

偽の同期アトラクタをもつ力学系

北海道大学理学部物理学科

奥田 浩司

最近注目されている力学系に位相空間の中に部分不変空間をもつ力学系がある。そこには、riddled basin, on-off intermittency, ヘテロクリニック軌道など部分不変空間が存在しないときには見られなかった特異なふるまいが観察されることがある。このような力学的構造は特に対称性をもつ系を記述するときによく現れ、例えば、振動子の同期現象などが典型的であり、空間構造に対称性のある系もそうである。また、ある種のゲーム力学系なども部分不変空間を持っている。ここでは、結合振動子系のシミュレーションで見つかったある特異なふるまいとそれに関連して行なった簡単な2次元写像を用いた解析 [1] を報告する。

この研究で扱った振動子系は N 個の複素 Ginzburg-Landau 型振動子からなる大域結合系 [2] であり、このような同一素子からなる大域結合系ではクラスター状態と呼ばれる部分同期状態が位相空間中の部分不変空間を構成する。今の系ではクラスター状態がカオスになるような適当なパラメータをとれば、riddled basin, on-off intermittency のようなふるまいも見られたが、別の特異な現象も観察されており、それを以下に述べる。 $N=6$ の系で適当なパラメータをとり、ランダムに選んだ初期状態から出発させたときの最終状態は、構成振動子の比が $4:1:1$ の準周期的クラスター状態か $3:2:1$ の周期的クラスター状態であった。しかし、それらの安定性を調べてみると $4:1:1$ は安定であったが、 $3:2:1$ の方は3のクラスターを壊す方向の摂動に対し不安定であった。不安定な状態が観察されるメカニズムの1つとして考えられるのは、複数のサドル的クラスター状態を結ぶ安定なヘテロクリニック軌道の存在であり、実際位相モデル振動子系ではその存在が見つかっている場合もあるが、今の場合はそれとは違っていることがわかった。そこで不安定な状態に至る時間発展をシミュレーションで追ってみると、(1) まず $3:1:1:1$ のクラスターができかける。(2) $3:1:1:1$ の部分不変空間上には $4:1:1$ と $3:2:1$ の2種類のアトラクタがあるが、その basin 境界はフラクタル的になっておりその境界付近で長時間さまよう。(3) basin 境界付近は部分不変空間の外の軌道を吸引しているので、長時間さまよっていると、数値計算の有限精度のために軌道が部分不変空間に完全に捉えられる。(4) $3:2:1$ は不変空間内ではアトラクタなので最終的にそこに落ち着くが、そこでは不変空間を離れる方向には反発的になっている。というようなシナリオがわかった。しかし、今の系では $4:1:1$ は全位相空間での真のアトラクタであるので、もし無限精度で計算を行なうことができるなら、 $3:2:1$ のような全位相空間では不安定な偽のアトラクタが観察される余地はなくなるし、部分不変空間上にあるフラクタル basin 境界の役割もはっきりしない。そこで不変空間上に真のアトラクタをもたないような簡単なモデルを考えて、不変空間上にあるフラクタル basin 境界がどのような役割を果たしているのかを次に探してみる。

ここでは次のような xy 面上の2次元写像を考えた。

- $y=0$ は不変空間になっている。
- $y=0$ 上では2つのアトラクタをもち、それらの間の basin 境界はフラクタル的になっている。
- $y=0$ 上の2つのアトラクタは y 方向には不安定な偽のアトラクタであるが、フラクタル basin 境界は y 方向には吸引的になっている。
- 偽のアトラクタから出ていった軌道は $y=0$ から離れたところで、basin 境界付近に再投入される。

ここに詳細な式で表すことはしないが、Fig.1 で表される領域上に矢印で与えられるような流れをもつ区分線形写像を用いている。不変空間 $y=0$ 上のダイナミクスとしては Fig.2 のようなN字型の1次元写像を用いた。このような形の写像はフラクタル basin 境界をもつことがわかっている [3]。適当なパラメータではこの2次元写像は Fig.3 のようなカオス

