcal{O}\}$, $u^* f u(x) = f(u^* x u)$, として $S(\mathcal{O})$ 上の mapping Ψ で, 任意の $f \in S(\mathcal{O})$ に対し, $f \succ \Psi f$ なるものを mixing enhancing と呼んでいる。

このとき doubly stochastic map と mixing enhancing map との関係は次のようになる。

定理 7.

Φ が M 上の doubly stochastic map であることと Φ^* が M の normal state space 上の mixing enhancing map であることは同値である。

B. さ 2. M_n 上の majorization, doubly stochastic map を finite factor M におよび拡張した場合について見て来ているのであるが, 更にこれをエルミットという条件をほぐし, Hilbert 空間 H 上の一般の operator におよび拡張できないか, という事について

で考える。 $A, B \in M_n^h$ の場合 [1] にあいて、 $A \succ B$ であることと $B = \sum \lambda_i U_i^* A U_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, U_i unitary となることが同値であることが示されている。そこでこれを B が *matricial range* の *convex hull* に含まれていると解釈する。 *matricial range* は Parrot により the n -th spatial *matricial range* $V_n(T)$ が次のように与えられた [4].

$$V_n(T) = \{V^* T V; V: \mathbb{C}^n \rightarrow H \text{ isometries}\}$$

又、Arveson はこれに對して *algebraic matricial range* $W_n(T)$ を次の様に与えている [3].

$$W_n(T) = \{\phi(T); \phi \in CP(C^*(T), M_n)\}. \quad \text{ここを } C^*(T) \text{ とは}$$

T と 1 で生成された C^* -algebra とする。

これらを用いることで一般の operator に対し、次の様な順序を入れることができる。

$T \succ_n S$ であるとは $COV_n(T) \supset COV_n(S)$ であるとし、

$T \gg_n S$ であるとは $W_n(T) \supset W_n(S)$ とする。このとき

$T \succ_n S$ ならば $T \gg_n S$ となる。という関係が得られる。

又、 M 上の unital linear map Φ で $COV_n(T) \supset COV_n(\Phi(T))$ を満たすとき the n -th spatial d.s. map と呼ぶ。 $W_n(T) \supset W_n(\Phi(T))$ を満たすとき the n -th algebraic d.s. map と呼ぶことに可なり、

Φ が the n -th spatial d.s. map ならば the n -th algebraic d.s. map ということが得られる。更に、 Φ が M 上の n -positive

map であることと the n -th algebraic d.s. map であることが同値であることもわかる。

今後の課題として n 互動可 φ が φ completely d.s. map なるものかを考察 completely positive map との関係を図ること、更には operator valued range との関係を図ることなどが考えられる。以上。

参考文献

- [1] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, Lecture Note, Hokkaido Univ., 1982.
- [2] P.M. Alberti and A. Uhlmann, The order structure of states in C^* - and W^* -algebras. Proc. Int. Conf. on Operator Algebras, Ideals, and their Application in Theoretical Physics, Teubner Texte zur Mathematik, Leipzig 1978, p.126.
- [3] W.B. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras I-II, Acta Math. 123 (1969), 141-224., 128 (1972), 271-308.
- [4] F.F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Space and of Elements of Normed Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 2, Cambridge Univ. Press London, (1971).
- [5] K.M. Chong, Some extensions of a theorem of Hardy, Littlewood
(9)

and Polya and their applications, *Canad. J. Math.*, 26(1974)
1321-1340.

[6] D. W. Hadwin, An operator-valued spectrum, *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1977), 329-340.

[7] E. Kamei, Majorization in finite factors, *Math. Japon.*,
28(1983).

[8] D. E. Knuth. A permanent inequality, *Amer. Math. Soc. ... Monthly*, 88(1981), 731-740.

[9] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators,
Ann. Math., 37(1936), 116-229.

[10] D. Voiculescu, A noncommutative Weyl-von Neumann
theorem, *Rev. Roum. Pure Appl.*, 21(1976), 97-113.