アトラクタをもつ。上で扱った振動子系のように、不変空間上にある偽のアトラクタ（今の場合 $(x, y) = (\pm 1.5, 0)$ ）に数値計算の有限精度によって軌道が落ち着くためには、軌道が不変空間に十分接近することが必要である。そこで Fig.3 のアトラクタの軌道について y の分布を調べたのが Fig.4 である。この結果から y の確率密度分布は $y = 0$ 付近で $y^{-\alpha}$ （今の場合 $\alpha = 0.42$ ）のようにベキで発散すると思われる。実際、basin 境界付近への再投入が一様であることを仮定すれば、今のモデルではベキの指数を計算することができ、それはシミュレーションの結果とも一致している。この結果を不変空間上の basin 境界がフラクタルでない別のモデルでのシミュレーションと比較すると、後者ではアトラクタは周期状態であることも多いが、たとえカオスになっても軌道が不変空間近傍に集中するようなことはなかった。したがって、不変空間上のフラクタル basin 境界は不変空間近傍で発散する分布関数をもつカオスアトラクタの存在に重要な役割を果たしていると思われるが、その理論的な説明は未解決である。

参考文献

- [1] K. Okuda, in preparation.
- [2] N. Nakagawa and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 89 (1993) 313.
- [3] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, (Cambridge Univ. Press, 1993).

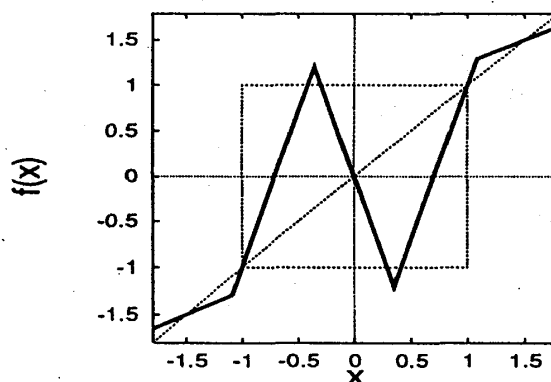
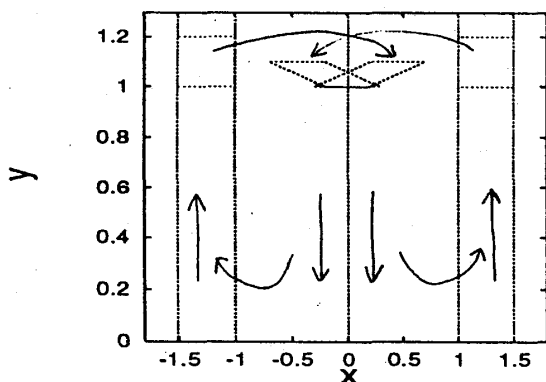


Fig.1 ここで扱う2次元写像のおおよその流れ。 Fig.2 $y = 0$ 上での写像。 $x = \pm 1.5$ がアトラクタ。

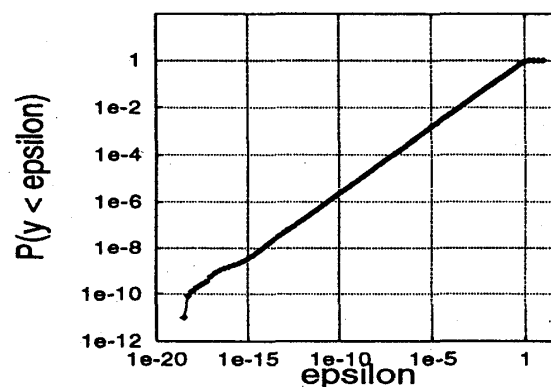
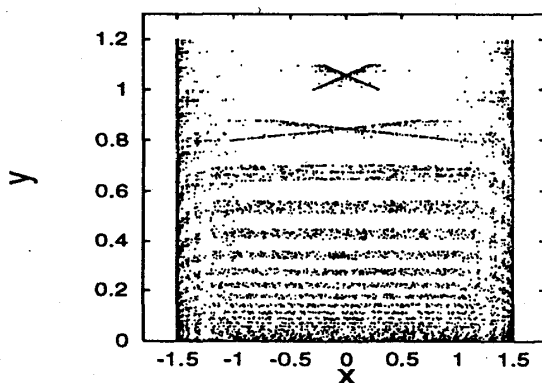


Fig.3 上の2次元写像のアトラクタ。Lyapunov 指数は 0.203 と -0.030 なのでカオスである。

Fig.4 左図のアトラクタにおいて $y < \epsilon$ となる確率 $P(y < \epsilon)$ 。点の数は 10^{11} 個とっている。